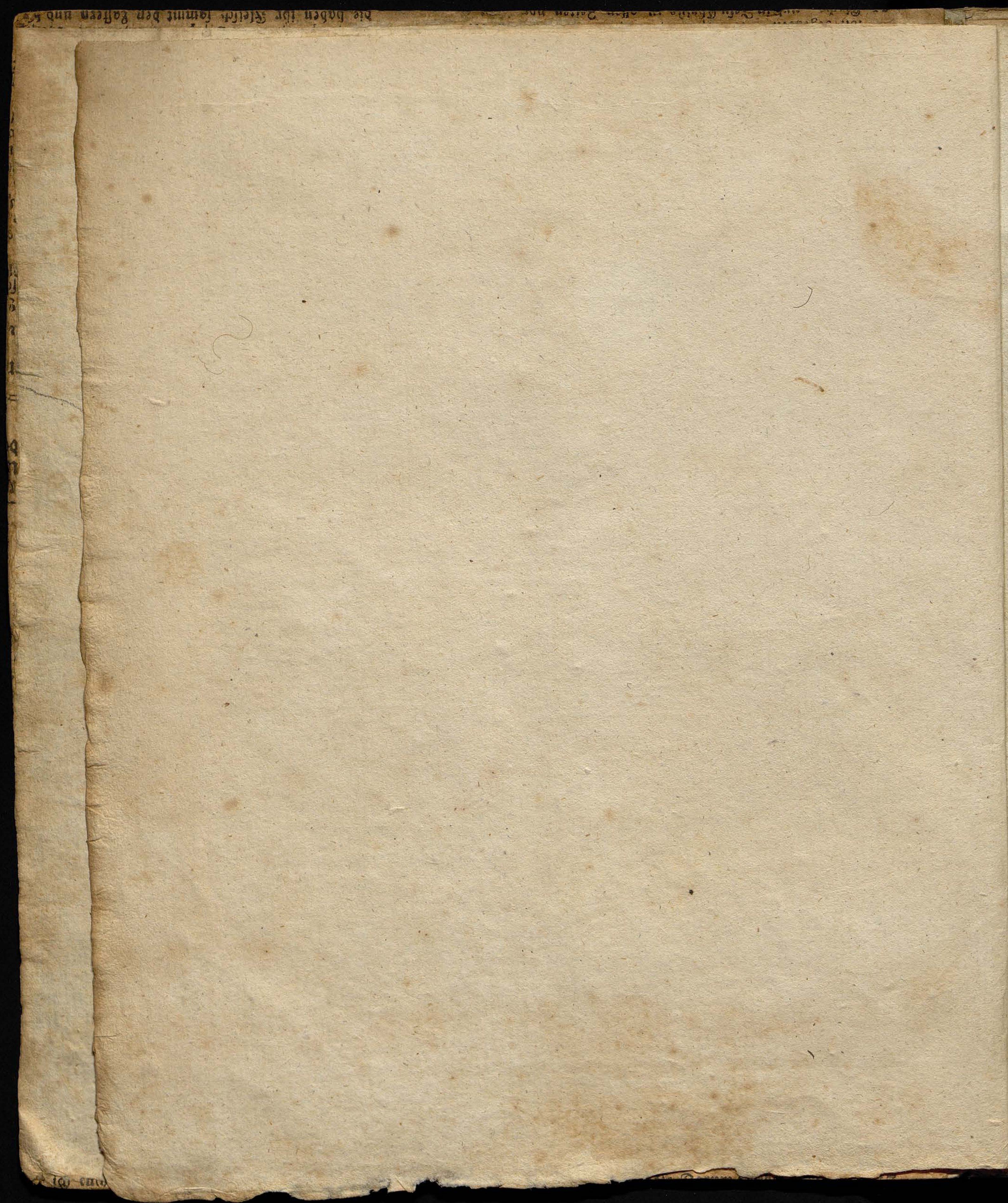


J Hurznowski



Astronomia

Caput I.

Astronomia est scientia astrorum, eorumq motuum; innititur igitur observationibus et calculis. Sed theoria et observationes nunquam separari possunt, et semper conjunctae incedere debent, ut finis propositus rite adducatur. — Potissimum hodiernis temporibus, in quibus Astronomia tantos fecit progressus, et per instrumenta admodum perfecta, et per analysin provectam, quilibet qui Astronomiae studium adgreditur, in omnibus partibus Analyseos et Mechanices, versatus esse debet. Ergo quoq hic supponitur intima cognitio calculi differentialis et integralis et Geometriae Analyticae, quae nunc in omnes partes Astronomiae propter simplicitatem, qua hac ratione formulae gaudent, influit; praeterea hic non sermo est tantum de Astronomia sic dicta populari, sed de theoretica et practica, hinc nulla res nec attingitur quae non stricte demonstrari possit, omnia enucleari quoque debent justis exemplis ad exercitationem calculi Astronomici et ad cognitionem tabularum, imo quantum fieri potest per observationes ipsas, veritates propositae comprobabuntur. Hinc quoq accidi debet rectificatio et usus instrumentorum Astronomicorum.

Coelum nobis apparet qua superficies sphaerae in qua nos omnia phaenomena considerare credimus. — Directio gravitatis in terra nostra, in loco in quo observator supponitur, prolongata, dabit nobis duo puncta in coelo quorum nobis visibile Zenith, alterum Nadir nuncupatur; et circulus maximus 90° distans ab his punctis qui ergo per centrum terrae transit, est Horizon verus, Horizon apparens huic est parallelus et per observationis situm transit. —

Motus diurnus corporum coelestium cuilibet statim apparet in circulis inter se parallelis quorum centra sunt omnia in linea quae axis mundi vocatur. Extrema puncta hujus rectae in coelo sunt poli mundi, quorum visibilis est septentrionalis, invisibilis meridionalis. — Inter hos circulos ille qui aeque distat a polis, vocatur Aequator, qui dividit coelum in duas

aequal

aequalis partes, in Hemisphaerium boreale et australe. Intersectio aequatoris cum Horizonte in parte ubi astra in motu suo diurno se elevant supra Horizontem est Oriens et opposita pars Occidens. Ortus et Occasus est momentum quo astrum per Horizontem transit, et distantia ab his punctis vocatur Amplitudo ortiva et occasa. —

Circuli maximi qui per polos et Zenith transeunt, vocantur Meridiani et intersectio hujus plani cum Horizonte est linea meridiana, cujus extrema puncta sunt Meridies (Sud) et Septentrio (Nord). Quum quodlibet punctum terrae nostrae habet Zenith et Nadir, quilibet locus quoq habebit suum proprium Meridianum Culminatio. — Circuli maximi per polos mundi et astrum quodlibet transeuntes, sunt circuli declinationis vel horarii; et circuli maximi per Zenith et Astrum, sunt circuli Altitudinis. Hinc primi sunt ad Aequatorem alteri ad Horizontem perpendiculares. —

Angulus qui verticem habet in polo mundi et interceptus est inter Meridianum et circulum declinationis alicujus astri est angulus horarius et angulus ad Zenith inter meridianum et circulum verticalem alicujus astri est Azymuth. — Pars circuli declinationis inter astrum et aequatorem est declinatio et complementum, distantia a polo astri; Altitudo astri est pars circuli verticalis intercepta inter astrum et Horizontem, et complementum, distantia a Zenith. Altitudo poli est distantia poli mundi ab horizonte, quae quoq aequatur latitudini Geographicae loci. Longitudo Geographica est angulus duorum meridianorum, quorum unus primus assumitur. —

Inter corpora coelestia potissimum sol est, cujus motus diversus certe primo omnibus se statim obtulit. Quilibet enim animadvertit praeter diurnum motum ab ortu occasum versus, aliquem motum proprium ab occasu ortum versus in circulo qui Aequatorem bifariam secat. Hic circulus maximus apparens orbita solis, est Ecliptica, cujus axis determinat per sua extrema puncta in coelo, borealem et meridionalem polum Eclipticae. Circulus maximus per hos polos et astrum est circulus latitudinis et arcus interceptus, latitudo astri. — Puncta intersectionis Ellipticae cum aequatore sunt puncta aequinoctialia, quorum unum est

est vernale, alterum autumnale. Arcus aequatoris inter punctum vernale et circulum declinationis astri, est Ascensio recta, et arcus Eclipticae inter punctum vernale et circulum latitudinis astri, est longitudo. ^

Circuli paralleli per polos eclipticae, sunt circuli polares. — Circuli paralleli qui et in Hemisphaerio boreali et meridionali ita distant ab aequatore uti circuli polares a polis mundi, vocantur Tropici. Colurus aequinoctiorum et solstitiorum, sunt circuli declinationis qui per puncta dicta, transeunt. —

^ Ascensio obliqua astri, vocatur digressio puncti aequatoris, quod eodem momento, quo datum astrum, oritur a primo puncto Arietis. Descensio obliqua astri idem quoad occasum. —

Angulus positionis est angulus circuli latitudinis et declinationis. Angulus parallacticus est angulus circuli altitudinis et latitudinis. — Variatio est angulus circuli declinationis et verticalis. —

Longitudo est Ascensio recta a puncto vernali usque ad 360° et quidem in directione motus diurni opposita, igitur ab occasu ortum versus numeratur. — Azymuthum et anguli horarii numerantur in directione motus diurni et quidem a meridie occasum versus usque ad 360°, vel etiam tantum ad 180° in quo casu Azymutha et anguli horarii in parte orientali meridiani, negativi assumuntur. Declinationes quoque et latitudines australes sunt negativae. — Obliquitas Eclipticae est digressio plani eclipticae a plano aequatoris. —

Praeter divisionem horum circulorum in gradus minuta prima et secunda datur Eclipticae aliqua divisio propria: Eclipticam nimirum, inchoando a puncto aequinoctiali verno seu primo puncto Arietis et progrediendo in directione motus annui solis ab occasu in ortum, dividunt in duodecim partes aequales, quarum quaevis idcirco arcui 30° aequatur, perque has totidem signa Ecliptica quae hic sequuntur: 1° Aries ♈, 2. Taurus ♉, 3° Gemini ♊, 4° Cancer ♋, 5° Leo ♌, 6° Virgo ♍ 7° Libra ♎. 8° Scorpius ♏, 9° Sagittarius ♐, 10° Capricornus ♑, 11° Aquarius ♒, 12 Pisces ♓. — Hinc quoque denominatio Tropicus Cancri, Tropicus Capricorni. — Zodiacus est zona in superficie caelestis, inter duos circulos ad eclipticam parallelos at ab hac utrimque 10° distantes comprehensa. Sic Ecliptica medium inter hos Zodiaci limites locum tenet, Zodiacumque in duas minores zonas aequales dividit. —

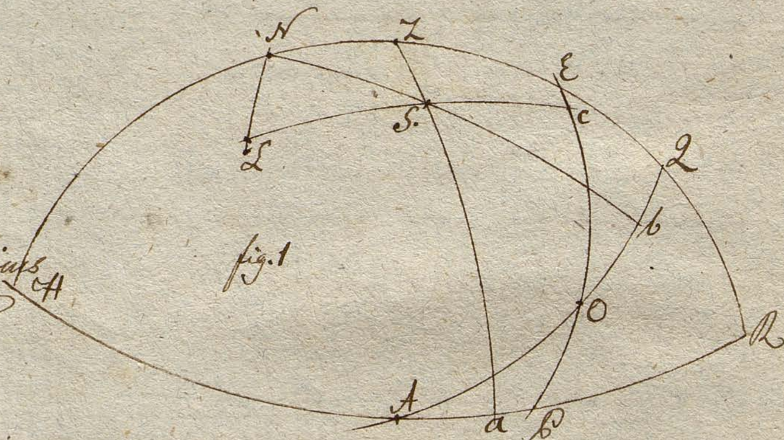
Assumpta priori divisione eclipticae, ubi directio aliqua, ab occasu

in

in ortum, vel ab ortu in occasum indicanda fuerit, licet priorem sub directione contra ordinem signorum intelligere. Omnia haec signa ecliptica, dividuntur in duas ~~partes~~ classes: sex priora signa vocantur signa borealia, altera australia. Alia quoq. divisio est: in signa ascendentia et descendentia; ad illa pertinent ♈, ♉, ♊, ♑, ♒, ♓ et ad haec reliqua.

Priora magis inotescunt ope considerationis globi, ~~vel ope globi~~ vel ope figurae. — Sit Z polus horizontis HR, N polus aequatoris AQ, L polus eclipticae EE, S astrum et R, A, H meridies, occasus et septentrio; deinde est HZR, et si per S ducantur arcus ZSa, NSb, LSc perpendiculares ad HR, AQ, EE, erit:

Sa Altitudo astri
SZ distantia a zenith
Sb Declinatio
SN distantia a polo
Sc Latitudo
ONb vel Ob ascensio recta
OLc vel Oc longitudo
ENb vel Qb angulus horarius
RZa vel Ra Azymuthum
NSL positio
NSZ variatio
LSZ parallaxis



Optimum est inspicere globum aliquem in quo omnes isti circuli sunt depicti. Quum ope globorum varia quoq. possint resolvi problemata, aliqua de iis dicam.

Globus coelestis est machina destinata ad representationem constellationum, motus diurni nimirum eclipticae, aequatoris etc. — Primum est orientare globum pro determinato loco terrae et pro determinato die, quod sit si polus aequatoris ponitur in altitudine supra horizontem globi quae aequalis est latitudinis geographicae loci; punctum eclipticae quod obtinet sol hoc die, adducatur ad meridianum orichalcinum, et in hoc situ index ponatur ad 0 horam. Sic polus globi debet revera respicere polum mundi quod ope acus magneticae obtinetur. Hac ratione rite orientato globo, plura problemata resolvi possunt, quorum tantum aliquot adferam.

1º Invenire horam, qua sol aliquo die in determinato loco occidit vel oritur. — Adducto puncto ecliptice ad meridianum rotatur globus orientem et occidentem versus, index rose mihi indicabit horam ortus et occasus. Etiam hac ratione locus ortus et occasus determinari potest. Eodem quoq modo pro stellis fixis, ubi quoq culminatio seu transitus per meridianum inveniri potest. Loco istius rose, equator in horas et minuta divisus adhiberi potest. —

2º Quibus diebus anni sol data latitudine loci, dato tempore occidit? v. c. 5h. Opponatur globus ad datam latitudinem loci, conducatur aliquis circulus declinationis globi ad meridianum et index ad 0. Si dein globus rotetur occasum versus, donec index sit ad 5h, notetur punctum circuli declinationis, quod hoc momento est in Horizonte. — Si sol declinationem hujus puncti habet, hora hac definita occidit, adducetur igitur idem punctum ad meridianum aurichalcium, et legatur declinatio hujus puncti etc. —

3º Que est ascensio recta Zenith pro dato tempore in dato loco?
Orientetur globus, rotetur donec ~~[illegible]~~ index indicet datam horam, punctum equatoris quod nunc est in Meridiano, dabit quesitam AR Zenith et c. p. Si rotatur globus videre quoq possumus que stelle transeunt per Zenith dati loci, nimirum erunt ille, cujus declinatio equatur latitudini loci; eadem ratione inveniri possunt stelle, que pro dato loco nunquam occidunt, nimirum ille, quarum distantia a polo minor est quam altitudo poli v. c. pro Cracovia quarum declinatio major est 40º. —

4º Invenire horam qua stella aliqua transit Meridianum?
Notetur locus solis et stelle in globo, adducatur sol ad Meridianum et ponatur index ad 0h adducatur dein quoq locus stelle ad Meridianum et index notabit horam transitus. —

Dein globus celestis est optimum medium ad cognitionem stellarum. Ad hunc finem orientatur globus, roteturq donec index monstret datam horam; in hoc situ nunc concordant omnes partes globi cum celo, et

ad

et ad cognoscendam quamlibet stellam quam videmus in globo, tantummodo imaginari nobis debemus per centrum globi et per stellam in globo lineam rectam, quae prolongata dabit nobis stellam in coelo. — Aliquae horae serenae noctis ~~ad~~ sufficient ad cognitionem praecipuarum stellarum et constellationum. — Sed ad hunc usum ~~pertinent~~ quoque serviunt chartae coelestes. —

Globus terrestris est machina destinata ad repraesentationem terrae nostrae. —

In tali globo etiam omnes isti circuli sunt delineati, hinc quoque cum hoc instrumento complura problemata resolvi possunt; quorum tantum aliqua adferam.

1° Invenire horam, quae est in aliquo loco si data est hora v.c. Cracoviae. Adducatur Cracovia ad Meridianum et index ad horam Cracoviae, dein rotetur globus donec alter locus perveniret ad Meridianum et index indicabit horam. —

2° Inveniri quoque potest pro quolibet die, quae loca habeant solem in Zenith. Adducto enim loco Solis ad Meridianum videbimus declinationem solis; omnia loca quorum ~~declinatio~~ latitudo aequalis est huic declinationi, habebunt solem hoc die in Zenith.

3° Invenire loca pro quolibet dato die, pro quibus sol non occidit h.e. pro quibus sol media nocte est in Horizonte.

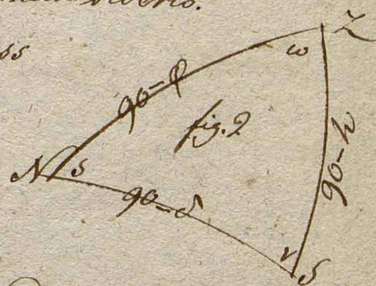
Subtrahatur declinatio solis a 90°; si nunc differentia coincidit cum aliqua data elevatione poli, loca quorum latitudo haec est, solem habebunt his diebus, media quoque nocte in Horizonte; et hac ratione quoque invenire possunt dies pro quolibet loco zonae frigidae quibus sol semper visibilis; nimirum ponatur globus ad datam latitudinem loci et rotetur, posito aliquo stilo in puncto septentrionali Horizontis. Hic stilus describet in globo circulum aequatori parallelum, qui eclipticam in duobus punctis, hinc in duas partes secat. Minor harum partium notabit arcum eclipticae in quo sol versatur eo tempore, quo hunc locum non occidit. Si autem stilus tenetur in

in Meridiem Horizontis, minor arcus eclipticæ dabit tempus quo sol in dato loco non oritur. etc. —

Enucleatis omnibus circulis sphæræ terrestris, vidimus, combinatione plurium talium circulorum eorumque arcuum varia oriri triangula, quorum resolutio igitur quoque est resolutio plurium problematum Astronomiæ, quorum aliqua adferamus. — Denominationes per decursum omnium lectionum adhibitæ sunt sequentes: α. AR sideris, λ. longitudo, δ. declinatio, β. latitudo, h. altitudo, ω. Azimuthum, ϑ. angulus horarius, π. positio, v. variatio, ξ. parallaxis, φ. altitudo poli et e. inclinatio eclipticæ.

Instrumentorum potissimum usitata sunt, quæ altitudinem et Azimuthum dant, igitur primum problema erit: Datis ω, h et φ invenire angulum horarium, declinationem et variationem sideris.

In triangulo NZS secundum formulas celeberrimi Gauss habebimus:



$$\sin\frac{90^\circ-\delta}{2}\sin\frac{s-v}{2} = \sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\varphi-h}{2}$$
$$\sin\frac{90^\circ-\delta}{2}\cos\frac{s-v}{2} = \cos\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi+h}{2}$$
$$\cos\frac{90^\circ-\delta}{2}\sin\frac{s+v}{2} = \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi-h}{2}$$
$$\cos\frac{90^\circ-\delta}{2}\cos\frac{s+v}{2} = \cos\frac{\omega}{2}\sin\frac{\varphi+h}{2}$$

duæ primæ æquationes per divisionem dant $\tang\frac{s-v}{2}$; duæ ultimæ $\tang\frac{s+v}{2}$ ergo quoque inotescunt v et s; inventis hac ratione v et s, ex qualibet istarum æquationum fluit valor ipsius δ, quod quoque servit ad confirmationem. Si autem non respicere velimus quantitatem v, quanto s et δ prodibunt quoque ex sequentibus:

$$\cotang s = \frac{\tang h \cos\varphi + \sin\varphi\cos\omega}{\sin\omega}$$
$$\sin\delta = \sin h\sin\varphi - \cos h\cos\varphi\cos\omega \quad \text{vel}$$
$$\cos\delta = \frac{\cos h\cos\omega}{\sin s}$$

Invento declinatione δ, adhuc situs sideris observati ad æquatorem non est determinatus, accedere debet etiam ascensio recta α. Si AR Zenithi t, h. e. angulus horarius puncti verni notus esset dein haberemus fig. praec.:
$t = ZN\odot = ZNS + SN\odot = s + \alpha$; ergo $\alpha = t - s$. AR Zenithi autem est nota, si angulus horarius solis T, seu tempus observationis, et præterea AR solis A pro eodem tempore nota est; est nimirum $t = A + T$ et substituto valore

erit

erit $\alpha = A + T - s$ ergo Ak nota.

Si data est altitudo poli, declinatio et angulus horarius, invenitur altitudo sideris ex sequenti formula

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$$

et praeterea $\tan\omega = \dfrac{\sin s}{\sin\varphi \cos s - \tan\delta \cos\varphi}$ +

$$\tan\xi = \frac{\sin s}{\tan\varphi \cos\delta - \sin\delta \cos s}$$

$C - 90° = \varphi$

$\cos A = \dfrac{\cos C'' \sin C - \cos C \cos A'}{\sin A'}$

(angulus parallacticus)

ergo hic ex altitudine poli, angulo horario et declinatione omnia reliqua sunt inventa.

+ posito $\tan x = \cos s \tan\delta$

2. Ex altitudine poli, altitudine et Azimutho reliqua inveniuntur:

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos\omega \quad \text{uti prius}$$

$$\tan s = \frac{\sin\omega}{\tan h \cos\varphi + \cos\omega \sin\varphi}$$

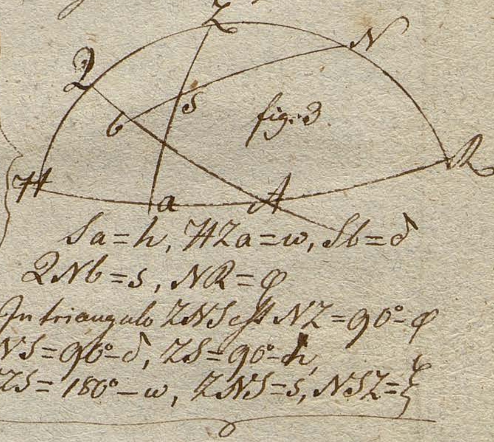
$$\tan\xi = \frac{\sin\omega}{\tan\varphi \cos h + \cos\omega \sin h}$$

3. Ex altitudine poli, declinatione et altitudine astri, reliqua:

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin\varphi \sin h - \sin\delta}{\cos\varphi \cos h}$$

$$\cos\xi = \frac{\sin\varphi - \sin\delta \sin h}{\cos\delta \cos h}$$



$Sa = h$, $HZa = \omega$, $Sb = \delta$

$QNb = s$, $NR = \varphi$

In triangulo ZNS est $NZ = 90° - \varphi$, $NS = 90° - \delta$, $ZS = 90° - h$, $NZS = 180° - \omega$, $ZNS = s$, $NSZ = \xi$

4. Ex altitudine poli, altitudine et angulo horario

$$\sin\xi = \frac{\cos\varphi \sin s}{\cos h}$$

$$\tan\delta = \frac{\sin h \cot\xi - \sin\varphi \cot s}{\cos h \csc\xi - \cos\varphi \csc s}$$

$$\tan\omega = \frac{\sin s \sec\varphi - \sin\xi \sec h}{\cos s \tan\varphi - \cos\xi \tan h}$$

5. Ex altitudine, angulo horario, et Azimutho reliqua:

$$\tan\delta = \frac{\sin\varphi \tan\omega \cos s - \sin s}{\cos\varphi \tan\omega}$$

$$\tan h = \frac{\sin\omega - \sin\varphi \cos\omega \tan s}{\cos\varphi \tan s}$$

$$\cos\xi = \cos s \cos\omega + \sin s \sin\omega \sin\varphi$$

6. Ex declinatione, angulo horario et altitudine

$$\sin\omega = \frac{\cos\delta \sin s}{\cos h}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\delta \cot s + \sin h \cot\omega}{\cos\delta \csc s - \cos h \csc\omega}$$

$$\tan\xi = \frac{\sin\omega \sec h - \sin s \sec\delta}{\cos s \tan\delta + \cos\omega \tan h}$$

7. Ex altitudine, Azimutho et angulo horario:

$\cos\delta = \frac{\cos h \sin a}{\sin s}$ tang φ et tang ζ ut in praec. 6

et s.

Ex his allatis formulis facile praecipua motus diurni derivari possunt. V.C. ex 1. formula sequitur altitudinem pro eodem loco et stella, eo majorem esse, quo minor est s. Altitudo erit maxima pro $s=0$ seu stella est in sua culminatione; dein erit $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta = \cos(\varphi-\delta)$ ergo altitudo meridionalis $= 90° - (\varphi-\delta)$ et distantia a zenith $= \varphi - \delta$. Si $\delta > \varphi$, dein distantia a zenith cadit inter polum et verticem. Altitudo erit minima, si $s = 180°$ ergo in septentrionali parte Meridiani (inferior culminatio) dein est $\sin h = \sin\varphi \sin\delta - \cos\varphi\cos\delta = \cos(\varphi+\delta)$ vel

$-h = 90° - (\varphi+\delta)$, quod indicat depressionem infra Horizontem

$z = 90° - h = 180° - \varphi - \delta$ generatim pro inferiori culminatione

$z = 180° - \varphi - \delta$, pro superiori $z = \varphi - \delta$ ubi declinationes australes sunt negativae. —

Ex hoc quoq. patet, stellam nunquam occidere, si $\varphi+\delta > 90°$ vel $\delta > 90°-\varphi$ et stellam nunquam oriri, si $\varphi-\delta > 90°$ vel $\varphi > 90°+\delta$, et quum φ nunquam major evadere potest quam $90°$, δ debet esse negativa quantitas, hoc est declinatio australis. — Si $\delta = \varphi$ dein est $\sin h = \sin^2\delta + \cos^2\delta$ hoc est $h = 90°$ pro $s = 180°$ et stella in sua culminatione est in vertice. Si $s = 90°$ dein est $\sin h = \sin\varphi \sin\delta$ et stella est in suo primo verticali; et si ponatur stella in aequatore seu $\delta = 0$ erit quoq. $h = 0$ seu stella in Horizonte. — In eadem aequatione h habebit eundem valorem et pro $s = +c$ et pro $s = -c$ quia cosinus amborum angulorum sunt positivi. Igitur altitudo sideris erit eadem in utraq. parte Meridiani, si anguli horarii sunt aequales; et vice versa anguli horarii sunt aequales, si altitudines sunt aequales quod quoq. fluit ex aequatione prima, n:3 ~~secunda et tertia~~. — Hoc igitur quoq. locum habet, si $h = 0$, dein est $0 = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$ seu $\cos s = -\tang\varphi \tang\delta$ h.e. pars circuli paralleli supra horizontem, seu arcus diurnus, cujus, libet

cujus libet stellæ per Meridianum in duas æquales partes dividitur, quod ergo valet de parte infra Horizontem, seu de arcu nocturno. — Hoc quoq nobis dat medium ad disquisitionem, an celeritas stellarum in occidentali parte Meridiani æqualis sit celeritati in orientali vel, an motus diurnus sit æquabilis. Quum stella bis assequitur eandem altitudinem, sumentur igitur in utraq parte Meridiani semper binæ et binæ diversæ altitudines et notetur accurate tempus horologii. Si nunc semper tempora inter duas altitudines in orientali et correspondentes altitudines in occidentali parte æquales sunt, dein stella semper percurrit æqualibus temporibus æquales angulos horarios, vel motus circa polum est uniformis. — Si altitudo poli et declinatio stellæ notæ sunt, hæc uniformitas, quæ pro Astronomia maximi est momenti, etiam ex prima æquatione No 3. demonstrari potest. — Invenitur ibi ex qualibet observata altitudine h, angulus horarius s. Si ergo bis altitudo alicujus stellæ in eandem partem Meridiani una cum temporis intervallo observata est, innotescit tempus totius circuitus T. Observentur hac ratione plures aliæ diversæ altitudines cum intervallis et sint h, h', h'' observatæ altitudines, s, s', s'' anguli horarii ex altitudinibus calculati, t, t' tempora numerata inter altitudines h, h' et h, h'' dein motus erit uniformis si est $h'-h : h''-h : 360° = t : t' : T$. — Innumeræ jam ab Astronomis institutæ observationes, comprobant satis hanc uniformitatem motus diurni. —

Prædictus arcus diurnus nobis suppeditat quoq medium calculandi tempus ortus et occasus alicujus stellæ, nimirum, si t' est tempus quo indiget stella ad percurrendum arcum dimidium diurnum, quod tempus innotescit ex proportione $360 : \frac{1}{2}$ arc. diurn. = tempus totius revolutionis : t', hoc ita inventum tempus tantum a tempore t culminationis stellæ subtrahi aut addi debet et habeatur tempus ortus et occasus. — Hoc quoq ad terminos analyticos adduci possunt, nimirum: si Θ est tempus inter duas subsequentes ~~alternativas~~ culminationes erit $t' = \frac{s.\Theta}{360°}$. — Ad inveniendum tempus

culmina

culminationis, sint A et a ascensiones rectae solis et stellae pro meridie dati diei in tempore expressae, dA et da differentiae inter duas sequentes culminationes, dein est tempus inter duas subsequentes culminationes astri $\theta = \frac{24^h \cdot 360^o}{24 + dA - da}$ et tempus culminationis

$$t = \frac{24(a-A)}{24+dA-da}$$

ubi da est quantitas negativa aut zerus, prout AR sideris aut decrescit aut constans est. — Tempus ortus et occasus, culminationis facillime invenitur, si supponitur aliquod horologium, quod tempore culminationis puncti verni 0^h, et inter duas subsequentes culminationes 24^h dat. Tale horologium est sidereum et tempus est tempus siderum. Quum tempus sidereum culminationis alicujus stellae simul sit ascensio recta α hujus stellae, $\alpha \mp s$ erit tempus ortus et occasus si s est arcus semidiurnus.

Hic non respeximus ad Refractionem neq ad Parallaxin Horizontis neq variabilitatem declinationis. —

Priores aequationes quoq ad solem referri possunt, nimirum: nos habuimus $\cos s = -\tang \varphi \tang \delta$, tempus hac aequatione inventum erit $\frac{s}{15}$ quod tempus quoq erit tempus occasus solis; ad inveniendum ortum hoc tempus de 24^h subtrahi debet. — Praeterea quum declinatio solis nunquam major evadere potest quam obliquitas eclipticae, vel δ nunquam $> \varepsilon$, sol initio aestatis omnibus locis non oritur, quorum australis altitudo poli major $90-\varepsilon$ est, et illis non occidit quorum septentrionalis altitudo poli major $90-\varepsilon$ est. — Ceteris partibus anni, ubi $\delta < \varepsilon$ est, locus, cui sol non oritur vel non occidit, habebit declinationem australem aut borealem, quae major quam $90-\delta$ est, hinc semper major quam $90-\varepsilon$; et sol tamdiu alicui loci non oritur neq occidit, donec evadat declinatio minor quam $90-\varphi$. —

Omnes regiones igitur quibus sol semel in anno non oritur et non occidit, sunt contentae inter polum et circulum parallelum terrae cujus altitudo poli $= 90-\varepsilon$, vel qui a polo distat quantitati, quae aequatur obliquitati eclipticae. — Isti circuli sunt jam dicti circuli

culi

circuli polaris et regiones istæ sunt regiones polares. Maxima ibi erit altitudo meridiana, si $\delta=\varepsilon$, tum est $\sin h = \cos(\varphi-\varepsilon)$ vel $h = 90-\varphi+\varepsilon$; ergo quum $\varphi > 90-\varepsilon$, altitudo meridiana in illis regionibus non major quam 2ε evadere potest. —
Ex æquatione $\cos s = -\tan\varphi \tan\delta$, sequitur quoq. $s > $ est $90°$, vel solem longiori tempore supra quam infra Horizontem esse, si φ et δ sunt ejusdem generis; si autem sunt diversi generis, dein arcus nocturnus major est quam diurnus. Si nominemus pro hoc casu angulum horarium per s', dein erit: $\cos s' = \cos s$, ergo $s+s' = 180°$. Quum autem dimidius arcus diurnus et nocturnus quoq efficiant $180°$, s' erit idem cum dimidio arcu nocturno primi casus, h. e. arcus nocturni et diurni pro data declinatione sunt inverse arcubus diurnis et nocturnis pro eadem sed inversa declinatione æquales, vel quolibet loco longitudo diei æstatis tempore, semper æquatur longitudini noctis similis diei hiemis tempore. – Ergo quoq ex longitudine dierum ad longitudinem noctium hiemis tempore concludi potest.
Præterea si φ et δ sunt diversi generis et φ vel δ crescit, s' decrescit, s crescit, h. e. quo major altitudo poli, eo breviores dies hiemis tempore, et eo longiores dies æstatis tempore. Dein quoq sequitur, omnia loca terræ nostræ habere longissimam diem et brevissimam noctem, si sol est in tropico sui et contraria. Pro regionibus sub sic dicta Linea $\varphi = 0$ ergo $s = 90$, quæcunq sit declinatio solis, h. e. sub æquatore omnes noctes æquantur diebus. Si sol est in æquatore δ erit zerus, ergo quoq $s = 90$ quæcunq sit altitudo poli; h. e. initio veris et autumni in tota terra dies et noctes sunt æquales et ab hac proprietate probabiliter et æquator et puncta æquinoctialia nomen suum habent. – Sub polo $\varphi = 90°$ ergo semper $\varphi+\delta > 90°$ quamdiu φ et δ sunt ejusdem generis, ex quo sequitur, ibi esse per dimidium annum diem et per dimidium noctem. —

Nunc ostensum est quanta sit vis linguæ analyticæ, nam una formula nobis suppeditavit omnia hæc consectaria. —

Nunc quoq videndum est, quæ potissimum altitudines sint sumendæ.

Optimum generatim erit tales seligere altitudines, ut ex commisso in sumen- da altitudine errore, ipse tamen minimum habeat influxum in angulum horarium, igitur valor $\frac{dh}{ds}$ debet esse quam maximus. Differentiando igitur primam aequationem erit $dh \cos h = - ds \sin s \cos\varphi \cos\delta$; substituendo hinc valorem $\sin\xi$ pro $\frac{\cos\varphi \sin s}{\cos h}$ ex prima aequatione N° 4. erit: ubi altitudines quam celerrime mutantur

$\frac{dh}{ds} = - \cos\delta \sin\xi$, quod acquiret maximum valorem pro $\sin\xi = 1$.

Praeterea quum sit $\cos\xi = \frac{\sin\varphi - \sin\delta \sin h}{\cos\delta \cos h}$ erit differentiando

$$d\xi = \frac{dh(\sin\delta - \sin h \sin\varphi)}{\cos^2 h \cos\delta \sin\xi}.$$

Posito nunc pro Maximo quantitatis ξ, $d\xi = 0$

erit $\sin h = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$ et ex hoc, si hic valor substituatur in aequatione prima et secunda N° 8 erit

$$\cos s = \tang\delta \tang\varphi$$

$$\cos w = 0 \text{ ergo } w = \pm 90°$$

ergo optimum erit observationes altitudinum instituere, quantum fieri potest, vicinas circulo verticali, qui transit vel per punctum ortus aut oc- casus; suppositum hic fuit $\delta < \varphi$

Si stella est in ipso aequatore, optimum erit in puncto ortus aut occasus observare. Si autem declinatio septemtrionalis stellae, esset aequalis alti- tudini poli ergo $\delta = \varphi$, dum stella transit per verticem, et dum erit:

$$\frac{d.\cos\xi}{dh} = \frac{\tang\delta(1 - \sin h)}{\cos^2 h} = \frac{\tang\delta}{1 + \sin h}$$ qui terminus nunquam evane- scit, quemcunque valorem etiam h habeat. –

In eodem hoc casu est aequatio 3. N° 3.

$$\cos\xi = \frac{\tang\delta(1 - \sin h)}{\cos h}$$ qui terminus pro $h = 90°$ manet indeter- minatus. Differentiando igitur numeratore et denominatore, erit

$\cos\xi = \tang\delta \cotang h = 0$, hinc $\sin\xi = 1$ qui valor est ma- ximus pro priori aequatione, hinc tales stellae in vertice ipso observari debent. — Si autem $\delta > \varphi$ ergo stella inter verticem et polum per Meridianum transiens, ergo ξ usque ad 180° increscere potest. In hoc casu quoque $\frac{ds}{dh}$ habebit maximum valorem si $\sin\xi = 1$ et $\cos\xi = 0$ ergo $\sin h = \frac{\sin\varphi}{\sin\delta}$ ex aequ: 3. N° 3. dum est 1. et 2. aequ: N° 3.

$$\cos s = \frac{\tang\varphi}{\tang\delta} = \tang\varphi \cotang\delta$$

$$\sin\omega = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

$$\cos\omega = \frac{\sin\varphi\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\delta}-\sin\delta}{\cos\varphi\sqrt{1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\delta}}} = \frac{\sin^2\varphi-\sin^2\delta}{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}} = \frac{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}{-\cos\varphi\sqrt{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}}{-\cos\varphi} = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

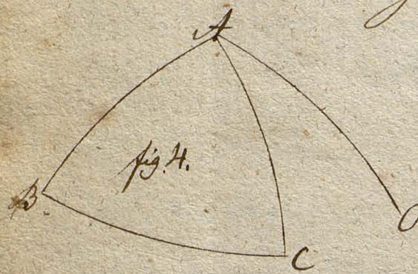
$$\frac{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = 1-\sin^2\omega$$

$$\sin^2\omega = 1-\frac{\sin^2\delta-\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\delta}{\cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{1-\sin^2\delta}{\cos^2\varphi} = \frac{\cos^2\delta}{\cos^2\varphi}$$ ergo hinc angulus horarius est ~~obtus~~ acutus et Azimuth obtusus.

Ergo declinationes australes quantum fieri potest, evitare debemus; optimum erit, stellas in vicinia primi circuli verticalis ubi $\omega=90=270$ observare; in vicinia poli semper minus accuratae sunt altitudines observatae quia ibi non multum variant stellae in altitudine. —

Nunc redibimus ad recolationem plurium problematum principalium. Datis AR et declinatione sideris, invenire longitudinem et latitudinem et vice versa. — Semper supponitur obliquitas ecliptica nota. —



Hoc problema refertur ad triangulum ALS de quo jam prius fuit sermo; ut autem accurate resolvi possit hoc problema, procedere debent rationes omnium partium hujus trianguli. — Generatim si habemus triangulum sphaericum ABC et, ex puncto A deducatur arcus AO perpendicularis ad ~~latus BC~~ et angulum OAC vocemus n Angulus A trianguli erit $90°-n$ quamdiu n minor est quam 90° vel quamdiu punctum C est in primo quadrante ang. n. eadem erit expressio pro tertio quadrante, pro quarto $A=360-n+90$ et hic ultimus valor aequatur primo quia differunt 360°. — Ut autem inveniamus aliquam generalem expressionem anguli A pro omnibus quadrantibus n, notandum est, inter tria puncta superficiei sphaericae semper existere duo triangula, nimirum primo triangulum quod semper considerari consuetum est, et alterum cujus superficies superficiem primi complet ad totam superficiem sphaerae. Nominamus hoc secundum triangulum complementum. — Ambo

trian-

Ambo triangula habent eadem latera, sed anguli unius, sunt complementa angulorum alterius ad quatuor rectos. – Expressiones trigonometricae autem sunt semper eaedem, si positis lateribus iisdem α, β, γ pro angulis A, B, C ponentur complementa 360–A, 360–B, 360–C. Si praeterea notetur haec 4 triangula pro quatuor quadrantibus ~~n~~ oriri per rotationem lateris AC circa punctum fixum A, clarum est semper comparari debere easdem ~~lineas~~ partes linearum CA, BA inter se ad definiendos angulos quos format in hac rotatione CA cum BA. – Ex hoc sequitur si in parte de BA ubi AC jacet, pars de CA ad determinationem anguli CAB electum fuerit, quae aversa est versus BA, in altera parte de BA contrariam ipsi BA partem lineae CA eligi debere ad determinationem ejusdem anguli quia nunc contraria pars arcus AC eadem est cum priori. –

Si autem in aliquo triangulo considerentur anguli, quos oppositae partes arcuum faciunt, non hoc triangulum ipsum, sed complementum consideratur. – Si ergo in triangulo in quo unus arcus est firmus reliqui duo autem mobiles in una parte arcus firmi triangulum uti solet fieri consideratur, in altera parte arcus firmi complementum considerari debet, ut revera semper idem triangulum, uti hoc uniformitas postulet, retineatur.

Secundum has considerationes sunt igitur anguli A in primo et ultimo quadrante anguli n aequales 90–n, in secundo et tertio 360–(n–90) = 90–n vel generatim 90–n est expressio universalis Anguli A pro omnibus quadrantibus.

His praemissis quilibet videt in triangulo NLS esse

LN = e inclinatio eclipticae
NS = 90 – δ
LS = 90 – β
LNS = 90 + α
NLS = 90 – λ
NSL = π



Si ergo α, δ et e sunt cogniti, habebimus

$$\tan\lambda = \frac{\sin\alpha\cos e + \tan\delta\sin e}{\cos\alpha}$$

$$\sin\beta = \sin\delta\cos e - \sin\alpha\cos\delta\sin e \quad \text{et} \quad \tan\beta = (\tan\delta\cos e - \sin\alpha\sin e)\frac{\cos\lambda}{\cos\alpha}$$

et inverse, si λ, β et e sunt nota erit

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\lambda\cos e - tg\beta\sin e}{\cos\lambda}$$

$$\sin\delta = \sin\lambda\cos\beta\sin e + \sin\beta\cos e \quad \text{et}$$

$$tg\,\delta = (\sin\lambda\sin e + tg\beta\cos e)\frac{\cos\alpha}{\cos\lambda}$$

et ad instituendum examen erit

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\beta\cos\lambda$$

Ad calculum aptiorem formam his aequationibus dare possumus, introducendo angulo auxiliario nimirum posito $tg\,m = ctg\,\delta\sin\alpha$ erit

$$tg\,\delta = \sin\alpha.\frac{\cos m}{\sin m}, \text{ ergo}$$

$$tg\,\lambda = \frac{\sin\alpha\cos e + \frac{\sin\alpha\cos m\sin e}{\sin m}}{\cos\alpha} = \frac{tg\alpha}{\sin m}(\sin m\cos e + \cos m\sin e)$$

ex quo $tg\,\lambda = \frac{tg\alpha}{\sin m}\sin(m+e)$ et eodem modo

$$\sin\beta = \sin\delta\cos e - \sin\alpha\sin e.\frac{\sin\delta\sin m}{\sin\alpha\cos m} = \text{ quia } \cos\delta = \frac{\sin\delta\sin m}{\sin\alpha\cos m}$$

$$= \frac{\sin\delta}{\cos m}(\cos e\cos m - \sin e\sin m) = \frac{\sin\delta}{\cos m}\cos(m+e)$$

et pro inverso problemate indicatur $tg\,n = \sin\lambda\,cotg\beta$ et erit

$$tg\,\alpha = \frac{tg\lambda}{\sin n}\sin(n-e)$$

35 $$\sin\delta = \frac{\sin\beta}{\cos n}\cos(n-e)$$

Pro determinatione anguli positionis erit:

$$\sin\pi = \frac{\cos\alpha\sin e}{\cos\beta} = \frac{\cos\lambda\sin e}{\cos\delta} \quad \text{vel}$$

$$cotg\,\pi = \frac{ctg\,e\cos\delta - \sin\delta\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ctg\,e\cos\beta - \sin\beta\sin\lambda}{\cos\lambda}$$

Si adhibentur aequationes celeb. Gauss, et ponitur

$90-\pi = p$, $45-\frac{1}{2}\delta = d$ et $45+\frac{1}{2}\lambda = l$, erit:

$$\sin d\sin\frac{p+\alpha}{2} = \sin l\sin(45-\tfrac{1}{2}(e+\beta))$$
$$\sin d\cos\frac{p+\alpha}{2} = \cos l\cos(45-\tfrac{1}{2}(e-\beta))$$
$$\cos d\sin\frac{p-\alpha}{2} = \cos l\sin(45-\tfrac{1}{2}(e-\beta))$$
$$\cos d\cos\frac{p-\alpha}{2} = \sin l\cos(45-\tfrac{1}{2}(e+\beta))$$

ex quibus aequationibus δ, α et π inveniri possunt et vice versa pro λ, β. —

Alia

Alia ~~problemate~~ methodus hoc problema resolvendi, est per solam trigonometriam planam. — Sint nimirum x, y, z tres rectangulares coordinatae, quae situm sideris referunt ad centrum terrae. — Linea axis x jaceat in linea aequinoctiorum et planum axium x, y sit aequator. Si idem situs etiam per tres alias coordinatas x', y', z' determinatur, quarum x' iterum in linea aequinoctiorum, $x' y'$ autem in ecliptica sunt, erit si r est distantia sideris a centro terrae:

$$x = r\cos\alpha\cos\delta \qquad x' = r\cos\beta\cos\lambda$$
$$y = r\cos\delta\sin\alpha \quad \text{et} \quad y' = r\cos\beta\sin\lambda$$
$$z = r\sin\delta \qquad z' = r\sin\beta$$

Ex his aequationibus statim sequitur (per fig. 6.)

$$x = x'$$
$$y = y'\cos e - z'\sin e$$
$$z = y'\sin e + z'\cos e \quad \text{et}$$
$$y' = z\sin e + y\cos e$$
$$z' = z\cos e - y\sin e$$

fig. 6.

$$AB = AO\cos e, \quad AO = \frac{AB}{\cos e} - OD = \frac{DS\sin e}{\cos e}$$
$$AO + OD = \frac{AB}{\cos e} + \frac{DS\sin e}{\cos e}$$
$$y' = \frac{y}{\cos e} + z'\frac{\sin e}{\cos e}$$
$$y = y'\cos e - z'\sin e \quad \text{e. s. p.}$$

Si in his ultimis aequationibus priores inventi valores substituantur erit:

$$\cos\alpha\cos\delta = \cos\lambda\cos\beta$$
$$\sin\alpha\cos\delta = \sin\lambda\cos\beta\cos e - \sin\beta\sin e$$
$$\sin\delta = \sin\lambda\cos\beta\sin e + \sin\beta\cos e \quad \text{et}$$
$$\cos\lambda\cos\beta = \cos\alpha\cos\delta$$
$$\sin\lambda\cos\beta = \sin\alpha\cos\delta\cos e + \sin\delta\sin e$$
$$\sin\beta = \sin\delta\cos e - \sin\alpha\cos\delta\sin e$$

Differentiando has ultimas aequationes respectu $\alpha, \delta, \lambda, \beta$ etc $\left(\sin\pi = \frac{\cos\alpha\sin e}{\cos\beta}\right)$ erit: v. c. differentiando aequationem $\sin\beta$

$$d\beta\cos\beta = d\delta\cos\delta\cos e - de\sin\delta\sin e - d\alpha\cos\alpha\cos\delta\sin e + d\delta\sin\alpha\sin\delta\sin e - de\sin\alpha\cos\delta\cos e$$
$$= d\delta(\cos\delta\cos e + \sin\alpha\sin\delta\sin e) - de(\sin\delta\sin e + \sin\alpha\cos\delta\cos e) - d\alpha\cos\alpha\cos\delta\sin e$$
$$= d\delta(\cos\delta\cos e + \sin\alpha\sin\delta\sin e) - de\sin\lambda\cos\beta - d\alpha\sin\pi\cos\delta\cos\beta$$

$$\cos\pi \text{ autem} = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\alpha\sin^2 e}{\cos^2\beta}} = \frac{\sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2 e}}{\cos\beta}$$

$$\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = \sin^2\delta\cos^2 e + 2\sin\alpha\sin\delta\sin e\cos e\cos\delta - \sin^2\alpha\cos^2\delta\sin^2 e$$

$$\cos\pi\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\delta\cos^2 e + 2\sin\alpha\sin\delta\sin e\cos e\cos\delta - \sin^2\alpha\cos^2\delta\sin^2 e - \sin^2 e + \sin^2\alpha\sin^2 e} =$$

$=$

$$=\sqrt{1-\sin^2 e-\sin^2\delta\cos^2 e+2\sin\alpha\sin\delta\sin e\cos e\cos\delta+\sin^2\alpha\sin^2 e(1-\cos^2\delta)}=$$
$$=\sqrt{\cos^2 e-\sin^2\delta\cos^2 e+2\sin\alpha\sin\delta\sin e\cos e\cos\delta+\sin^2\alpha\sin^2 e\sin^2\delta}=$$
$$=\sqrt{\cos^2 e\cos^2\delta+2\sin\alpha\sin\delta\sin e\cos e\cos\delta+\sin^2\alpha\sin^2 e\sin^2\delta}=$$
$$=\cos e\cos\delta+\sin\alpha\sin e\sin\delta$$

ergo $d\beta\cos\beta=d\delta\cos\pi\cos\beta-de\sin\lambda\cos\beta-d\alpha\sin\pi\cos\delta\cos\beta$

et $d\beta=d\delta\cos\pi-de\sin\lambda-d\alpha\sin\pi\cos\delta$

eodem modo invenitur

$$d\lambda\cos\beta=d\delta\sin\pi+d\alpha\cos\pi\cos\delta+de\sin\beta\cos\lambda$$

et $d\delta=d\lambda\sin\pi\cos\beta+d\beta\cos\pi+de\sin\alpha$

$$d\alpha\cos\delta=d\lambda\cos\pi\cos\beta-d\beta\sin\pi-de\sin\delta\cos\alpha$$

ex quibus expressionibus errores longitudinis et latitudinis ex datis erroribus AR et declinationis inveniri possunt.

Si priores aequationes applicentur ad aliquod sidus in ecliptica v.c. ad Solem, primae expressiones evadunt simpliciores, quia $\beta=0$. – praecipuae sunt:

1. Ex e et λ reliqua
$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\lambda\cos e$$
$$\sin\delta=\sin\lambda\sin e$$
$$\operatorname{tg}\pi=\operatorname{tg}e\cos\lambda$$
etiam ex triangulo fluunt istae formulae

2. Ex e et α
$$\operatorname{tg}\lambda=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos e}=\operatorname{tg}\alpha\sec e$$
$$\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}e\sin\alpha$$
$$\sin\pi=\sin e\cos\alpha$$

3. Ex e et δ
$$\sin\lambda=\frac{\sin\delta}{\sin e}$$
$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}e}$$
$$\cos\pi=\frac{\cos e}{\cos\delta}$$

4. Ex α et δ
$$\operatorname{tg}e=\frac{\operatorname{tg}\delta}{\sin\alpha}$$
$$\cos\lambda=\cos\alpha\cos\delta$$
$$\operatorname{tg}\pi=\frac{\sin\delta}{\operatorname{tg}\alpha}$$

Ex prima aequatione Nr. 1. sequitur, α et λ semper esse ejusdem generis; quatuor

quad-

quadrantes ecliptic et aequatoris simul incipiunt, h. e. momento, quo longitudo solis major 90° evadit, idem fit cum ascensione recta. —
Ex secunda aequatione N.1 sequitur: declinatio est vel septentrionalis vel australis, quando longitudo vel minor vel major est 180°, declinatio igitur est in primo et secundo quadrante, h. e. tempore veris et aestatis septentrionalis, tempore autumni et hiemis australis. — In utroque casu declinatio erit maxima si $\sin\lambda = \pm 1$ h. e. si $\lambda = 90°$ aut $\lambda = 270°$, in hoc casu declinatio erit aequalis obliquitati ecliptices, et deinde iterum decrescit, vel sol redit ad aequatorem. — Hae quoque est ratio, cur ista puncta, ubi longitudo solis est vel 90° vel 270° et declinatio maxima, nominantur puncta solstitialia. —
Ex tertia aequatione N. 3. sequitur: angulus positionis evanescit, si longitudo solis est vel 90° vel 270°, si autem sol est in punctis aequinoctialibus, iste angulus erit maximus, nimirum aequalis obliquitati ecliptices. etc
Priores expressiones etiam in notas series resolvi possunt. —

Tempora

Basis praecipua totius Astronomiae est doctrina de temporibus Astronomicis, et illorum mensura. Fundamentum vero in illa debet supersitum, est uniformitas motus diurni apparentis astrorum circa axem mundi. — Motus diurnus cujuslibet puncti coeli in 24 horas, vel etiam in 360 gradus dividitur. Mutatio angulorum in tempus vel inversa, temporis in angulos, tantummodo est mutatio modi dividendi, et quemque motum astri alicujus assumamus ad repraesentationem temporis, semper 24 horae hujus astri aequantur 360° ergo 1 hora = 15° etc
Tria potissimum dantur diversa tempora

Tempus verum est angulus horarius solis in tempus mutatus. Mensura anguli horarii est arcus aequatoris; sed sol non movetur in aequatore, sed in ecliptica, et etiam in hac, difformi celeritate. Ex hac ratione quoque tempus verum ipsum est aliquid difforme, et hinc ad generalem mensurans immediate non aptum. —

Ut autem tamen per solem uniformem mensuram temporis acquiramus, imaginamur nobis aliquem solem medium, qui motu uniformi in ecliptica ita movetur, ut cum sole vero simul transeat per duo puncta, ubi sol verus maximam suam et minimam habet celeritatem. — Hic sol. cujus rotatio circa terram igitur idem est cum illa solis veri, servit ad correctionem revera locum habentium difformitatum motus solis veri. Ut autem quoque istae apparentes difformitates hujus medii solis, quae oriuntur ob inclinationem orbitae versus aequatorem, removeantur, imaginamur nobis alium medium solem, qui motu uniformi in aequatore ita movetur, ut cum primo medio sole simul per puncta aequinoctialia transeat. — Tempora revolutionum horum trium solium igitur inter se sunt aequalia. —

<u>Tempus medium</u> igitur erit angulus horarius in tempus mutatus, hujus solis secundi medii. —

<u>Tempus sidereum</u> est angulus horarius in tempus mutatus medii puncti verni. —

Dies verus, medius et sidereus incipiunt, quando Sol verus, medius et punctum vernum per Meridianum transit. Duratio talis diei est intervallum inter duos subsequentes transitus. —

Dies solaris civilis a media nocte ad sequentem numeratur.

Dies solaris Astronomicus ab uno Meridie ad alterum

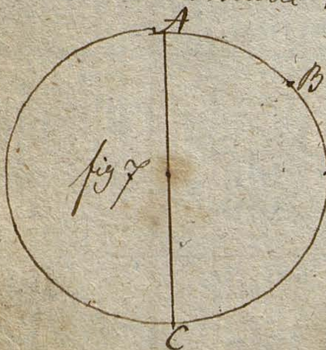
Bode Effemerid: de 1816. — Dies primi mobilis quando punct. aequinoct. vernum

Sit m dies solaris medius, s sidereus; describat Sol medius in aliquo tempore arcum μ et punctum aequinoctiale vernum eodem tempore arcum σ, dein est, quia pro aequalibus temporibus arcus se habent inverse uti tempora revolutionum

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{s}{m} \text{----(I)}$$

Si ergo ratio $\frac{s}{m}$ est nota, ope hujus aequationis, et tempus sidereum in medium et inverse mutari potest.

Sit nunc VBACV aequator, AC meridianus, B sol medius, V punctum aequinoctiale vernum (medium); S = VA sit tempus sidereum vernum pro dato momento, M = BA correspondens tempus medium, et a = VB. AR medii solis, vel quod idem est, longitudo medii solis primi, erit est



$$S = a + M$$

Si ergo pro aliquo momento a est notum, pro hoc momento

tempus

tempus sidereum inveniri potest, si medium tempus est datum, et inverse.
Ad inveniendam quovis momento quantitatem a, sit A AR medii solis pro momento medii meridiei dati diei, quae quantitas ex ephemeridibus sumi potest, ubi jam per 15 divisa sic in tempus mutata occurrit, b sit constans augmentum hujus quantitatis intra 24 horas temporis medii, dein augmentum inter M horas temporis medii erit $\frac{b}{24}M$

$$\text{ergo } a = A + \frac{b}{24}M$$

ex quo fit prior aequatio

$$M = S - a = S - A - \frac{b}{24}M \quad \text{ex quo}$$

$$(24+b)M = (S-A)24 \quad \text{et} \quad M = \frac{24}{24+b}(S-A)$$

$$\text{et} \qquad S = A + \frac{24+b}{24}M$$

his aequationibus quoque sequentem possumus dare formam:

$$\left.\begin{aligned} M &= S - A - \frac{b}{24+b}(S-A) \\ S &= A + M + \frac{b}{24}M \end{aligned}\right\} II$$

Quum autem A ex ephemeridibus qua notum supponi potest, ex his aequationibus pro quolibet dato tempore sidereo absoluto, correspondens tempus medium et inverse inveniri potest, si b est notum. Sed motus primi medii solis intra 24 horas temporis medii est $0° \, 59' \, 8''{,}33$ ergo

$$b = \frac{0° \, 59' \, 8''{,}33}{15} = 0.06571$$

et quum sit $s : m = 24 : 24+b$ erit

$$\frac{s}{m} = \frac{24}{24+b} = 0.9972695 \quad \text{et}$$

$$\frac{m-s}{m} = \frac{b}{24+b} \quad \text{et} \quad \frac{m-s}{s} = \frac{b}{24} = 0.002738$$

$$= 0.0027305$$

aequatio ~~pri~~ I ergo quoque erit

$$\mu = \sigma - \frac{(m-s)}{m}.\sigma \quad \text{vel}$$

$$\sigma = \mu + \frac{(m-s)}{s}.\mu$$

hoc est

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sigma - 0.0027305.\sigma \\ \sigma &= \mu + 0.002738.\mu \end{aligned}\right\} I'$$

et aequationes II erunt

$$\left.\begin{aligned} M &= S - A - 0.0027305.(S-A) \\ S &= A + M + 0.002738.M \end{aligned}\right\} II'$$

Si hab

Si haberemus tabulam in qua pro qualibet hora, adnotata esset quantitas 0.0027305 seu 9.''8295, pro qualibet minuto primo 0.1638, et secundo 0.0027, et his primis æquationibus I et II facile tempus medium et inverse inveniri possunt. Pro duabus aliis æquationibus, alia tabula construi posset quæ pro qualibet hora det 0.002738 = 9.''8568. Cum aliqua mutatione autem adhiberi ad hunc usum quoque potest prima tabula, si nimirum ponatur

$\frac{m-s}{m} = 0.0027305 = c$ erit

$$\frac{m-s}{s} = \frac{1}{1-c} - 1 = c + c^2 + c^3 + c^4 - - - - - - -$$

æquatio igitur $\sigma = \mu + \mu\left(\frac{m-s}{s}\right)$ ita quoque representari potest

$$\sigma = \mu + c\mu + c^2\mu + c^3\mu - - - - -$$

Ergo ex prima tabula uti prius quæritur prima correctio

$c\mu$ cum μ

dein correctio secunda $c.c\mu$ cum $c\mu$

- - - - - tertia $c.c^2\mu$ cum $c^2\mu$

et summa harum correctionum quantitati μ addita, dabit σ. —

Exempla 1.º pro æquationibus I

Sit datum tempus sidereum $\sigma = 14^h\ 3'\ 32''$, inveniatur idem intervallum in tempore medio expresso. —

14h dant	2'	17.61	
3'	- - - - - - - -	0.49	
32''	- - - - - - - -	0.09	
	2'	18''.19	quæ quantitas quoque vocatur acceleratio fixarum
σ = 14	3	32.60	
μ = 14	1	13.81	tempus medium

Et inverse $\mu = 100^h\ 24'\ 0.415$ quæratur σ

4.24h dant	15'	43''.63
4	- - - - - - - -	39.32
24' 0''.415	- - - - - - - -	3.93
	cμ = 16'	26''.88

16' dant	2''.62
26''888 - - - -	0.07
c²μ =	2''.69

2'' dant	0''.005
0''69 - - - -	0.002
c³μ =	0''.007

hinc $c\mu + c^2\mu + c^3\mu = 16'\ 29''.577$

$\mu = 100^h\ 24'\ 0.415$

$\sigma = 100^h\ 40'\ 29''.992$

pro aequationibus (II^{ae})

Sit a. 1811. 13 Septembris est pro Meridie medio

$$A = 11^h\ 25'\ 45''.696$$

Si pro hac die tempus sidereum datum

$$S = 3^h\ 2'\ 30''.426$$

dein est

$$\begin{array}{rrrr} S = & 3^h & 2' & 30.426 \\ A = & 11 & 25 & 45.696 \\ \hline & 15^h & 36' & 44''.730 \\ - & & 2 & 33.461 \\ \hline M = & 15^h & 34' & 11''.269 \end{array}$$ tempus medium.

et hae sufficient ad conversionem temporis medii in sidereum et vice versa. Aequatio temporis est differentia temporis veri et medii seu differentia ascensionum rectarum veri et secundi medii Solis in tempore seu $dt = \frac{1}{15}(\alpha' - \alpha)$ Aequatio temporis cum suo signo adplicata ad tempus verum, dat tempus medium, nimirum: $M = V \pm E$, et etiam inverse. — Aequatio temporis ex tabulis vel ephemeridibus potest calculari. Nos redibimus adhuc ad hanc materiam. — Adnotari hic debet, omnes numeros ephemeridum pro aliquo determinato loco esse calculatos v. c. pro Berolino Meridiano. Sed facile pro alio Meridiano adhiberi possunt, si nota est differentia Meridianorum, nimirum: assumptis v. c. numeris in ephemeridibus Berolinensibus uniformiter crescentibus et decrescentibus, et posito a aequali differentiae duorum subsequentium numerorum in ephemeridibus, habetur

$$x = \frac{\text{differ. Merid.}}{24} \cdot a$$

quae quantitas a numeris Berolinensibus vel subtrahatur, si isti numeri crescunt, vel inverse, ut inveniantur iidem numeri pro alio Meridiano et quidem orientaliori. —

Tantum pro luna, qui situm suum in coelo celerrime mutat, isti numeri subsequentium dierum non amplius qua uniformiter crescentes et decrescentes assumi possunt; ergo in tali casu notae methodi interpolationis adhiberi debent. Quum applicatio harum methodorum saepius occurrit, indicabo hic aliquas praecipuarum.

1. Si

1. Si haberemus seriem quantitatum

$$y, y', y'', y''' \text{ etc.}$$

quae ad analogos valores quantitatum

$$x,\ x+\Delta x,\ x+2\Delta x \text{ etc pertinent,}$$

erit valor quantitatis y, qui pertinet ad $x+n\Delta x$

$$y^n = y + n\Delta y + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 y + \ldots\ldots$$

supposito $\Delta y = y'-y$, $\Delta^2 y = y''-2y'+y$, $\Delta^3 y = y'''-3y''+3y'-y$

et generatim $\Delta^m y = y^m - my^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}y^{m-2} + \ldots\ldots$

tabula, quae valores n, $\frac{n.n-1}{1.2}$ etc continet est in ephemerid. Berol. 1779 3
(vid. q. Connaissance de tems 1820 Mathieu) construit une table de correction de secondes differences)

Ex. Quaeritur longitudo Lunae pro 24 Jun. 1810. hora 6
Ex ephemeridibus habetur

x	y = longitudo Lunae
Junii 24	$y = 15^\circ\ 5'\ 21''.0$
24	$y' = 27\ 57\ 22$
25	$y'' = 40\ 33\ 11$
26	
27	$y''' = 52\ 56\ 13$
28	$y^{IV} = 65\ 9\ 19$

ergo $\Delta y = +12^\circ\ 51'\ 1''$
$\Delta^2 y = -\ 16\ 12$ $\qquad \Delta x = 24^h$ ergo $n = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$
$\Delta^3 y = +\ 3\ 25$
$\Delta^4 y = -\ 34$

$y =$		15°	$5'$	$21''.0$
$n\Delta y = \frac{1}{4}(12^\circ\ 52'\ 11'') =$	+	3	13	0.25
$\frac{1}{4}(-\frac{3}{8})(-16'\ 12'') =$	+		1	31.13
$-\frac{3}{4.8}(-\frac{7}{3.4})(3'\ 25'') =$	+			11.21
$\frac{3.7}{4.8.3.4}(-\frac{11}{4.4})(-34'') =$	+			1.28
$y^n =$		18°	$20'$	$4''.9$ quaesita longitudo Lunae

2. Sit y aliqua functio quantitatis x. Sine cognitione hujus functionis, sint tamen aliqui singuli valores hujus quantitatis dati ita, ut v. c.

$$y = A, B, C, D \text{ etc. pro } x = \omega, a, b, c \ldots$$

nota sint. Quaeratur nunc pro quolibet alio valore quantitatis x correspondens valor quantitatis y.

Assumi potest quaesita expressio inter y et x qua aequatio alicujus curvae cujus abscissae ω, a, b, c ordinatae A, B, C, ...

Aequatio hujus curvae generatim habebit formam

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots$$

Ut autem satisfiat datis conditionibus, erit

$$A = \alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2 + \ldots$$
$$B = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \ldots$$
$$C = \alpha + \beta b + \gamma b^2 + \ldots$$

Quum autem y per x ita exprimi debet, ut y fiat aequale A, B, C ... si x aequatur ω, a, b, c ..., assumi potest

$$y = AX + BX' + CX'' + \ldots$$

ubi autem X, X', X'' ita eligi debent, ut pro $x = \omega$, fit $X = 1$, $X' = 0$, $X'' = 0$ pro $x = a$, $X = 0$ $X' = 1$, $X'' = 0$ pro $x = b$, $X = 0$, $X' = 0$, $X'' = 1$ etc.

His aequationibus autem satisfit si sumitur

$$X = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{(\omega-a)(\omega-b)(\omega-c)(\omega-d)}$$
$$X' = \frac{(x-\omega)(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-\omega)(a-b)(a-c)(a-d)}$$
$$X'' = \frac{(x-\omega)(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-\omega)(b-a)(b-c)(b-d)}$$

Substitutis his valoribus in ultima expressione pro y erit

$$y = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}{(\omega-a)(\omega-b)(\omega-c)(\omega-d)} \ldots \times A + \frac{(x-\omega)(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-\omega)(a-b)(a-c)(a-d)} \ldots \times B + \frac{(x-\omega)(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-\omega)(b-a)(b-c)(b-d)} \ldots \times C \text{ etc.}$$

Dantur quoque alii methodi sed hic sit satis, tantum has duas enumeratas esse.

Praeceptor

Præcessio et Nutatio

Jam Hipparch primus Astronomus priscis temporibus, qui vixit circa annum 140 ante Christum Alexandriæ, observavit, quum suas observationes comparavit cum illis 160 annis prius a Timochari institutis, longitudinem omnium fixarum uniformiter progrediente tempore crescere, quin latitudo aliquam mutationem subeat. – Ptolomæus, qui circa annum 130 post Christum in eadem urbe observationes instituit, assumsit hanc mutationem longitudinis æqualem uni gradui pro centum annis. – Quum ista variatio longitudinis pro omnibus stellis sit eadem et latitudo immutata maneat, hoc phænomenon per assumtionem, puncta æquinoctialia retromoveri in invariabili plano eclipticæ in 100 annis uno gradu, explicari potest, vel in directione quæ motui annuo solis opposita est. – Obliquitas eclipticæ quoque subjecta est alicui variationi, licet sit centies minor, uti etiam observationes novissimis temporibus cum prioribus comparatæ comprobant.

Tandem Bradley invenit priores enarratas uniformes variationes quoque notabilibus perturbationibus esse obnoxias, quæ autem in semper redeuntes periodos circa 18 annorum sunt inclusæ. – Prior regularis motus retrogradus, vocatur Præcessio æquinoctiorum, dein regularis ~~muta~~ ~~tio~~ variatio anguli plani æquatoris cum illo eclipticæ, Secularis imminutio obliquitatis eclipticæ, et tandem perturbationes periodicæ horum motuum Nutatio.

Ego hic tantummodo propter brevitatem temporis præscripti, notabiliora et ea adferam, quæ necessaria sunt ad calculandas observationes. – Terra nostra assumitur qua corpus ortum ex rotatione alicujus Ellipseos circa axim minorem. – Si terra esset perfecta sphæra, dein attractio, uti facile comprobari potest, cæterorum corporum coelestium in eam esset eadem, ac si tota massa in centro esset concentrata. – Quum autem sit in polis compressa sphæroidis v. c.

actio

actio solis in terram in aequatore debet producere motum, qui, cum aequator in sua intersectione cum ecliptica movetur, planum aequatoris plano eclipticae semper appropinquaret, sine mutatione ipsius intersectionis ipsius. – Inclinatio aequatoris ad eclipticam igitur per ipsam mediam actionem solis decresceret et amborum linea intersectionis esset firma, si terra nullam rotationem circa axem haberet. Cum autem haec locum habeat, haec revolutio retinet aequatoris inclinationem versus eclipticam <u>constantem</u> et transmutat actionem solis in motum retrogradum lineae intersectionis vel ~~aequatoris~~ aequinoctiorum; ipsa rotatio hinc adducit his aequinoctiis mutationem, quae sine rotatione terrae, tantum apud inclinationem locum haberet, et ipsa, hujus mutationis loco, dat inclinationi stabilitatem, quae sine rotatione in nodis locum haberet. Hic motus retrogradus aequinoctiorum, nimirum <u>Praecessio</u> dependet igitur a compressione telluris et non mutat obliquitatem eclipticae. – Quod dictum est de actione solis, valet quoque de actionibus ceterorum corporum coelestium, de quibus autem tantum Luna propter suam viciniam, aliquem notabilem influxum habet. Etiam Luna facit aequinoctia aequatoris terrestris in plano orbitae suae recedere et ambae actiones simul vocantur <u>Praecessio Lunisolaris</u>, quae secundum novissimas determinationes, quotannis 50''34 efficit. – Cum autem situs plani orbitae Lunae et inclinatio versus aequatorem mutabiles sint, actio Lunae quoque, quae alias, uti illa solis, constans esset, est variabilis. Pars constans hujus actionis Lunae in terram est praedicta Praecessio Lunisolaris, variabilis pars autem hujus actionis, quae a vario situ orbitae Lunae versus aequatorem dependet, et in redeuntibus periodis 18–6 annorum et in motum aequinoctiorum et in Mutationem obliquitatis eclipticae suum exserit influxum, vocatur <u>Nutatio</u>

Si vocemus ☊ longitudinem puncti in quo orbita Lunae eclipticam secat, et a quo puncto Luna se <u>supra</u> eclipticam elevat, h. e. si vocemus ☊ <u>nodum ascendentem</u> orbitae Lunae in ecliptica,

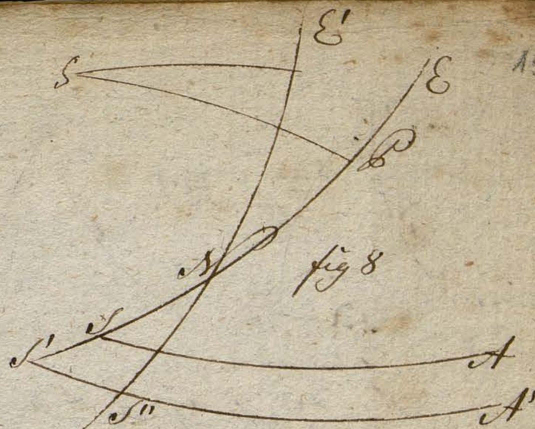
celebr-

celeberrimus Bradley invenit ex suis observationibus, Nutationem efficere motum directum aequinoctiorum, qui Sinui N C proportionalis est, et imminutionem obliquitatis eclipticae, quae Cosinui ejusdem anguli N C proportionalis est. Si ergo Sol et Luna tantum in terram agerent, inclinatio eclipticae versus aequatorem media (a periodica reddente Nutatione independens:) esset constans. Sed cetera corpora nostri systematis solaris, quorum influxus in formam terrae quidem evanescit, habent tamen notabilem influxum in situm orbitae terrae, quam planum eclipticae plano aequatoris semper adpropinquare nitantur, et hoc est prius dicta secularis imminutio obliquitatis eclipticae. Ex hoc autem mutato situ orbitae terrae sequitur autem necessarie mutatio aequinoctiorum, et quidem motus directus circa 0."16 quotannis, qua quantitate igitur, Praecessio Lunisolaris, quum habeat cum hoc motu directionem contrariam, imminui debet. Si ergo est per actionem Solis et Lunae effecta Praecessio Lunisolaris secundum priora 50."34, universalis Praecessio, vel quae revera locum habet, erit 50."18. Haec duae actiones influxus planetarum sunt igitur a compressione terrae seu ab actione Solis et Lunae in terram generatim independentes; sed cum actio Solis et Lunae, mutato per actionem planetarum situ eclipticae quoque mutari debeat, sequitur, ex hoc oriri motum aequatoris terrestris Nutationi similem, cujus valor autem multo minor et cujus periodus multo major erit, quam apud prius consideratam Nutationem lunae. – Mutatio situs eclipticae per planetas producit igitur, conjunctim cum actione Solis et Lunae in terram, in obliquitate aliquam parvam variationem, quae autem a prius considerata seculari imminutione diversa est.

Ut enucleantur omnes isti motus, adducemus aequatorem et hanc eclipticam mediam seu mobilem (: denominatio verae eclipticae retinetur pro ecliptica turbata per periodicam mutationem, a qua mutatione hic abstrahimus:) ad aliquod planum firmum, pro quo assumamus eclipticam

anno

anno 1750. — Sit ergo SE hac firma ecliptica SA situs aequatoris pro anno 1750, uti et S''E' et S'S''A situs mediae eclipticae et aequatoris pro 1750+t, ubi t est expressum in annis ejusq partibus. —



Propter solam attractionem solis et lunae in terram compressam secundum priora intersectio planorum A et E in S' recedit, quo obliquitas eclipticae non mutatur. — Hic motus retrogradus ab anno 1750 ad 1750+t vel praecessio Lunisolaris sit ψ ergo $\psi = SS'$. — Quum autem quoq planetae centrum terrae attrahant, oritur motus plani E', et ex hac ratione A ab E' semper in aliis punctis et in aliis angulis secatur quam ab E. Hac ratione productus motus retrogradus intersectionis planorum A et E' in plano E' qui praecessio universalis, sit ψ_1 ergo ψ_1 erit aequale differentiae arcuum NS'' et NS. Si Π sit longitudo nodi ascendentis plani E' in E, a fixo aequinoctio anni 1750 numerata dein est:

$$\Pi = NS \quad \text{et} \quad \Pi + \psi = NS' \quad \text{et} \quad \Pi + \psi_1 = NS''$$

Per hanc universalem praecessionem quoq obliquitas eclipticae mutatur, et haec mutatio situs eclipticae, etiam mutabit attractionem quam habent Sol et Luna in terram compressam, ex quo oritur motus plani A, qui motus generabit aliquam speciem mutationis admodum longae periodi. —

Sit quoq π angulus plani E et E' ergo $\pi = S'NS''$, ω angulus plani A et E pro tempore 1750 ergo $\omega = NSS''$, ω_1 angulus planorum A et E' pro 1750+t ergo $\omega_1 = NS''A$, et denique arcus $SS'' = \lambda$, ergo S aequinoctium medium tempore 1750; S'' aequinoctium medium tempore 1750+t, ω media obliquitas eodem tempore 1750+t. —

Ex observationibus Bradleyi, conjunctim cum illis celeberrimi Piazzi, invenit Bessel (fundamenta Astronomiae) pro ψ et ψ_1 ω et ω_1 sequentes valores pro anno 1750+t

$$\psi = 50''.43099t - 0''.00012179 45t^2$$
$$\psi_1 = 50''.176068t + 0''.0001221483t^2$$
$$\omega = 23^\circ\ 28'\ 18''.0 + 0''.00000984233t^2$$
$$\omega_1 = 23^\circ\ 28'\ 18''.0 - 0.48368t - 0.0000027229 5t^2$$

Ex



Ex his quantitatibus Π π et λ facile derivari possunt. — In triangulo $NS'S''$ nimirum est

$$\left.\begin{aligned} tg\tfrac{\pi}{2}\sin\left(\Pi+\tfrac{\psi+\psi_1}{2}\right) &= \sin\tfrac{\psi-\psi_1}{2}\, tg\tfrac{\omega_1+\omega}{2} \\ tg\tfrac{\pi}{2}\cos\left(\Pi+\tfrac{\psi+\psi_1}{2}\right) &= \cos\tfrac{\psi-\psi_1}{2}\, tg\tfrac{\omega_1-\omega}{2} \\ tg\tfrac{\lambda}{2}\cos\tfrac{\omega_1+\omega}{2} &= tg\tfrac{\psi-\psi_1}{2}\cos\tfrac{\omega_1-\omega}{2} \end{aligned}\right\}\ (1)$$

ubi Π semper debet ita sumi, ut π maneat quantitas positiva. —

Ex his aequationibus facile expressiones approximantes pro valoribus quantitatum Π. π et λ ope priorum expressionum inveniri possunt, nimirum:

Analog. Nepera

Ex trigonometria

$$tg\tfrac{C}{2}\sin\tfrac{\alpha+\beta}{2} = \sin\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cot g\tfrac{A-B}{2}$$
$$tg\tfrac{C}{2}\cos\tfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos\tfrac{\alpha-\beta}{2}\cot g\tfrac{A+B}{2}$$
$$tg\tfrac{\gamma}{2}\sin\tfrac{A-B}{2} = tg\tfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\tfrac{A+B}{2}$$

In his formulis ponatur:
$A=180-\omega_1$. $B=\omega$, $C=\pi$, $\alpha=\Pi+\psi$
$\beta=\Pi+\psi_1$ $\gamma=\lambda$, prodibunt aequationes in contextu

$$\Pi = 171^\circ\ 36'\ 10'' - 5.''18t$$
$$\pi = 0.''48892t - 0.000003019t^2$$
$$\lambda = 0.''17926t - 0.000266039t^2;$$

Indicabo breviter rationem inveniendi has quantitates ex prioribus aequationibus. —

Ultima priorum aequationum dat

$$tg\frac{\lambda}{2} = \frac{tg\frac{\psi-\psi_1}{2}\cos\frac{\omega_1-\omega}{2}}{\cos\frac{\omega+\omega_1}{2}}$$

Sed $\frac{\psi-\psi_1}{2} = 0.082t - 0.000122t^2$, $\frac{\omega_1-\omega}{2} = -0.2418t - 0.0000628t^2$

$\frac{\omega_1+\omega}{2} = 23^\circ\ 28'\ 18'' - 0.2418t + 0.0000356t^2$

Si autem omittantur tertia et altiores potentiae quantitatis t, prior aequatio erit $\frac{\lambda}{2} = \frac{0.082t - 0.000122t^2}{\cos 23^\circ\ 28'\ 18''} =$ ~~0.2418t − 0.0000628t²~~ $0.0894t - 0.000133t$

ergo $\lambda = 0.179t - 0.000266t^2$

Valores quantitatum Π et π quoque facile ex aequationibus sequentibus inveniri possunt; (posito λ jam cognito)

$$\cos\pi = \sin\omega_1\sin\omega\cos\lambda + \cos\omega_1\cos\omega \text{ et}$$

$$\sin(\Pi+\psi_1) = \frac{\sin\omega\sin\lambda}{\sin\pi}$$ ubi pro ω, λ, π et ψ_1 valores debent substitui. — Prima harum aequationum dat quoque

$$\sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\omega_1-\omega}{2} + \sin\omega_1\sin\omega\sin^2\frac{\lambda}{2}$$ nimirum

$$1-2\sin^2\frac{\pi}{2} = (\sin\omega_1\sin\omega)\left(1-2\sin^2\frac{\lambda}{2}\right) + \cos\omega_1\cos\omega = \cos(\omega_1-\omega) - 2\sin\omega_1\sin\omega\sin^2\frac{\lambda}{2} =$$
$$= 1 - 2\sin^2\frac{\omega_1-\omega}{2} - 2\sin\omega_1\sin\omega\sin^2\frac{\lambda}{2}$$ ex quo etc

~~$\sin^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\omega_1-\omega}{2} + \sin\omega_1 \sin\omega$~~

Quum autem $\sin^2\alpha = \alpha^2 \sin^2 1'' - \frac{\alpha^4}{3}\sin^4 1'' + \text{-----}$ erit

$$\pi^2 = (\omega_1-\omega)^2 + \sin\omega_1 \sin\omega\left(\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{1.2}\sin^4 1'' - \text{----}\right),$$ et si negligantur

tertiae et altiores potentiae quantitatis t, jam λ^4 erit aequalis zero, hinc

$$\pi^2 = (\omega_1-\omega)^2\left[1 + \frac{\lambda^2 \sin\omega_1 \sin\omega}{(\omega_1-\omega)^2}\right]$$ ex quo

$$\pm\pi = (\omega_1-\omega)\cdot\left[1 + \frac{\lambda^2 \sin\omega_1 \sin\omega}{2(\omega_1-\omega)^2}\text{.....}\right]$$

Sed $\omega_1 - \omega = -0.4836t - 0.0000126bt^2$; $\lambda^2 = 0.08215t^2 - 0.000095388t^2$

$\sin\omega_1 \sin\omega = 0.15863 - 0.00000085bt$ ergo

$$\pm\pi = -0.4836t - 0.0000125bt^2 - t\left[\frac{0.005100 - 0.00001515 9t}{0.9672 + 0.0000 2512t}\right]$$

vel $\pm\pi = -0.4836t - 0.000012bt^2 - t(0.005100 - 0.000015159t)\left(\frac{1}{0.9672} - \frac{0.0000 2512t}{(0.9672)^2}\right) =$

$= -0.4836t - 0.000012bt^2 - t(0.0052729 - 0.0000158t)$

vel tandem $\pm\pi = -0''.4889t + 0.0000032t^2$ et hic debet signum superius adhibere, quum π cum t crescat, ergo

$$\pi = 0.4889t - 0.0000032t^2$$ uti prius fuit indicatum

2. Cum invento valore $\lambda = 0.17926t - 0.00028660394t^2$ et $\pi = 0.48892t - 0.0000030719t^2$,

erit ex $\sin(\Pi + \psi_1) = \frac{\sin\omega \sin\lambda}{\sin\pi} = \frac{\lambda}{\pi}\sin\omega$ si altiores potentiae negligantur

$$\sin(\Pi + \psi_1) = \frac{0.17926 - 0.00028660394t}{0.48892 - 0.0000030719t}\cdot\sin\omega = (0.17926 - 0.0028660394t)\left(\frac{1}{0.48892} + \frac{0.0000030759t}{(0.48892)^2}\right)\sin\omega$$

$$= (0.17926 - 0.00028660394t)(2.045324 + 0.0000128508t)\sin\omega =$$

$$= (0.3666447 - 0.000541833 0t)\sin\omega.$$

Quum jam t^2 neglectum est, hic pro $\sin\omega$ simpliciter poni potest $\omega = 23^\circ\ 28'\ 18''$, ex quo fit

$$\sin(\Pi + \psi_1) = 0.14603295 - 0.000215809 6t.$$

(Notemus hic pro $t = 0$ $\psi_1 = 0$, ergo $\sin\Pi = 0.14603295$ ergo

$\Pi =$ vel $8^\circ\ 23'\ 49''.55$ vel $= 171^\circ\ 36'\ 10''.45$. Sed hic secundus valor sumi debet, quia tangens anguli Π est negativa, uti sequitur ex aequatione

$$tg(\Pi + \psi_1) = \frac{\sin\lambda}{\cos\omega\cos\lambda - \sin\omega\cot g\omega}$$ quae aequatio quoque ita scribi potest

$$tg(\Pi + \psi) = \frac{\sin\lambda}{\cos\omega(\cos\lambda - 1)} = -\frac{\sin\lambda}{2\cos\omega\sin^2\frac{\lambda}{2}}$$ et quum igitur haec

tangens

tangens sit negativa, Π jacet in secundo quadrante.)
Nunc sit $a = 0.14603295$, $b = 0.0002158096$, ergo
$$\sin(\Pi+\psi_1) = a - bt$$
sed $(\Pi+\psi_1)\sin 1'' = \sin(\Pi+\psi_1) + \frac{1}{6}\sin^3(\Pi+\psi_1) + \frac{3}{40}\sin^5(\Pi+\psi_1) \ldots$
$$= \left(a + \frac{a^3}{6} + \frac{3a^5}{40} + \frac{5a^7}{112} \ldots\right) - \left(1 + \frac{a^2}{2} + \frac{3a^4}{8} + \frac{5a^6}{16} \ldots\right) bt$$
$$= 0.1465570 - 1.0108363bt \text{ hinc}$$
$$\Pi+\psi_1 = \frac{0.1465570 - 0.0002181482t}{\sin 1''} \text{ et } \Pi+\psi_1 = 8^{0}\,23'\,49''.5 - 44''.9963t$$
et quum secundum priora complementum hujus anguli sumi debeat,
$$\Pi+\psi_1 = 171^{0}\,36'\,10''.5 + 44''.9963t, \text{ sed } \psi_1 = 50''.1761t, \text{ ergo}$$
$$\Pi = 171^{0}\,36'\,10''.5 - 5''.1798t$$
Si vellemus quaerere nunc mutationes, quae in longitudine et latitudine alicujus stellae per praecessionem producuntur, erit, posita tantum obliquitate eclipticae variabili
$$d\lambda = de\,tg\beta\cos\lambda, \quad d\beta = -de\sin\lambda$$
Sint nunc L et B longitudo et latitudo alicujus stellae respectu fixae eclipticae pro 1750. l et b pro variabili pro 1750+t, dein sequitur ex prioribus aequationibus differentialibus immediate
$$l = L + \pi\,tg B\cos(L-\Pi), \quad b = B - \pi\sin(L-\Pi)$$
quae aequationes longitudinem et latitudinem in variabili ecliptica pro 1750+t exprimerent, si tantum obliquitas eclipticae variabilis.
Quum autem intersectio eclipticae cum aequatore in tempore t se quoque mutavit et a S ad S'' recedebat, omnes longitudines stellarum quantitate $NS'' - NS = \psi_1$ creverunt, ergo erit
$$l = L + \psi_1 + \pi\,tang B\cos(L-\Pi)$$
$$b = B - \pi\sin(L-\Pi)$$
Sit etiam l', b' longitudo et latitudo pro ecliptica variabili pro 1750+t', dein est
$$l' = L + \psi_1' + \pi'\,tg B\cos(L-\Pi')$$
$$b' = B - \pi'\sin(L-\Pi') \text{ et differentia harum aequationum}$$
dabit, si ponatur $\Lambda = L - \frac{1}{2}(\Pi-\Pi')$
$$l' = l + (\psi_1' - \psi) + (\pi' - \pi)\,tg b\cos\Lambda, \quad b' = b - (\pi' - \pi)\sin\Lambda$$
et per has aequationes longitudo et latitudo l, b pro 1750+t ad longitudinem et latitudinem pro 1750+t' reduci possunt.

Nunc

Nunc sint α δ ascensio recta et declinatio observata alicujus astri, et si vocetur ascensio recta numerata ab intersectione planorum A et E, α+λ dein invenietur longitudo et latitudo L, B pro ecliptica fixa et pro Epocha 1750 per sequentes expressiones:

$$\cos B \cos(L+\Psi) = \cos\delta \cos(\alpha+\lambda)$$
$$(A) \quad \cos B \sin(L+\Psi) = \cos\delta \sin(\alpha+\lambda)\cos\omega + \sin\delta \sin\omega$$
$$\sin B = -\cos\delta \sin(\alpha+\lambda)\sin\omega + \sin\delta\cos\omega \qquad (L = l - \psi_1 \text{ approximate})$$

et si inverse ex longitudine et latitudine L, B, pro aliqua Epocha et pro ecliptica fixa, ascensio recta et declinatio pro quolibet alio tempore quaerenda esset, est, si pro secunda Epocha omnes quantitates cum superius applicato signo notentur:

$$\cos\delta' \cos(\alpha'+\lambda') = \cos B \cos(L+\Psi')$$
$$\cos\delta' \sin(\alpha'+\lambda') = \cos B \sin(L+\Psi')\cos\omega' - \sin B \sin\omega'$$
$$\sin\delta' = \cos B \sin(L+\Psi')\sin\omega' + \sin B \cos\omega'$$

Si ex his et prioribus aequationibus eliminentur L et B, dein oriuntur expressiones, per quas ascensio recta et declinatio pro 1750+t' invenitur, si eaedem quantitates sint datae pro 1750+t. — Si revera eliminentur istae quantitates, erit, posito $u = \Psi' - \Psi$

$$\cos\delta' \cos(\alpha'+\lambda') = \cos\delta \cos(\alpha+\lambda)\cos u - \cos\delta \sin(\alpha+\lambda)\cos\omega \sin u - \sin\delta \sin\omega \sin u$$
$$\cos\delta' \sin(\alpha'+\lambda') = \cos\delta \cos(\alpha+\lambda)\cos\omega' \sin u + \cos\delta \sin(\alpha+\lambda)[\cos\omega\cos\omega'\cos u + \sin\omega\sin\omega'] + \sin\delta(\sin\omega\cos\omega'\cos u - \cos\omega\sin\omega')$$
$$\sin\delta' = \cos\delta\cos(\alpha+\lambda)\sin\omega'\sin u + \cos\delta\sin(\alpha+\lambda)[\cos\omega\sin\omega'\cos u - \sin\omega\cos\omega'] + \sin\delta(\sin\omega\sin\omega'\cos u + \cos\omega\cos\omega')$$

Si nimirum brevitatis causa ponantur priores aequationes (A) ita

$$\cos B\cos(L+\Psi) = M$$
$$\cos B\sin(L+\Psi) = N$$
$$\sin B = P$$

ubi M, N, P quantitates notae ab α, δ, λ dependentes sunt

dein est, uti quilibet facile videbit

$$\cos B \cos L = M\cos\Psi + N\sin\Psi$$
$$\cos B \sin L = N\cos\Psi - M\sin\Psi$$
$$\sin B = P$$

hae quantitates rite substitutae dabunt aequationes adductas

Sint nunc Ψ, Ψ_1 et ω, ω' valores quantitatum Ψ et ω pro temporibus 1750+t et 1750+t', dein nota sunt in triangulo sphaerico quod formatur ob arcu $\Psi' - \Psi_1$ in fixa ecliptica existente, per arcum aequatoris in prima et in secunda Epocha, arcus $\Psi' - \Psi$ et anguli adjacentes ω' et $180-\omega$. Sit nunc latus ad ω' aequale $90+z'$, et ad $180-\omega$ aequale $90-z$ et tertius angulus

aequal

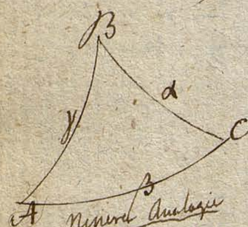
aequalis θ dein inveniuntur z z' et θ ex sequentibus aequationibus

$$tg\,\frac{z+z'}{2}=\frac{\cos\frac{\omega'+\omega}{2}}{\cos\frac{\omega'-\omega}{2}}\,tg\,\frac{\psi'-\psi}{2}$$

$$tg\,\frac{z'-z}{2}=\frac{\sin\frac{\omega'-\omega}{2}}{\sin\frac{\omega'+\omega}{2}}\,cotg\,\frac{\psi'-\psi}{2}$$

$$tg\,\tfrac{1}{2}\theta=\frac{\sin\frac{z'+z}{2}}{\cos\frac{z'-z}{2}}\,tg\,\frac{\omega'+\omega}{2}$$

Ego adducam hic figuram ut quilibet facilius perspiciat praecedentes aequationes.



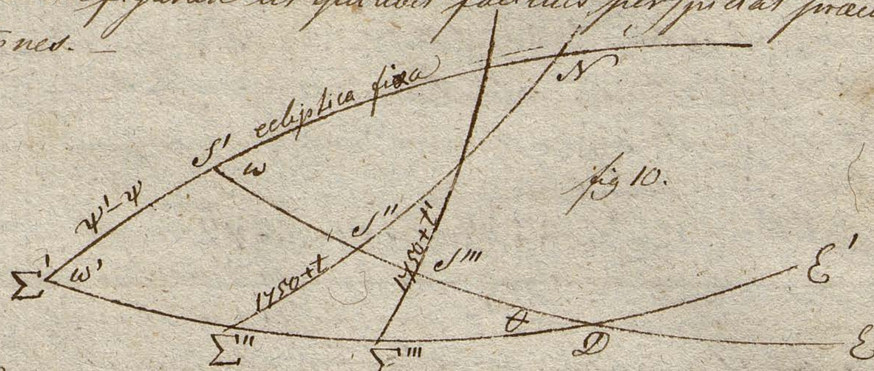
Niperi Analogie

$$tg\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\,tg\,\frac{\gamma}{2}$$

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\,tg\,\frac{\gamma}{2}$$

$$tg\,\frac{C}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\,cotg\,\frac{A-B}{2}$$

Positis hic $A=\omega'$, $B=180-\omega$, $C=\theta$, $\alpha=90-z$, $\beta=90+z$, $\gamma=\psi'-\psi$ oriuntur priores aequationes



In triangulo $S'\Sigma'D$ est $S'D=90-z$, $\Sigma'D=90+z$, $S'\Sigma'=\psi'-\psi$, $NS'D=\omega$, $N\Sigma'D=\omega'$, $S'D\Sigma'=\theta$

Notis hac ratione z, z' et θ invenitur ascensio recta et declinatio α' δ' pro $1750+t'$ ex ascensione recta et declinatione α, δ, pro $1750+t$ per sequentes prioribus analogas expressiones:

$$\cos\delta'\sin(\alpha'+\lambda'-z')=\cos\delta\sin(\alpha+\lambda+z)$$

$$\cos\delta'\cos(\alpha'+\lambda'-z')=\cos\delta\cos(\alpha+\lambda+z)\cos\theta-\sin\delta\sin\theta$$

$$\sin\delta'=\cos\delta\cos(\alpha+\lambda+z)\sin\theta+\sin\delta\cos\theta$$

(quoque ex figura). Vid. Bessel fund. Astron. et Annalen Bohnenberger des Wien St. S. B.

Si $t'-t$ non est magnum, aequationes $tg\,\frac{z'-z}{2}$ etc simplicius ita exprimi possunt

$$tg\,\frac{z'+z}{2}=\cos\omega\,tg\,\frac{\psi'-\psi}{2}$$

$$z'-z=\frac{\omega'-\omega}{\sin\omega\,tg\,\frac{\psi'-\psi}{2}}$$

$$tg\,\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{z'+z}{2}}{\cos\frac{z'-z}{2}}\,tg\,\omega.$$

et aequationes quoque $\cos\delta\sin(\alpha'$ ..... alio modo exprimi possunt:

Sit $tg\,m=\frac{tg\,\delta}{\cos(\alpha+\lambda+z)}$, dein est

$$\cos\delta'\sin(\alpha'+\lambda'-z')=\cos\delta\sin(\alpha+\lambda+z)$$

$$\cos\delta'\cos(\alpha'+\lambda-z')=\frac{\sin\delta\cos(m+\theta)}{\sin m}$$

$$\sin\delta'=\frac{\sin\delta\sin(m+\theta)}{\sin m}$$ et s. p.

Ad inveniendas mutationes in Ascensione recta et declinatione erit:

$$\partial\alpha = \frac{\partial\lambda \cos\pi \cos\beta}{\cos\delta} - \partial e \,\mathrm{tg}\,\delta \cos\alpha \quad \Big\}\ \text{ex prioribus}$$
$$\partial\delta = \partial\lambda \sin\pi \cos\beta + \partial e \sin\alpha$$

vel

$$\partial\alpha = \partial\lambda(\cos e + \sin e \,\mathrm{tg}\,\delta \sin\alpha) - \partial e \,\mathrm{tg}\,\delta \cos\alpha \quad \Big\}\ \text{si pro } \cos\pi \text{ et } \sin\pi \text{ ponantur valores; etiam jam habuimus}$$
$$\partial\delta = \partial\lambda \sin e \cos\alpha + \partial e \sin\alpha$$

ergo quoque est

$$\partial\alpha = \partial\psi(\cos\omega + \sin\omega \,\mathrm{tg}\,\delta \sin\alpha) - \partial\omega \,\mathrm{tg}\,\delta \cos\alpha$$
$$\partial\delta = \partial\psi \sin\omega \cos\alpha + \partial\omega \sin\alpha$$

et hae essent mutationes in ascensione recta et declinatione, supposito novam ascensionem esse sumptam a puncto S. Quum autem debeat sumi a puncto S", α debet augeri quantitate λ vel poni aequalis $\alpha+\lambda$. Quum praeterea $\partial\omega$ respectu $\partial\psi$ est admodum parvum, erit

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t}(\cos\omega + \sin\omega \,\mathrm{tg}\,\delta \sin\alpha)$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t} \cdot \sin\omega \cos\alpha$$

posito nunc brevitatis causa

$$m = -\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\cos\omega$$
$$n = \frac{\partial\psi}{\partial t}\sin\omega$$

erit

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = m + n \,\mathrm{tg}\,\delta \sin\alpha$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial t} = n\cos\alpha$$

et haec sunt annuae mutationes in ascensione recta et declinatione quae producuntur a praecessione.

Si ~~pro~~ derivantur ex prius datis valoribus quantitatum ψ, ω, et λ coëfficientes differentiales $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ etc erit pro anno 1750+t

$$m = 45.99592 + 0.0003086450\,t \quad \text{et}$$
$$n = 20.05039 - 0.0000970204\,t$$

Secundum novissimas observationes et calculos celeb. Bessel erit pro Epocha anni 1800

$$m = 46.01135 + 0.000308645 \cdot t$$
$$n = 20.04554 - 0.0000970204 \cdot t$$

Priores expressiones pro $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ et $\frac{\partial\delta}{\partial t}$ sufficiunt pro omni casu, ubi differentia temporum non est admodum magna.

Exemp

Exempl. Aldebaran (α Tauri) dat pro anno 1800

$\alpha = 66^\circ 7'$ $\delta = 16^\circ 6'$ $t = 50$

$m = 46.011$ $n = 20.045$

$\frac{d\alpha}{dt} = 51.30$ $\frac{d\delta}{dt} = 8.''11$

Si vellemus in determinatione Praecessionis respicere quoq membra, quae dependent a quadrato temporis, sint α, δ AR et Decl. pro tempore T, et α', δ' pro tempore $T+t$.

His suppositis erit

$$\alpha' = \alpha + t \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \ldots\ldots$$
$$\delta' = \delta + t \cdot \frac{d\delta}{dt} + \frac{t^2}{1.2} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \ldots\ldots$$

ubi secundum praecedentia est:

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n \,tg\delta \sin\alpha$$
$$\frac{d\delta}{dt} = n \cos\alpha$$

ergo est, si hae expressiones differentientur

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{dm}{dt} + \sin\alpha \,tg\delta \frac{dn}{dt} + mn \cos\alpha \,tg\delta + n^2 \sin 2\alpha \,tg^2\delta + \tfrac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha$$
$$\frac{d^2\delta}{dt^2} = \cos\alpha \frac{dn}{dt} - mn \sin\alpha - n^2 \sin^2\alpha \,tg\delta$$

ubi $\frac{dm}{dt} = 0.0003086450$

$\frac{dn}{dt} = -0.0000970204.$

Nunc transeamus ad Nutationem

Hi huc usq considerati, cum tempore progredientes, vel saltem in admodum longas periodos inclusi motus puncti aequinoctialis et obliquitatis eclipticae, sunt adhuc alii perturbationi, nutationi subjecti, quae in tempore 18.6 annorum circa redit. Quum autem Nodi orbitae Lunae in ecliptica in hoc plano totam peripheriam in eadem periodo percurrunt, jam prioribus temporibus auspicarunt, has perturbationes dependere aliqua ratione a situ horum Nodorum. – Ex magno numero ad hunc finem factarum observationum invenit Bradley, per Nutationem punctum vernum progredi, ergo longitudinem Stellarum crescere quantitate, quae Sinui longitudinis Nodi ascendentis orbitae Lunae in ecliptica proportionalis est, et in suo maximo aequatur 18" et obliquitatem

et obliquitatem eclipticae quoque variationem subire, quae cosinui hujus anguli aequalis est, et in suo maximo 9".65 aequatur, latitudinemque stellarum immutatam manere. Ex hac sequitur Nutationem habere fundamentum in variatione aequatoris circa hic fixam assumptam eclipticam, vel axem terrae describere in periodo 18.6 annorum in se ipsam redeuntem lineam in superficie coeli, quanquam, uti constantia altitudinum poli omnium locorum indicat, illa semper idem punctum superficiei terrae occupat. Per sequentem hypothesin hic motus enucleari potest. — Imaginamur nobis per polos aequatoris circulum circa polos eclipticae, cujus distantia a polo igitur obliquitati eclipticae erit aequalis. — In hoc circulo movetur polus aequatoris quantitate quotannis 50" ab ortu occasum versus. Per hanc assumtionem ergo longitudo astrorum quovis anno hac quantitate crescit, latitudo autem vel locus polorum eclipticae manet immutata. Et hoc est Praecessio, quae, uti prius dictum fuit, praesertim ex actione solis et lunae in terram compressam oritur. —

Alia ratio, actio planetarum in orbitam terrae, centro hujus circuli, nimirum polo eclipticae, dat aliquem parvum motum circa polum aequatoris, per quid iste circulus semper imminuitur, ergo potissimum latitudo astrorum mutatur et declinatio constans manet. — Haec hypothesis explicat prius consideratam saecularem imminutionem eclipticae, quae igitur ex aliquo motu polorum eclipticae circa quiescentes polos aequatoris oritur. —

Longitudo et latitudo, ascensio recta et declinatio, quae referuntur ad correctum tantum per praecessionem punctum vernum, et ad tantum per saecularem imminutionem correctam obliquitatem eclipticae referuntur, vocantur medii.

Quum Nutatio, uti prius dictum est, latitudinem stellarum non mutat, ea oritur ex aliquo motu aequatoris circa quam fixam assumtam eclipticam, uti praecessio. Imaginamur nobis punctum superius considerati circuli (cujus polus quiescens, polus eclipticae est.),

ubi est polus aequatoris qua centrum alicujus ellipseos, cujus axis major $2h = 19''.30$ circulum latitudinis tangit, et axis minor $2q = 14''.36$ ad hunc circulum latitudinis perpendicularis est. Centrum ellipseos est medius polus aequatoris, et longitudo veri poli, qui est in peripheria hujus ellipseos determinatur sequenti ratione. Describitur in plano ellipseos, circulus, cujus centrum est centrum ellipseos, et cujus radius est semiaxis major h ellipseos, et supponatur radius hujus circuli moveri motu uniformi circa suum centrum in directione, quae contraria est annuo motui solis, ita, ut hic radius cum dimidio axi majori quod maxime propinqua est eclipticae, tum coincidit, si nodus ascendens orbitae Lunae in ecliptica cum puncto verno coincidit. Si deinde ex puncto extremo hujus radii ad axim majorem ellipseos demittatur perpendiculum, punctum intersectionis hujus perpendiculi cum peripheria ellipseos, erit locus veri poli aequatoris, et hic motus veri poli in sua ellipsi circa medium polum, declarat Nutationem. —

Quum secundum hanc hypothesin, axis major ellipseos in coluro solstitiorum jaceat, angulus quem radius mobilis cum linea nodorum orbitae lunae eo tempore facit, ubi iste radius cum axi majori ellipseos coincidit, erit rectus, et quum et motus istius radii et motus medii nodi lunae sit uniformis, et in eadem directione progreditur, clarum est, hunc angulum in tota revolutione radii manere angulum rectum, h. e. radium cum semiaxi majori quod maxime vicina est eclipticae, formare angulum, qui aequalis ☊☾ vel aequalis longitudini Nodi ascendentis orbitae lunae in ecliptica est. — Sit ergo z hoc perpendiculum ab extremo puncto radii ad axim majorem, et y, pars hujus perpendiculi inter axim majorem et arcum et tandem x pars axis majoris inter perpendiculum et centrum ellipseos, erit

$$\frac{z}{x} = \text{tang.}\ ☊☾$$

et, si A est angulus, quem radius ellipseos, h. e. linea quae verum polum aequatoris cum medio conjungit, cum axi majori format, dein est:

$$\text{tg}\,A = \frac{y}{x} \quad \text{ergo quoque} \quad \text{tg}\,A = \frac{y}{z}\,\text{tg}\ ☊☾$$

et quum $\frac{y}{z} = \frac{q}{h}$, erit $\text{tg}\,A = \frac{q}{h}\,\text{tg}\ ☊☾$, hinc

x —

$$x = h\cos \text{☊☾} \quad \text{et} \quad y = x\,tg A = g \sin \text{☊☾}$$

Si nunc conjugantur extrema puncta lineæ y cum polo eclipticæ, oritur triangulum sphæricum, in quo duo latera sunt y et x+e, si e est media obliquitas eclipticæ. In hoc triangulo est hypothenusa aequalis verae obliquitatis eclipticæ e+de et hypothenusæ adjacens angulus aequalis quæsitæ mutationi puncti aequinoctialis $\partial\lambda$. – Erit igitur

$$\cos(e+\partial e) = \cos y \cos(x+e) \quad \text{et}$$
$$tg\,\partial\lambda = \frac{tg\,y}{\sin(x+e)}$$

Quum autem x, y et de tantummodo parvos habeant valores, pro prioribus aequationibus poni potest

$$\partial e = x$$
$$\partial\lambda = \frac{y}{\sin e} \quad \text{ergo est, si priores valores}$$

quantitatum x et y substituantur

$$\partial e = h\cos \text{☊☾} = 9.6'' \cos \text{☊☾}, \quad \partial\lambda = -g\frac{\sin \text{☊☾}}{\sin e} = -18.03 \sin \text{☊☾}$$

si $e = 23^\circ 28'$ est,

Ut ex his inventis quantitatibus $\partial\lambda$, ∂e, inveniatur quoque Nutatio in ascensione recta et declinatione $\partial\alpha$ et $\partial\delta$, redire iterum debemus ad priores aequationes differentiales, in quibus autem $\partial\beta = 0$ poni debet, invenitur hac ratione, si quoque pro $\partial\lambda$ et ∂e ponantur valores.

$$\partial\alpha = -g\frac{\sin \text{☊☾}}{\sin e}\cdot\frac{\cos\pi\cos\beta}{\cos\delta} - h\cos \text{☊☾}\cdot\frac{\sin\delta\cos\alpha}{\cos\delta}$$
$$\partial\delta = -g\frac{\sin \text{☊☾}}{\sin e}\cdot\sin\pi\cos\beta$$

sed secundum priora quoque est

$$\cos\pi\cos\beta = \cos e\cos\delta + \sin e \sin\delta \sin\alpha$$
$$\sin\pi\cos\beta = \sin e\cos\alpha \quad \text{ergo}$$

$$\partial\alpha = -g\sin \text{☊☾}\, ctg\, e - (h\cos\alpha\cos \text{☊☾} + g\sin\alpha\sin \text{☊☾})\,tg\,\delta$$
$$\partial\delta = -g\sin \text{☊☾}\cos\alpha + h\cos \text{☊☾}\sin\alpha$$

et hæ ultimæ aequationes continent Mutationem ascensionis rectæ et declinationis vel quantitates $\partial\alpha$ et $\partial\delta$, quæ cum suis signis ad mediæ ascensiones rectas et declinationes addi debent ut veræ, seu uti vocantur, apparentes ascensiones rectæ et declinationes obtineantur. Hæ expressiones plures admittunt transformationes quarum hic duas adferam

1. Si ponatur $\mathcal{Q} = g\sin\alpha\,tg\,\delta + g\,ctg\,e$, $\mathcal{Q}' = -g\cos\alpha$, $q = h\cos\alpha\,tg\,\delta$ $q' = h\sin\alpha$

In F est polus aequatoris, π polus eclipticæ. DE = z, EF = y, CE = x, $tg\,K = \frac{z}{x}$. $tg\,A = \frac{y}{x}$, $tg\,A = \frac{y}{z}\,tg\,K$

$x = a\cos K$, $y = x\,tg\,K = g\sin K$

Nunc non amplius πACB est colurus, sed πF.

$e+\partial e = \pi F$, $F\pi C = \partial\lambda$

$\cos(e+\partial e) = \cos(e+x)\cos y$

$tg\,\partial\lambda = \frac{tg\,y}{\sin(x+e)}$

$\cos e - \partial e\sin e = (\cos e - x\sin e)\cos y$

sed $\cos y = 1$ ergo $\partial e = x$ et

$\partial\lambda = \frac{y}{\sin(x+e)} = \frac{y}{\sin e}$

$\partial\lambda$ debet esse cum signo – quia longitudines in I et II quadrante per Nutationem imminuit

et queratur $\quad \mathrm{tg}\,B = \frac{q}{Q} \quad \mathrm{tg}\,B' = \frac{q'}{Q'} \quad b = -\frac{Q}{\cos B} \quad b' = \frac{Q'}{\cos B'}$

erit

$$\partial\alpha = b\sin(B+\Omega)$$
$$\partial\delta = b'\sin(B'+\Omega)$$

nimirum

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{h\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta}{g\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta + g\,\mathrm{ctg}\,e}\;, \quad \cos B = -\frac{Q}{b}$$

$$\cos B = -\frac{g\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta + g\,\mathrm{ctg}\,e}{b} \qquad b\sin B = -h\cos\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta \quad \text{hinc}$$

$$\partial\alpha = -g\sin\Omega\,\mathrm{ctg}\,e + b\sin B\cos\Omega - g\sin\alpha\sin\Omega\,\mathrm{tg}\,\delta =$$
$$= \sin\Omega(\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta + g\,\mathrm{ctg}\,e) + b\sin B\cos\Omega =$$
$$= -\sin\Omega . Q + b\sin B\cos\Omega . Q = b\cos B\sin\Omega + b\sin B\cos\Omega . Q$$
$$= b\sin(B+\Omega)$$ eadem ratione pro $\partial\delta$

Hae formulae sunt admodum simplices, ad eam hic quoque quantitates constantes $\log . g = 0.85612$, $\log . h = 0.98453$ et $g\,\mathrm{ctg}\,e = 16''.54$ etiam facile possunt construi tabulae.

2\. Si ponatur

$$x = g\sqrt{1+\left(\frac{h^2}{g^2}-1\right)\cos^2\Omega}$$
$$\mathrm{tg}\,y = \frac{\left(1-\frac{h}{g}\right)\sin\Omega\cos\Omega}{1-\left(1-\frac{h}{g}\right)\cos^2\Omega} \quad \text{et}$$
$$z = -g\,\mathrm{ctg}\,e\,\sin\Omega$$

erit

$$\partial\alpha = -x\,\mathrm{tg}\,\delta\cos(\Omega+y-\alpha) + z$$
$$\partial\delta = -x\sin(\Omega+y-\alpha)$$

et hae expressiones sunt potissimum aptae ad construendas tabulas Nutationis admodum simplices.

Proprie sunt huc usque dati valores quantitatum $\partial\lambda$ et de tantum praecipuae expressiones nutationis longitudinis stellarum et obliquitatis eclipticae. Theoria ostendit, expressionem totam nutationis dependere a longitudine solis et lunae, et expressionem proprie esse

$$\partial\lambda = -18''.03\sin\Omega - 1.13\sin 2\odot - 0.22\sin 2☾$$
$$de = 9.65\cos\Omega + 0.49\cos 2\odot + 0.09\cos 2☾ - 0.09\,2\Omega$$

ubi $\odot$ et ☾ sunt longitudo solis et lunae. Pro usu sunt ex his membris, exceptis iis jam prius consideratis, et a simplici angulo Ω pendentibus, tantum ea notatu digna, quae a dupla longitudine Solis dependent. Nutatio solaris in ascensione recta et declinatione, quae ex terminis

$$\partial\lambda = -g'\sin 2\odot$$
$$de = -h'\cos 2\odot \quad \text{constat} \quad \text{ubi } g' = 1.13\,,\ h' = 0.49$$

invenitur

invenitur si in prioribus expressionibus quantitatum $d\alpha$ et $d\delta'$ pro g ponatur $g'\sin e$, pro h, h' et pro angulo dC angulus $2C$.

Invenitur hac ratione, si ponatur $R = g'\sin e \sin\alpha \,tg\,\delta + g'\cos e \ldots R' = -g'\sin e\cos\alpha$

$r = h'\cos\alpha\, tg\,\delta \ldots r' = -h'\sin\alpha \ldots tg\,C = \frac{r}{R} \quad tg\,C' = \frac{r'}{R'}$

$c = -\frac{R}{\cos C} \qquad c' = \frac{R'}{\cos C'}$

Prius jam satis enucleatum est, quomodo ex Nutatione longitudinis et obliquitatis eclipticae, mutatio in ascensione recta et declinatione derivari potest, tantum aliqua adhuc adferam.

Ex prioribus constat

$$tg\,\alpha = \frac{\cos\beta\sin\lambda\cos\omega - \sin\beta\sin\omega}{\cos\beta\cos\lambda}$$

$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\omega + \sin\beta\cos\omega$$

ubi ω est obliquitas eclipticae, λ, β, longitudo et latitudo R. Si nunc λ et ω per nutationem transeunt in $\lambda+d\lambda$ et $\omega+d\omega$, transeat α et δ in $\alpha' = \alpha + d\alpha$, $\delta' = \delta + d\delta$; quaeruntur α' et δ'

Secundum Mathesin est in tali casu

$$\alpha' = \alpha + \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)d\lambda + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right)d\lambda^2 + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)d\omega + \left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda\, d\omega}\right)d\lambda\, d\omega + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\alpha}{d\omega^2}\right)d\omega^2 \text{ et}$$

$$\delta' = \delta + \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right)d\lambda + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\delta}{d\lambda^2}\right)d\lambda^2 + \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right)d\omega + \left(\frac{d^2\delta}{d\lambda\, d\omega}\right)d\lambda\, d\omega + \left(\frac{d^2\delta}{d\omega^2}\right)d\omega^2$$

sed, uti ex aequationibus prioribus facile invenitur, est

$$\left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right) = \cos\omega + \sin\alpha\, tg\,\delta\sin\omega \qquad \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right) = -\cos\alpha\, tg\,\delta$$

$$\left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right) \sin\omega\cos\alpha \qquad \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right) = \sin\alpha$$

praeterea

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda^2}\right) = \left(\frac{d\alpha}{d\lambda}\right)\cos\alpha\, tg\,\delta\sin\omega + \left(\frac{d\delta}{d\lambda}\right)\frac{\sin\alpha\sin\omega}{\cos^2\delta} = \sin^2\omega\left(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + ctg\,\omega\cos\alpha\, tg\,\delta + \sin 2\alpha\, tg^2\delta\right)$$

$$\left(\frac{d^2\alpha}{d\lambda\, d\omega}\right) = -\left(\frac{d.\cos\omega}{d\omega}\right) + \left(\frac{d.\sin\alpha}{d\omega}\right) tg\,\delta\sin\omega + \left(\frac{d.tg\,\delta}{d\omega}\right)\sin\alpha\sin\omega + \left(\frac{d.\sin\omega}{d\omega}\right)\frac{\sin\alpha}{cotg\,\delta} =$$

$$= -\sin\omega + \left(\frac{d\alpha}{d\omega}\right)\cos\alpha\, tg\,\delta\sin\omega + \left(\frac{d\delta}{d\omega}\right)\frac{\sin\alpha\sin\omega}{\cos^2\delta} + \frac{\cos\omega\sin\alpha}{ctg\,\delta} =$$

$$= -\sin\omega\left(\cos^2\alpha - ctg\,\omega\sin\alpha\, tg\,\delta + \cos 2\alpha\, tg^2\delta\right)$$

Si ita progredimur, habebimus

$$\alpha' - \alpha = \left(\cos\omega + \sin\omega\sin\alpha\, tg\,\delta\right)d\lambda - \cos\alpha\, tg\,\delta.\, d\omega + \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + ctg\,\omega\cos\alpha\, tg\,\delta + \sin 2\alpha\, tg^2\delta\right)\tfrac{1}{2}\sin^2\omega\, d\lambda^2$$
$$-\left(\cos^2\alpha - ctg\,\omega\sin\alpha\, tg\,\delta + \cos 2\alpha\, tg^2\delta\right)\sin\omega.\, d\lambda\, d\omega - \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha\, tg^2\delta\right)\tfrac{1}{2}.\, d\omega^2$$

et

et

$$\delta' - \delta = \sin\omega \cos\alpha . d\lambda + \sin\alpha d\omega - \sin\alpha(\mathrm{ctg}\,\omega + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\tfrac{1}{2} d\lambda^2 \sin^2\omega$$
$$+ \cos\alpha(\mathrm{cotg}\,\omega + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)\sin\omega . d\lambda d\omega - \cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta . \tfrac{1}{2} d\omega^2$$

Si in his expressionibus pro $d\lambda$ et $d\omega$ inventi valores substituuntur, habebimus quaesitam Nutationem. —

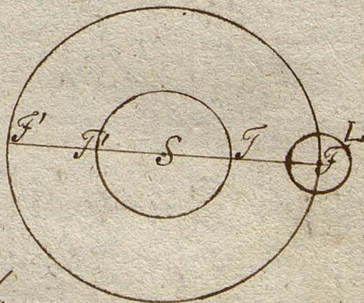
Pro Praecessione aequinoctiorum quoq valent istae expressiones, si pro $d\lambda$, $d\omega$ ponantur sequentes approximati valores, nimirum est secundum Bessel $d\lambda = 50.3405 - 0.0002436t$, $d\omega = +0.0001968t$ ubi t numerus annorum. —

Aberratio

~~Aliud~~ phaenomenon non minus notatu dignum est Aberratio; hoc phae~~nomenon~~ consistit in id, ut omnia sidera quotannis describere videantur ellipses parvas plus vel minus excentricas, neq conservare suum respectivum locum.

Hoc phaenomenon facile explicatur per rotationem terrae circa solem et per intervallum temporis, quod requiritur, ut lumen ab astro perveniat ad oculum nostrum. Per observationes nimirum, quae nobis notae sunt, inventum est, lumen indigere 8' 13''.2 ad percurrendum semi axin majorem orbitae telluris.

Ut autem quilibet rationem intelligat, sit S sol, TT' orbita terrae, FF' orbita Jovis. Si terra est in T et Jupiter in F, hic planeta erit in oppositione et multo propinquior terrae quam si esset in conjunctione, h. e. si existente Jove in F terra esset in T'. Si hoc statu circumstantiarum calculatur immersio vel emersio alicujus satellitis et comparatur hoc resultatum calculi cum phaenomeno hoc observato, innotescit differentia et quidem apparet hoc phaenomenon tardius 16' 26''.4 tempore conjunctionis quam tempore oppositionis; concluditur igitur, lumen percurrere semi axin majorem orbitae terrae in 493''.2. ——



Posito hoc, si terra et aliquod astrum lucens supponuntur in quiete in spatio, nos videbimus hoc astrum secundum directionem radii, qui imaginem hujus astri nobis adducit; sed si terra percurrit ecclipticam in anno sidereo, et igitur circum 20."25 in 493."2 temporis, haec sua celeritas comparari potuerit cum illa luminis; igitur quoq; si radius lucis alicujus astri pervenerit ad oculum nostrum, posito astro quiescente, propter motum terrae, astrum jam videbitur in alio loco et oculus habebit sensationem compositam, quae repraesentatur per resultantem harum celeritatum, et quae quoq; facit, ut videamus astrum in directione hujus resultantis. — Angulus quem facit resultans celeritatis terrae et luminis cum hac, mensurat effectum totalem Aberrationis. Planum hujus anguli describit hac ratione quotannis circumferentiam totam circa rectam quae jungit terram et astrum; et hoc est istud phaenomenon peculiare. — Positio apparens alicujus astri igitur, nihil aliud est, quam sua positio vera affecta Aberratione, uti positio vera nihil aliud quam positio media correcta per Nutationem. — Nunquam confundi debet positio ~~apparens~~ producta per Parallaxin cum positione apparente resultante Aberratione, neque cum illa, in qua Refractio locum habet.

Ex hoc explicato phaenomeno Aberrationis lucis astrorum sequitur, nos debere sumere ad determinationem graphicam aberrationis resultantem ex motu annuo terrae sive respectu ad motum proprium astrorum, in recta, quam describit particula lucis, duas lineas, quae sint inter se in ratione celeritatum lucis ad celeritatem terrae in orbita, et in his lineis superstruere parallelogrammum, nam diagonalis hujus parallelogrammi est directio secundum quam oculus videt astrum, et angulus quem haec diagonalis facit cum radio visuali ~~objecto~~ ducto ad verum locum astri, est absoluta aberratio luminis proveniens ex rotatione terrae. Locus apparens alicujus fixae semper praecedit vero loco hujus stellae. —

Propter immensam distantiam in qua nos sumus respectu stellarum fixarum, rectae ductae ex una harum ad omnia puncta terrae orbitae possunt assumi qua lineae parallelae; consequenter diagonalis paral-

lelogr.

parallelogrami aberrationis, describit in quovis anno siderco superficiem conicam, cujus axis, qui se movet sibimet ipsi paral-lela directione, est directio primitiva luminis, et basis hujus coni est curva situata in plano parallelo orbitae terrae. —

Elementum essentiale ad resolvendum problema Aberrationis, est ratio celeritatis luminis ad illam terrae. Sic nos scimus, lumen percurrere semi axem majorem orbitae terrae, seu mediam distantiam terrae a sole in 493.″2 et terra describit hoc eodem tempore motu suo medio arcum 20.″25 et hac esset sua celeritas si orbita esset circulus; sed arcus dS quem describit tempore dt habet formam sequentem $dS = (dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 dv^2 + dr^2)^{\frac{1}{2}}$ (ex Mechanica) ubi r est radius vector et v est angulus, quem facit hic radius cum axi quantitatis x.

Praeterea $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)} = a(1-e^2)[1+e\cos(v-\pi)^{-1}]$

ubi a est semiaxis major orbitae telluris $e = 0.0168$ ratio excen-tricitatis ad hanc rectam et π angulus, quem linea absidum facit cum axe x. Sic propter parvitatem hujus excentricitatis sufficit retinere primam potentiam quantitatis e, vel quod revenit ad idem, parvisculum arcum dS considerare qua cir-cularem. Ergo erit ratio celeritatis terrae ad illam luminis pro-xime repraesentata per $ds = \frac{dS}{a} = \frac{rdv}{a}$

Sed scimus quoque (Poisson tom I p. 355)

$$r^2 dv = abndt$$

ubi b est semiaxis minor orbitae terrae, et $andt$ sinus motus in tempore dt, ergo erit celeritas terrae, illa luminis pro unita-te accepta,

$$ds = \frac{rdv}{a} = \frac{bndt}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}[1+e\cos(v-\pi)] =$$

$$= \frac{andt}{a(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}[1+e\cos(v-\pi)] =$$

$$= \frac{20.''253}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}(1+e\cos(v-\pi)) = 20.''253(1+e\cos(v-\pi))$$

(: $b = a\sqrt{1-e^2}$ .. arcus ndt est reductus ad minuta secunda, in qua reductione $T = 365.2563$ arcus hic aequatur $\frac{2\pi dt}{T}$. R radius quoque R in minuta secunda mutatus :)

Si nunc distantia terrae a Sole assumatur qua unitas, et distantia alicujus planetae repraesentatur per D, tempus quo indiget lux a planeta ad nos, erit $t = 493.2 D$; hic autem semper supponitur motus lucis uniformis.

Hoc posito, sit m motus geocentricus alicujus planetae in 1" h. e. arcus, quem describit in longitudine vel latitudine, in Ascensione recta vel declinatione inter unitatem temporis; ejus motus igitur in tempore $493.''2 D$ erit $493.''2 mD$ et hoc est mensura generalis ejus Aberrationis. Si dein est A' ejus locus apparens, A ejus locus verus, erit:

$$A' = A - 493.''2 mD$$

Pro sole, cujus apparens longitudo sit $\odot'$ et longitudo vera $\odot$, facta abstractione ab excentricitate orbitae telluris erit

$$\odot' = \odot - 20.''25$$

quia $D = a = 1$ et $m = \frac{2\pi R''}{24.3600\, T}$

Aberratio Solis est fere constans; si ergo necessarius est ad calculum locus verus hujus astri, uti hoc locum habet in calculis locorum geocentricorum planetarum, tantummodo addere debemus $20.''25$ loco Solis ex tabulis seu ephemeridibus.

Nunc exprimamus analytice variationes in Ascensione recta et declinatione, promanantes ex phenomeno Aberrationis.

Radius sphaerae coelestis in quam projicimus omnia astra, potest arbitrarie assumi; supponamus aequalem radio vectori r terrae. Supponamus praeterea, istum radium repraesentare celeritatem lucis, in hoc casu parallelogrammum Aberrationis se extendet necessario usque ad regionem stellae, quam consideramus, et extremitas diagonalis, quae ibi est situata, indicabit nobis quolibet epocha anni locum apparentem hujus stellae. Cum autem haec diagonalis non multum differt a distantia r, repraesentari potest per $r + dr$.

His positis, adducamus positionem stellae ad tres coordinatas rectangulares x, y, z, quarum x et y sint in plano aequatoris coelestis, initium coordinatarum sit centrum terrae et axis x sit linea aequinoctiorum, dum erit

$$x = r\cos A\cos D$$
$$y = r\sin A\cos D \quad \text{-----} (a)$$
$$z = r\sin D \qquad \text{ex quo}$$

$$tg A = \frac{y}{x}\ ,\quad x^2+y^2+z^2 = r^2 \text{ ------ } (b)$$

Transitus nunc ex loco vero ad apparentem fiet, si faciamus variare omnia haec elementa; differentiando igitur aequationes (b), erit

$$dA = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\cdot \cos^2 A\,.$$
$$r\,dr = x\,dx + y\,dy + z\,dz \text{ ----- } (c)$$

Sit nunc ds arcus parvus, quem terra describit in 493".2, et sint α, β, γ anguli quos facit hoc elementum cum axibus coordinatarum, habebimus, transferendo hunc motum in regionem stellae

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha\,,\quad \frac{dy}{ds} = \cos\beta\,,\quad \frac{dz}{ds} = \cos\gamma \text{ ---- } (d)$$

Multiplicando et dividendo per ds membrum secundum primae aequationis differentialis (c) erit

$$dA = \frac{ds}{x}(\cos\beta - \cos\alpha\, tg A)\cos^2 A$$

tandem eliminando quantitatem x, erit Aberratio in ascensione recta,

$$dA = \frac{ds}{r\cos D}(\cos\beta\cos A - \cos\alpha\sin A) \text{ --- } (1)$$

Tertia aequatio (a) differentiata, dat, si eodem modo procedimus

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dr}{ds}\sin D + \frac{r}{ds}\cos D\, dD$$

ex quo

$$dD = \frac{\frac{dz}{ds} - \frac{dr}{ds}\sin D}{\frac{r}{ds}\cos D} = \frac{ds}{r\cos D}\left(\cos\gamma - \frac{dr}{ds}\sin D\right)$$

Sed secunda aequatio differentialis (c) potest quoque ita scribi

$$\frac{dr}{ds} = \frac{x\,dx}{r\,ds} + \frac{y\,dy}{r\,ds} + \frac{z\,dz}{r\,ds}$$

hoc est respectu aequationis (a) et (d)

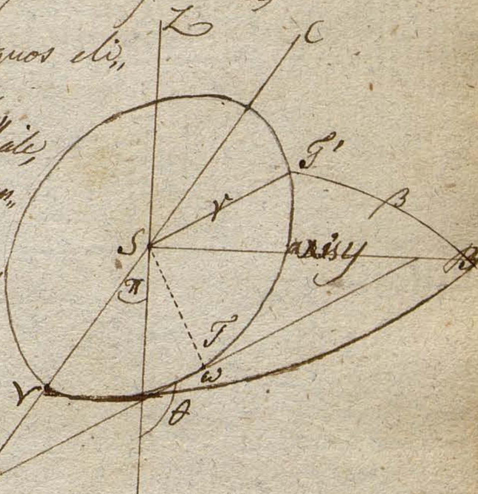
$$\frac{dr}{ds} = \cos\alpha\cos A\cos D + \cos\beta\sin A\cos D + \cos\gamma\sin D.$$

tandem

tandem substituendo hunc valorem in expressione pro dD, erit pro
aberratione in declinatione:

$$dD = \frac{ds}{r}\cos\gamma\cos D - \frac{ds}{r}\sin D(\cos\alpha\cos A + \cos\beta\sin A) \ldots (2)$$

Hae formulae (1) et (2) includunt adhuc angulos α, β, γ, quos eli-
minare debemus. Ad hoc faciendum, sit ΥBC aequator,
$\Upsilon TT'$ ecliptica, S sol, T terra Υ punctum aequinoctiale
TR ad orbitam terrae tangens, ST' parallela ad hanc tan-
gentem, ω obliquitas $T\Upsilon B$ eclipticae, X, Y, Z tres
axis per centrum solis transeuntes et respective paral-
leles ad axes x, y, z transeuntes per centrum terrae.



Triangulum sphaericum $\Upsilon BT'$, in quo $\Upsilon T = \alpha$,
$BT' = \beta$, $\Upsilon B = 90$. dat

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\omega$$

Triangulum interceptum inter T', Υ et punctum
quo axis Z occurrit superficiei coelestis dat

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\omega$$

Substituendo hos valores in formulis (1) et (2) erit

$$dA = \frac{ds}{r\cos D}(\sin\alpha\cos\omega\cos A - \cos\alpha\sin A) \ldots (1')$$

$$dD = -\frac{ds}{r}(\cos\alpha\cos A\sin D + \sin\alpha\cos\omega\sin A\sin D - \sin\alpha\sin\omega\cos D) \ldots (2')$$

Restat adhuc, eliminare angulum α. h.e. angulum quem facit tangens
puncti orbitae terrae cum axi quantitatis x.
Ad hoc efficiendum, sit θ angulus quem facit tangens, de qua agitur
cum linea apsidum, seu cum axi majore orbitae terrestris. In hoc casu
erit $tg\,\theta = \frac{dy''}{dx''}$ si x'' et y'' sint coordinatae heliocentricae terrae
relatae ad axes orbitae, et

$$x'' = r\cos(v-\pi) \qquad y'' = r\sin(v-\pi) \quad \text{ergo}$$

$$tg\,\theta = \frac{dy''}{dx''} = \frac{dr\sin(v-\pi) + r\,dv\cos(v-\pi)}{dr\cos(v-\pi) - r\,dv\sin(v-\pi)}$$

praeterea cum sit $\quad r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\pi)}$

erit $\quad dr = \frac{ae(1-e^2)\,dv\sin(v-\pi)}{1+e\cos(v-\pi)^2}$

et $\quad tg\,\theta = \frac{e+\cos(v-\pi)}{-\sin(v-\pi)}$

nimirum

nimirum $\quad tg\theta = \frac{\sin(v-\pi) + \frac{dr}{r\,dv}\cos(v-\pi)}{\cos(v-\pi) - \frac{dr}{r\,dv}\sin(v-\pi)}$

et pro $\frac{dr}{r}$ ponendo valorem. —

Sint nunc quoque δ angulus normalis terrae cum radio vectore, dein

erit $\quad \alpha = \theta + \pi, \quad \delta = v + 90 - \alpha = v - \pi + 90 - \theta$

hinc secundum Trigonometriam $tg\delta = tg(v - \pi + 90 - \theta)$

$$tg\delta = \frac{tg(v-\pi)\,tg\theta + 1}{tg\theta - tg(v-\pi)} = \frac{e\sin(v-\pi)}{1 + e^2\cos(v-\pi)}$$

ex quo $\delta = e\sin(v-\pi) - \frac{1}{2}e^2\sin 2(v-\pi)$ ......

hinc $\quad \alpha = 90 + v - e\sin(v-\pi)$

Advotari potest, v esse longitudinem heliocentricam terrae, π longitudinem perihelii. — Sit nunc $\odot$ longitudo Solis et Π longitudo perigei,

ergo erit $\quad \odot = 180 + v, \quad \Pi = 180 + \pi$

hinc $\quad \alpha = \odot - 90 - e\sin(\odot - \Pi)$

et $\quad \sin\alpha = -\cos\odot - e\sin(\odot - \Pi)$
$\quad\quad \cos\alpha = \sin\odot - e\cos\odot\sin(\odot - \Pi)$

et formulae (1') et (2') transibunt in sequentes:

Aberratio in AR $= -\frac{20''.25}{\cos D}(\cos\omega\cos A\cos\odot + \sin A\sin\odot + e\cos\omega\cos A\cos\Pi + e\sin A\sin\Pi)$ .. (1)

Aberratio in declinat. $= -20''.253\sin D(-\cos\omega\sin A\cos\odot + \cos A\sin\odot - e\cos\omega\sin A\cos\Pi + e\cos A\sin\Pi$
$\quad\quad - 20.253\cos D(\sin\omega\cos\odot + e\sin\omega\cos\Pi)\,)$ --- (2)

Propter parvitatem excentricitatis orbitae coelestis, Astronomi in usu negligunt omnes terminos, qui dependent ab hac excentricitate. Hae duae formulae datae sunt a Delambre.

Neglectis igitur terminis multiplicatis in e, et ponendo pro ω valorem quem habuit obliquitas anno 1810 erit

Aberratio in AR $= -(18''.580\cos A\cos\odot + 20''.255\sin A\sin\odot)\sec\odot$ ..... (1'')

Aberratio in declinat. $= -(20''.255\cos A\sin\odot - 18.580\sin A\cos\odot)\sin D - 8''.0659\cos\odot\cos D$ ... (2'')

0. 84
19. 42
20. 26

et ut aptae reddantur ad constructionem tabularum, erit:

$$\text{Aberratio in AR} = -\frac{19''.42\cos(A-\odot) - 0''.84\cos(A+\odot)}{\cos D}$$

19. 42
0. 84
18. 58

Aberratio in declinat. $= [19''.42\sin(A-\odot) - 0''.84\sin(A+\odot)]\sin D - 8''.07\cos\odot\cos D$. —

Si decli

Si declinatio est australis, assumi debet negativa, dein Sin D erit quantitas negativa, Cos D positiva; vel si volumus considerare declinationem australem qua positivam, signum secundi termini Aberrationis in declinatione debet emutari, h. e. debet scribi + 8."07 Cos ⊙ Cos D. —
Rotatio terrae circa axem quoq producit Aberrationem diurnam, quam vero hic negligimus propter suam parvitatem. (Delambre)
Etsi tabulae generales Aberrationis et nutationis magnam habeant utilitatem, tamen complures Astronomi construxerunt tabulas particulares pro magno numero stellarum. Delambre in sua Astronomia tom 3 enucleavit principia, secundum quae La Caille, recentibus temporibus autem Gauss et B. Zach construxerunt suas tabulas speciales. Cagnoli publicavit a. 1804 tales tabulas pro 500 stellis. — Etiam in opere periodico Connaissance de tems pro 1812 occurrunt tabulae Aberrationis, Nutationis et Praecessionis, calculatae per Burckhardt, et adaptatae ad 36 stellas quibus Astronomi potissimum utuntur. Tandem eodem anno publicavit B. Zach tales tabulas pro 1400 stellis. Methodus est explicata in Astronomia celeb. Lalande XVIII libro. — Nos aliqua adferemus,
Scribamus formulam Aberrationis in AR et declinatione ita:

$$dA = -20.''255 \sin A \sin \odot \left[1 + \frac{18.580}{20.''255} \cot g A \, tg \odot\right] \sec D$$

et faciamus $\frac{18.580}{20.255} ctg A = tg\,\theta$

erit $dA = -20.255 \sin A \sin \odot \sec D \left[1 + tg\,\theta \, ctg \odot\right] =$

$$= -20.255 \sin A \sec D \sin(\theta + \odot) =$$

$$= + \frac{20.255 \sin A \sec D \sin(180 + \theta + \odot)}{\cos\theta}$$

Ex hoc quoq videmus, factorem $\frac{20.255 \sin A \sec D}{\cos\theta}$ repraesentare maximam Aberrationem in ascensione recta, et ad inveniendam actualem Aberrationem nos debere ad argumentum tabularum, nimirum ad $6^s + \theta$ addere locum solis pro dato die, dein multiplicare per sinum hujus novi argumenti maximam Aberrationem. —
Eodem modo decomponitur formula Aberrationis in Declinatione, venit

$$dD = -20.''255 \cos A \sin \odot \sin D \left[1 - \frac{(18.''580 \sin A \sin D - 8.''0659 \cos D)}{20.''255 \cos A \sin D} \cot g \odot\right]$$

Sit iterum $\pm \frac{18.''580 \sin A \sin D - 8.''0659 \cos D}{\pm 20.''255 \cos A \sin D} = tg\,\theta'$

(: Signum superius habet locum pro declinationibus borealibus, inferius pro australibus:)

erit $dD = -20''.255 \cos A \sin \odot \sin D (1 - \operatorname{tg} \odot' \operatorname{ctg} \odot) = -\frac{20''.255 \cos A \sin D}{\cos \odot'} \sin (180 - \odot' + \odot)$

$= + \frac{20''.255 \cos A \sin D}{\cos \odot'} \sin (180 - \odot' + \odot)$

ubi iterum factor $\frac{20''.255 \cos A \sin D}{\cos \odot'}$ est maxima Aberratio in Declinatione. Si igitur ad argumentum tabularum $6^s - \odot'$ celeb. Zach addatur longitudo Solis pro die proposito, et sinus hujus novi argumenti multiplicatus per maximam Aberrationem, productum erit actualis Aberratio in declinatione, pro ambobus casibus valet igitur eadem regula; neq dubium esse potest quoad signum totius resultati si tantummodo habetur cura sinui argumenti dare signum positivum aut negativum, quaut argumentum est vel minus vel majus duobus rectis.

Aliqua quoad constructionem harum tabularum quoad Nutationem. Nostrae prius allatae formulae, possunt quoq ita scribi, si substituantur valores numerici, et pro α scribitur A, pro δ, D

$$dA = -9''.648 \cos A \operatorname{tg} D \cos \mathcal{N} \left[1 + \frac{(16''.5441 \pm 7''.1822 \sin A \operatorname{tg} D)}{9''.648 \cos A \operatorname{tg} D} \operatorname{tg} \mathcal{N}\right]$$

ponamus nunc

$$\frac{16.5441 \pm 7.1822 \sin A \operatorname{tg} D}{\pm 9''.648 \cos A \operatorname{tg} D} = \operatorname{ctg} \varphi$$

pro declinationibus borealibus signum superius, pro contrario inferius, erit

$$dA = \mp 9''.648 \cos A \operatorname{tg} D \cos \mathcal{N} (1 + \operatorname{ctg} \varphi \operatorname{tg} \mathcal{N}) = \mp \frac{9.648 \cos A \operatorname{tg} D}{\sin \varphi} \sin (\varphi + \mathcal{N});$$

et pro aliqua stella boreali

$$dA' = \frac{9.648 \cos A \operatorname{tg} D}{\sin \varphi} \sin (6^s + \varphi + \mathcal{N})$$

et pro aliqua stella australi

$$dA' = \frac{9.648 \cos A \operatorname{tg} D}{\sin \varphi} \sin (\varphi + \mathcal{N})$$

Ergo multiplicando maximam Nutationem $\frac{9.648 \cos A \operatorname{tg} D}{\sin \varphi}$ in ascensione recta per signum argumenti tabularum $(6^s + \varphi)$ plus longitudine nodorum Lunae pro dato die, productum dabit Nutationem quaesitam. Formula Nutationis in declinatione est

$$dD' = \pm 9''.648 \sin A \cos \mathcal{N} \mp 7''.1822 \cos A \sin \mathcal{N}$$

Deinde

Decomponendo hanc expressionem in duos factores, erit

$$dD' = \pm 9''.648 \sin A \cos \mathcal{R} \left(1 - \frac{7''.1822 \cot A}{9''.648 \sin A} tg \mathcal{R}\right)$$

sit $\frac{9''.648 tg A}{7''.1822} = tg \varphi'$

erit $dD' = \pm 9''.648 \sin A \cos \mathcal{R} (1 - \cot \varphi' tg \mathcal{R}) =$

$$= \pm \frac{9.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(\varphi' - \mathcal{R}) = \mp \frac{9.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(\mathcal{R} - \varphi')$$

ergo pro borealibus stellis

$$dD' = + \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(6^s - \varphi' + \mathcal{R})$$

et pro australibus

$$dD' = + \frac{9''.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(12^s - \varphi' + \mathcal{R})$$

Regula igitur secundum quam determinatur Nutatio in declinatione est eadem, uti precedens.

Notandum autem est, quaecunq sit stella, pro qua tabula particularis sit construenda, semper debemus curare ut argumentum sit positivum. Igitur, quia signum anguli φ' dependet a signo $tg \varphi'$. semper modificari debet formula. — Hinc generatim erit:

$$dD' = + \frac{9.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(12^s - \varphi' + \mathcal{R}) \text{ pro stella australi}$$

si autem angulus φ' esset negativus

$$dD' = \frac{-9''.648 \sin A}{\sin \varphi} \sin(\varphi' + \mathcal{R})$$

et ut sit factor $\frac{9.648 \sin A}{\sin \varphi'}$ positivus, debemus scribere

$$dD' = \frac{+9.648 \sin A}{\sin \varphi'} \sin(6^s + \varphi' + \mathcal{R})$$

hac ratione et argumentum tabulae $6^s + \varphi'$ et logarithmus factoris erunt positivi.

Exemplum formare secundum methodum praecedentem, tabulam particularem Aberrationis et Nutationis pro stella polari, ad initium anni 1825. — Positio media polaris ad initium anni 1825

$\mathcal{A} = 14° \; 13' \; 7''$ variatio annua $= 216''.47$

$D. = 88 \; 20 \; 55$ - - - - - - — $= 19. \; 4$

et ex hac

et ex hoc

1825 $A = 14° \; 31' \; 10''$ — $D = 88° \; 22' \; 30''$

1830 $A = 14 \; 49 \; 10$ — $D = 88 \; 24 \; 10$

Argumentum Aberrationis in A

log const = 9.9625135
log ctg A = 0.5867343
log tg θ = 0.5492478 $\quad \theta = 74° \; 14' \; 30''$ (+180) = $254° \; 14' \; 30'' = 8^s \; 14° \; 15'$

c. cos θ = 0.5658777
sin A = 9.3991691
c. cot D = 1.5473275
log const = 0.1364409
lg = 1.6428152 ——————— 1.64282

Pro β Ursae minoris calculus est idem, tantum hoc discrimine, quod non addantur angulo θ 180°

Argumentum Aberrationis in D

log const = 9.9625131
log tg A = 9.4132657
log. primi term = 9.3757788 +

log const = 9.6001206
c. cos A = 0.0140966
cot D = 8.4528472
log. secundi term = 8.0670644

hinc primus terminus = + 0.23756
secundus ——— = − 0.01167
tg θ' = 0.22589

log tg θ' = 9.353897
θ' = −12° 43' 45'' (+180°)
167° 16' 15'' = $5^s \; 17° \; 16'$

c. cos θ' = 0.0108049
l. cos A = 9.9859034
l. sin D = 9.9998253
log const = 1.3065322
lg = 1.3030658 ——————— 1.30307

Pro β ursae minoris, primus et secundus terminus sunt positivi, sumi debet supplementum ad 360° anguli θ, ad formationem argumenti tabulae.

Argumentum Nutationis in A

log const = 9.8718202
tg A = 9.4132657
lg. 1. term = 9.2850859

log const = 0.2342032
c. cos A = 0.0140966
ctg D = 8.4528472
lg 2. term = 8.7011470

1. terminus = 0.192790
2 - - - - - = 0.050251
ctg φ = 0.2430041   log. cotg φ = 9.3856778
φ = 76° 20' 25"
180
256° 20' 25" = 8s 16° 20'

c. sin φ = 0.0124587
l. cos A = 9.9859034
l. tg D = 1.5471528
l. const = 9.8083460
lg = 1.3538609 - - - - - - - - - - - - - 1.35386.

Pro β ursæ minoris secundus terminus est negativus, et non additur 180° ad angulum φ.

Argumentum Nutationis in D

log const = 0.1281798
log tg A = 9.4132657
lg φ' = 9.5414455   φ' = 180 − 19° 11' 0" = 160° 49' 0" = 5s 10° 49'

c. sin φ' = 0.4833431
sin A = 9.3991691
log const = 0.9844373
lg = 0.8669495 - - - - - - - - - - - - - 0.86695

Pro β Ursæ minoris sumitur supplementum ad 360° anguli φ' et hac ratione constructæ sunt tabulæ. B. Zach.

Calculus positionis apparentis stellarum et earum transitus per Meridianum tempore sidereo.

Exemplum Determinare positionem apparentem α Aquilæ pro 1. Julii 1812 pro Meridiano Pario

Per tabulas particulares L. B. Zach

Aberratio in A (in temp.)
⊙ = 3s 9° 23'
11s 6° 28   log const = 0.1286
Arg 2s 15° 51'   log. sin arg = 9.9868 +
+ 1".30   9.1154

Aberr. in D
⊙ = 3s 9° 23'
8s 23° 5'   log const = 1.0213
Arg = 0. 2° 28'   log sin Arg = 8.6454 +
+ 0".47   9.6667

Nutatio in A (in temp.)
☊ = 5s 1° 31'
6 2 14   log const = 0.0171
arg = 11s 3° 45'   log sin Arg = 9.6464 −
− 0".46   9.6638

Nutatio in D
☊ = 5s 1° 31'
8 10 32   log const = 0.9658
1s 12° 3'   log sin Arg = 9.8266
+ 6".20   0.7924

Ascens. med. 1 Julii 1812 = $19^h\ 41'\ 37''.85$ D. eadem $8^\circ\ 22'\ 58''.6$
Aberratio = + 1.30 Aberratio + 0.5
Nutatio = − 0.46 Nutatio + 6.2

Ascensio apparens = $19^h\ 41'\ 38''.69$ Decli. app. = $8^\circ\ 23'\ 5''.3$

Enucleato hac ratione usu tabularum particularium, facilis est quoque usus tabularum generalium. Nos quoque in prelectionibus practicis habebimus exempla.

Ad transmutandam positionem apparentem in mediam, aberratio et nutatio debet sumi signo contrario. —

Ascensio recta apparens, quoque exprimit tempus siderale, seu tempus transitus per Meridianum inferiorem. —

Si vellemus deducere quoque Aberrationem in longitudine et latitudine stellarum, illa sequuntur facile ex prioribus formulis, si ponimus $\omega = 0$ et revera si coincidant plana aequatoris et eclipticae, ascensio recta transit in longitudinem λ, et declinatio in latitudinem β erit igitur:

$$\text{Aberratio in longit.} = -\frac{20''.253}{\cos\beta}\cos(\odot-\lambda)$$

$$\text{Aberratio in latitud.} = -20''.253 \sin\beta \sin(\odot-\lambda)$$

Si supponitur

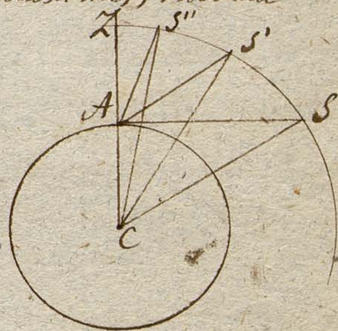
$$\frac{X}{\cos\beta} = -\frac{20''.253}{\cos\beta}\cos(\odot-\lambda), \qquad Y = -20''.253 \sin\beta \sin(\odot-\lambda)$$

ex quo $X^2 \sin^2\beta + Y^2 = (20''.253 \sin\beta)^2$

et haec est aequatio ellipseos aberrationis, vel orbitae apparentis stellae reductae ad axes rectangulares; ubi semiaxis major 20,253 et minor $20''.253 \sin\beta$ (Adnotentur quaedam)

Parallaxis.

Distantia quae nos separat a stellis, est sic magna, ut rectae di-
ductae ex una harum ad centra terrae et solis non facturi sint angulos
sensibiles; et hic angulus est, quem Astronomi designant no-
mine parallaxis annuae; stellae fixae, etiam ut maximae, nullam
habent parallaxin.

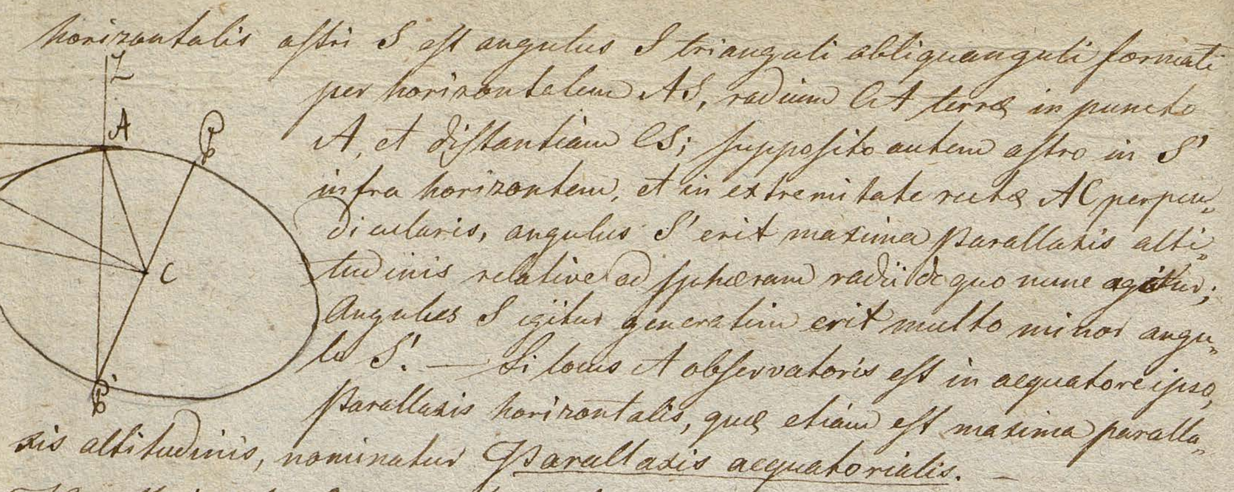


Supponamus observatorem in A, in superficie
sphaerica terrae et consideramus Solem S ad hori-
zontem sensibilem AS; parallaxis horizontalis hu-
jus astri erit angulus ASC; sed si Sol est ele-
vatus supra horizontem, uti in S' angulus AS'C
erit ~~angulus~~ parallaxis altitudinis, quae uti quilibet videt,
est multo minor quam prior, supposito SS' esse partem arcus di-
urni, vel hujus, quem describit sol in sua praesentia supra hori-
zontem. Ergo parallaxis altitudinis decrescit progressive a hori-
zonte, ubi est maxima, usque ad Zenith ubi est aequalis zero.
Ejus effectus est in plano verticali et contrarius refractioni,
h.e. nos videbimus astrum minus elevatum quam si nos esse-
mus in centro terrae, et quidem quantitate aequali parallaxi.
Terra nostra recedit et accedit continuo Soli, ergo quoque paral-
laxis solaris horizontalis, neque habebit valorem constantem;
valor medius est 8."5. Parallaxis Lunae est multo major, est
nimirum saepius major uno gradu.

In casu terrae ellipticae, non debemus semper confundere parallaxin hori-
zontalem cum maxima parallaxi altitudinis uti hoc in superiori hypothesi
permissum est.

Nimirum pro observatore in A i meridiano elliptico PA, parallaxis

horiz.

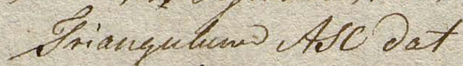


horizontalis astri S est angulus S trianguli obliquanguli formati per horizontalem AS, radium CA terræ in puncto A, et distantiam CS; supposito autem astro in S' infra horizontem, et in extremitate rectæ AC perpendicularis, angulus S' erit maxima parallaxis altitudinis relative ad sphæram radii de quo nunc agitur; Angulus S igitur generatim erit multo minor angulo S'. — Si locus A observatoris est in aequatore ipso parallaxis horizontalis, quæ etiam est maxima parallaxis altitudinis, nominatur Parallaxis aequatorialis. —

Parallaxis ascensionis rectæ, declinationis, longitudinis, latitudinis non existerent, si maxima parallaxis altitudinis esset aequalis zero. Totum dependet ab eo, quod nimirum radius terrestris est comparabilis cum distantia terræ ab astro, vel quod idem est, quia duo observatores unus in centro alter in superficie terræ, astrum non referunt ad idem punctum coeli. Locus stellæ visus ex centro vocatur locus verus, ex superficie, locus apparens. —

Parallaxis declinationis est igitur differentia inter declinationem veram et apparentem, idem de parallaxi ascensionis rectæ ceterarumque. Prius diximus, parallaxin altitudinis astri esse angulum, sub quo nobis apparet ex centro hujus astri radius terræ, ductus ad locum observatoris. — Hæc parallaxis est functio distantiæ quantitatis apparentis et parallaxis horizontalis. —

Sit Π hæc parallaxis horizontalis, π parallaxis altitudinis, ρ radius terræ suppositæ sphæricæ, Z distantia zenithalis ZAS astri S observata, N distantia zenithalis ZCS geocentrica, r distantia rectilinea CS. —



Triangulum ASC dat

$$\frac{\sin \pi}{\sin Z} = \frac{\rho}{r}$$

Si astrum est in horizonte, $\sin Z = \sin 90°$ et

$$\sin \Pi = \frac{\rho}{r} \quad \text{hinc}$$

$$\sin \pi = \sin \Pi \sin Z$$

pro Sole valor quantitatis Π non est major 9," ergo pro Sinu potest poni arcus, ergo: $\pi = \Pi \sin z$ .... (1)

h. e. Parallaxis altitudinis est aequalis parallaxi horizontali, multiplicatae per Sinum distantiae zenithalis apparentis. —

Si vellemus Parallaxin altitudinis in functione distantiae zenithalis, deberemus in formula (1) substituere pro Z suum valorem $N+\pi$, dein haberemus $\sin\pi = \sin\Pi \sin(N+\pi)$

et decomponendo secundum membrum

$$\sin\pi = \sin\Pi \sin N \cos\pi + \sin\Pi \cos N \sin\pi \quad \text{ex quo}$$

$$tg\,\pi = \frac{\sin\Pi \sin N}{1 - \sin\Pi \cos N}$$

et resolvendo in seriem et in minuta secunda

$$\pi = \Pi \sin N + \frac{\Pi^2}{2} \sin 1'' \sin 2N + \ldots$$ (Delambre prima vice Puissant p. 104 T. 1.)

Ad ostendendum quomodo procedendum quoad parallaxin in calculis Astronomicis. Sit S locus verus, S' locus apparens centri solis (prior figura) $N = ZCS$ distantia vera a zenith, $r = S'AS$ refractio vera, π parallaxis ASC astri S, dein est

$$ZAS = ZCS + ASC = N + \pi$$

sed quum refractio elevet objecta, seu quod idem, imminuat eorum distantiam a zenith, erit:

$$ZAS' = ZCS' + AS'C = ZCS - S'CS + AS'C \quad \text{ex quo}$$

$$Z = N - r + \pi \quad (\text{ponendo } s = S, \; S'AS = S'CS)$$

et reciproce $N = Z + r - \pi$. —

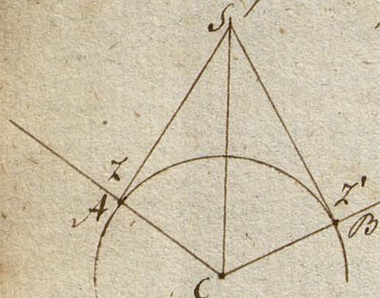
Ergo 1. Distantia apparens a zenith, observata in superficie telluris, aequalis est distantiae verae geocentricae, diminutae per refractionem et auctae per parallaxin. —

2. Distantia vera geocentrica est contrarie aequalis distantiae apparenti observatae in superficie, auctae per refractionem et diminutae

per

per parallaxin. Effectus parallaxis, oppositus huic refractionis, hinc est detrusio astrorum in suis verticalibus respectivis. —

Unum ex mediis, quae possunt applicari ad determinationem parallaxis horizontalis Solis, est sequens: Supponamus duos observatores, quorum quilibet, unus in hemisphaerio boreali, alter in australi, sed sub eodem meridiano, eodem die observant distantiam Zenithalem Solis meridianam; Z et Z' sint distantiae observatae, H et H' latitudines notae locorum observationum A et B; dein erit secundum priora



$$\pi = \Pi \sin Z, \qquad \pi' = \Pi \sin Z'$$

Sed in quadrilatero ACBS, summa omnium angulorum aequatur quatuor rectis, habebimus, sub hypothesi, latitudines esse diversae denominationis

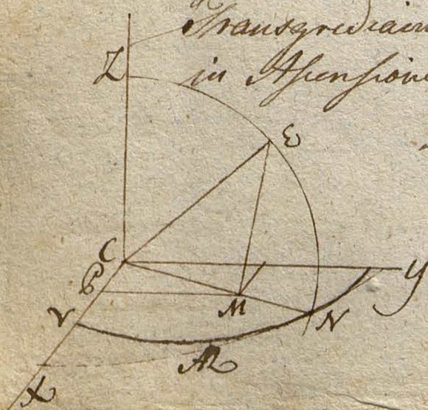
$$\Pi(\sin Z + \sin Z') + H + H' + 360° - (Z+Z') = 360°$$

ex quo parallaxis horizontalis

$$\Pi = \frac{Z+Z'-H-H'}{\sin Z + \sin Z'} = \frac{Z+Z'-H-H'}{2\sin\left(\frac{Z+Z'}{2}\right)\cos\left(\frac{Z-Z'}{2}\right)}$$

Hac methodo usi sunt Lalaille in promontorio Bonae spei et Lalande Berolini ad determinationem parallaxeos lunae. Sed, ipsi Astronomi non erant praecise sub eodem Meridiano, uti nos supposuimus, hoc tamen non impediebat, quin possint suas observationes comparare, quum in calculum sumserint motum lunae in declinatione, pro intervallo temporis correspondente differentiae Meridianorum. Dantur quoque aliae methodi determinandi parallaxin horizontalem planetarum, quas autem hic, propter brevitatem temporis nihil adferre possum. — (Tabulae Delambri)

Transgrediamur nunc ad disquisitionem formularum parallaxis in Ascensione recta et declinatione, et quidem disquisitionem analyticam. — Sit centrum terrae C origo coordinatarum axium quart. x, y, z; x transit per aequinoctium vernum, x y in aequatore, et axis z transit per polum borealem aequatoris; positio puncti E in spatio erit nota per suas distantias ab his tribus axibus



h. e

h.e. per rectas CP, PM, et ME. —

Sint hinc x, y, z rectangulares coordinatae centri E alicujus astri situati in hemisphaerio boreali, CE distantia a centro terrae aequalis r, A ascensio recta VN, D declinatio EN, habebimus ex triangulis CPM et CME $x = r\cos A\cos D$, $y = r\sin A\cos D$, $z = r\sin D$ ------ (α)

Sint X, Y, Z analogae coordinatae puncti, ubi est observator in superficie terrae; g, h. ascensio recta zenithi et declinatio seu geocentrica latitudo, erit posita distantia a centro ρ

$$X = \rho\cos h\cos g,\quad Y = \rho\sin g\cos h,\quad Z = \rho\sin h \text{ ------ } (\beta)$$

Tandem assumto loco observatoris pro origine communi trium aliarum coordinatarum respectu parallelarum prioribus, sit r' distantia astri ab observatore et A', D' ascensio recta et declinatio apparens hujus astri, et erit. —

$$x' = r'\cos A'\cos D',\quad y' = r'\sin A'\cos D',\quad z' = r'\sin D' \text{ ------ } (\gamma)$$

Uti quilibet videt, existunt inter has coordinatas veri et apparentis loci astri, sequentes relationes:

$$x' = x - X,\quad y' = y - Y,\quad z' = z - Z \text{ ------------ } (\delta)$$

vel ponendo valores

$$r'\cos A'\cos D' = r\cos A\cos D - \rho\cos g\cos h$$
$$r'\sin A'\cos D' = r\sin A\cos D - \rho\sin g\cos h$$
$$r'\sin D' = r\sin D - \rho\sin h$$

et si dividantur successive secunda et tertia aequatio per primam faciendo $\frac{\rho}{r} = \sin\Pi$ (Π maxima parallaxis altitudinis) erit

$$\operatorname{tg} A' = \frac{\sin A\cos D - \sin\Pi\sin g\cos h}{\cos A\cos D - \sin\Pi\cos g\cos h}$$

et

$$\operatorname{tg} D' = \frac{\cos A'(\sin D - \sin\Pi\sin h)}{\cos A\cos D - \sin\Pi\cos g\cos h} \text{ ------ } (\varepsilon)$$

Hae formulae dant locum apparentem in functione loci veri et maximae parallaxis altitudinis, vel parallaxis horizontalis; hae formulae attribuuntur Olbers qui eas obtinuit per methodum analyticam celeb. Lagrange. Sed multo simplicius est, in usu, deducere parallaxin ascensionis rectae et declinationis, et cum his tandem statuere

locum

locum apparentem. Prior parallaxis quae venit quoque sub nomine parallaxis anguli horarii est $A'-A$, secunda $D'-D$. Methodus directa has inveniendi est sequens:

Ex prima aequatione sequitur

$tg(x'-x)=\frac{tg x'-tg x}{1+tg x'\, tg x}$

$$tg(A'-A)=\frac{\sin\pi\cos h\sin(A-g)}{\cos D-\sin\pi\cos h\cos(A-g)}=\frac{\frac{\sin\pi\cos h}{\cos D}\sin(A-g)}{1-\frac{\sin\pi\cos h}{\cos D}\cos(A-g)}$$

Sed haec differentia $A'-A$ erit semper admodum parva, quoque pro luna; possumus igitur reducere hanc expressionem in seriem, retinendo tantum terminos maxime sensibiles; habebimus igitur in minutis secundis arcus

$$A'-A=\frac{\sin\pi\cos h}{\cos D}\frac{\sin(A-g)}{\sin 1''}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\pi\cos h}{\cos D}\right)^2\frac{\sin 2(A-g)}{\sin 1''}\ \dots\ (A)$$

Eadem ratione invenitur

iterum per $tg(A'-g)=\frac{tgA'-tgg}{1+tgA'\,tgg}$ et pro tgg $\frac{\sin g}{\cos g}$

$$tg(A'-g)=\frac{\sin(A-g)\cos D}{\cos(A-g)\cos D-\sin\pi\cos h}\quad\text{et}$$

$$tg D'=\frac{\cos(A'-g)(\sin D-\sin\pi\sin h)}{\cos(A-g)\cos D-\sin\pi\cos h}$$

et si una per alteram dividatur

$$tg D'=\frac{\sin(A'-g)}{\sin(A-g)}\left(tg D-\frac{\sin\pi\sin h}{\cos D}\right)$$

et si distantiae a polo indicantur, h. e. faciendo $D=90-\Delta$, $D'=90-\Delta'$, erit

$$cotg\,\Delta'=\frac{\sin(A'-g)}{\sin(A-g)}\left(ctg\Delta-\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta}\right)$$

Ad inveniendam ex hac formula parallaxin id est $\Delta'-\Delta=\sigma$, est

$$ctg\Delta-ctg\Delta'=ctg\Delta-\frac{\sin(A'-g)}{\sin(A-g)}\left(ctg\Delta-\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta}\right)$$

vel $$\frac{\sin(\Delta'-\Delta)}{\sin\Delta\sin(\Delta+\sigma)}=ctg\Delta\left(1-\frac{\sin(A'-g)}{\sin(A-g)}\right)+\frac{\sin(A'-g)}{\sin(A-g)}\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta};$$

tandem

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\Delta+\sigma)}=\frac{\sin(A'-g)\sin\pi\sin h}{\sin(A-g)}-\frac{2\cos\Delta\cos\left(\frac{A'+A}{2}-g\right)\sin\left(\frac{A'-A}{2}\right)}{\sin(A-g)}$$

Parallaxis σ non poterit facile derivari ex hac aequatione, sed commode hoc fieri potest introducendo sequentibus transformationibus

sit $$\frac{\sin(A'-g)\sin\pi\sin h}{\sin(A-g)}=tg u\quad\text{et}\quad\frac{2\cos\Delta\cos\left(\frac{A'+A}{2}-g\right)\sin\left(\frac{A'-A}{2}\right)}{\sin(A-g)}=tg v$$

et erit $$\sin\sigma=(tg u-tg v)\sin(\Delta+\sigma)$$

et ex

et ex hoc ponendo pro $\sin(A+\sigma)$ $\sin A\cos\sigma+\cos A\sin\sigma$ erit

$$tg\,\sigma=\frac{(tg\,u-tg\,v)\sin A}{1+(tg\,u-tg\,v)\cos A}=\frac{\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cos v}\sin A}{1-\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cos v}\cos A}$$

et resolvendo in seriem notam erit:

$$\sigma=\frac{\sin(u-v)\sin A}{\cos u\cos v\sin 1''}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(u-v)}{\cos u\cos v}\right]^2\frac{\sin 2A}{\sin 1''}\text{ - - - - - - - - (B)}$$

et hic est valor parallaxeos distantiæ polaris

Hæ formulæ erunt absolute ejusdem formæ si loco relationis astri ad æquatorem illud referatur ad eclipticam; in hoc casu transibunt ascensiones rectæ in longitudines et declinationes in latitudines. Sit igitur L longitudo vera astri, λ ejus latitudo, n longitudo Zenithi seu Nonagesimi, q latitudo Zenithi, seu complementum altitudinis nonagesimi, priores formulæ (ξ) erunt

$$tg\,L'=\frac{\sin L\cos\lambda-\sin\Pi\sin n\cos q}{\cos L\cos\lambda-\sin\Pi\cos n\cos q}$$

$$tg\,\lambda'=\frac{\cos L'(\sin\lambda-\sin\Pi\sin q)}{\cos L\cos\lambda-\sin\Pi\cos n\cos q}\text{ - - - - - - - (}\xi\text{)}$$

Nonagesimus est punctum in quo ecliptica horizontem secat; punctum id ab hoc 90° distat vocatur Nonagesimus. altitudo Nonagesimi hinc est complementum altitudinis poli eclipticæ supra horizontem.

et ex hoc habebimus pro parallaxi longitudinis

$$tg(L'-L)=\frac{\sin\Pi\cos q\sin(L-n)}{\cos\lambda-\sin\Pi\cos q\cos(L-n)}=\frac{\frac{\sin\Pi\cos q}{\cos\lambda}\sin(L-n)}{1-\frac{\sin\Pi\cos q}{\cos\lambda}\cos(L-n)}$$

et

$$L'-L=\frac{\sin\Pi\cos q\sin(L-n)}{\cos\lambda\sin 1''}+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\Pi\cos q}{\cos\lambda}\right)^2\frac{\sin 2(L-n)}{\sin 1''}+\ldots\ldots\text{(C)}$$

Sit porro $\lambda=90-\delta$, $\lambda'=90-\delta'$; parallaxis latitudinis erit $\lambda'-\lambda$; hinc parallaxis distantiæ a polo eclipticæ, si hanc designamus per η erit $\eta=\delta'-\delta$, et faciendo

$$tg\,u'=\frac{\sin(L'-n)\sin\Pi\sin q}{\sin(L-n)}$$

$$tg\,v'=\frac{2\cos\delta\cos\left(\frac{L'+L}{2}-n\right)\sin\left(\frac{L'-L}{2}\right)}{\sin(L-n)}$$

habebimus secundum præcedentia

$$\eta=\frac{\frac{\sin(u'-v')}{\cos u'\cos v'}\sin\delta}{1-\frac{\sin(u'-v')}{\cos u'\cos v'}\cos\delta}$$

vel in serie

$$\eta=\frac{\sin(u'-v')\sin\delta}{\cos u'\cos v'\sin 1''}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(u'-v')}{\cos u'\cos v'}\right]^2\frac{\sin 2\delta}{\sin 1''}+\ldots\ldots\text{(D)}$$

In Astronomia, positio Zenithi semper est data, per suam ascensionem rectam q et declinationem h; nam hae ascensio recta est tempus siderale in epocha observationis astri, et ~~lati tud~~ declinatio Zenithi est latitudo geocentrica quae aequatur latitudini geographicae H minus angulo ω verticalis cum radio terrae. —

Hic angulus autem calculatur per sequentem formulam

$$\omega = \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\frac{\sin 2H}{\sin 1''} - \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2\frac{\sin 4H}{\sin 2''}$$ (Vide quoque Littrow C. S. p. 87.)

nimirum ex figura elliptica in qua $\omega = H - h$ ergo

$$tg\,\omega = \frac{tgH - tgh}{1 + tgH\,tgh} = \frac{tgH - \frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}tgH} = \frac{tgH - \frac{b^2}{a^2}tgH}{1+\frac{b^2}{a^2}tgH}$$

mutata tangenti in sinus et ponendo $\sin^2 H = \frac{1-\cos 2H}{2}$ et $\sin 2H = 2\sin H \cos H$ erit

$$tg\,\omega = \frac{(a^2-b^2)\,tgH}{(a^2+b^2)\,tg^2H} = \frac{1}{2}\frac{(a^2-b^2)\sin 2H}{a^2-(a^2-b^2)\sin^2 H} = \frac{\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\sin 2H}{1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\cos 2H}$$ et ex hoc

series praecedens. — (Vid. Puissant lir. 3. p. 256.)

Ut deducamus aliquas consequentias ex generalibus formulis parallaxis; deducamus expressionem parallaxis altitudinis ex illa distantiae polaris $\sigma = \Delta' - \Delta$. —— Ad hoc facimus coincidere polum aequatoris cum Zenitho, vel quod idem est, sumamus aequatorem pro horizonte; dein Δ erit aequalis distantiae ~~polaris~~ zenithalis ~~apparens~~ ~~Z. Sub hac hypothesi, parallaxis ascensionis rectae~~ verae geocentricae N, et Δ' erit distantia zenithalis apparens Z. Sub hac hypothesi, parallaxis ascensionis rectae $A' - A$ erit aequalis zero; hinc dabit statim ista formula quia $h = 90°$;

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\Delta+\sigma)} = \sin\Pi \sin 90°$$

et mutando σ in π, et Δ in N erit

$$\sin\pi = \sin\Pi \sin(N+\pi) = \sin\Pi \sin Z$$

et haec est formula initio adducta.

Ut perveniamus ad formulas parallaxis annuae, supponamus observatorem in aliquo puncto eclipticae; in hoc casu latitudo Zenithi q erit nulla, et longitudo hujus puncti n repraesentabit

longitu-

longitudinem terrestrem. His positis, sit ♁ longitudo heliocentrica terrae, ☉ locus solis, p parallaxis annua in longitudine, q in latitudine, formula (C) dabit, quia ♁ = ☉ − 180 ☉ = ♁ + 180

$$p = \frac{\Pi \sin(L-\text{♁})}{\cos\lambda} = -\frac{\Pi \sin(L-\odot)}{\cos\lambda}$$

L et λ sint longitudo astri

Series (D) dabit parallaxin annuam in latitudine quae erit

$$q = \Pi \sin\lambda \cos(L-\text{♁}) = -\Pi \sin\lambda \cos(L-\odot)$$

Hae binae formulae vero tantum sunt approximativae, existentia nimirum quantitatis Π est adhuc in dubio et pro maxime splendentibus stellis fixis. ——— Si terra assumitur qua sphaera, parallaxis horizontalis alicujus astri, cujus distantia a terra manet constans, est semper eadem pro omnibus locis, in quibus observari potest stella; hac est autem inverse variabilis pro terra elliptica. Exempli gratia in aequatore erit in suo maximo et in polo est minima. Cum in ephemeridibus tantum dentur valores parallaxium aequatorialium et in calculis Astronomicis saepius opus sit parallaxi horizontali pro loco, cujus latitudo est data, hanc debebimus exprimere in functione prioris.

Sit a radius aequatoris terrestris, R radius correspondens puncto, cujus latitudo est H, Π' parallaxis aequatorialis, Π horizontalis; habebimus, exprimendo per r distantiam terrae ab astro

$$\sin\Pi' = \frac{a}{r}, \quad \sin\Pi = \frac{R}{r}$$

hinc $\sin\Pi = \frac{R}{a}\sin\Pi'$

et substituendo pro R suum valorem erit approximative

$$\Pi = \Pi'(1-\tfrac{1}{2}e^2\sin^2 H) = \Pi'(1-\alpha\sin^2 H)$$ — (Vid. Puissant T. I. p. 155)

Calculus parallaxis longitudinis et latitudinis

Ante omnia notandum, Nonagesimum et medium coeli vel Zenith esse semper unum et alterum in eadem parte re-

spectu

respectu coluri solstitiorum.

Sit longitudo Lunae $L = 10^\circ\ 55'\ 11''$, latitudo borealis $\lambda = 0^\circ\ 32'\ 45''$; Nonagesimus vel longitudo Zenithi $n = 340^\circ\ 3'\ 15''$ latitudo Zenithi $q = 62^\circ\ 29'\ 50''$, latitudo geocentrica $H = 48^\circ\ 39'\ 50''$ parallaxis horizontalis Lunae vel $\Pi = 54'\ 2''.5$ habebimus parallaxin longitudinis $L' - L$ per formulam (C) sequenti calculo:

$$L = 10^\circ\ 55'\ 11''$$
$$n = -19\ \ 56\ \ 40$$
$$L - n = 30^\circ\ 51'\ 51''$$

1 Terminus

$lg.\ \sin \Pi = 8.19644$
$\cos q = 9.66445$
$c.\ \cos \lambda = 0.00002$
7.86091
$\sin(L-n) = 9.71012$
$c.\ \sin 1'' = 5.31445$
$lg\ 1.\ term. = 2.88546$

2. Terminus

$lg \tfrac{1}{2} = 9.69897$
7.86091
7.86091
$\sin 2(L-n) = 9.94483$
$c.\ \sin 1'' = 5.31445$
$lg.\ 2.\ term. = 0.68005$

$1.\ term. = 768.16$
$2\ term. = 4.79$
parallaxis longitud. $= 772.95 = 12'\ 52''.95$

Neglectus tertius terminus est $+6''.03$

Hinc longitudo apparens $L' = 10^\circ\ 55'\ 11'' + 12'\ 53'' = 11^\circ\ 8'\ 4''$.

Parallaxis distantiae polaris obtinetur per formulam D) et quidem

$\frac{L+L'}{2} = 11^\circ\ 1'\ 37''$
$n = -19\ \ 56\ \ 40$
$\frac{L+L'}{2} - n = 30^\circ\ 58'\ 17''$

$L' = 11^\circ\ \ 8'\ \ 4''$
$n = -19\ \ 56\ \ 40$
$L' - n = 31^\circ\ \ 4'\ \ 44$

$$L' - L = 0^\circ\ 6'\ 26''.5$$
$$\delta = 90^\circ - \lambda = 89^\circ\ 27'\ 15''$$

1 angulus subsidiarius

$\sin \Pi = 8.19644$
$\sin q = 9.94792$
$\sin(L'-n) = 9.71283$
$tg\ u' = 8.14707$

2. angulus subsidiarius

$lg\ 2 = 0.30103$
$l.\ \sin\left(\frac{L'-L}{2}\right) = 7.27272$
$\cos \delta = 7.97892$
$\cos\left(\frac{L'+L}{2} - n\right) = 9.93319$
$c.\ \sin(L'-n) = 0.28988$
$tg\ v' = 5.77574$

$u' = 0° \ 48' \ 14''.0$
$v' = 0 \ 0 \ 12.3$
$u'-v' = 0° \ 48' \ 1''.7$

$\lg v' = 5.77574$
$C. \sin 1'' = 5.31443$
$\lg v' = 1.09017$

$\delta' - \delta = \eta$

1. Terminus

$\sin(u'-v') = 8.14522$
$c.\cos u' = 0.00004$
$c.\cos v. = 0.00000$
8.14526
$\sin\delta = 9.99998$
$c.\sin 1'' = 5.31443$
$\log.1.\text{term.} = 3.45967$

2. Terminus

$\lg \tfrac{1}{2} = 9.69897$
8.14526
8.14526
$\sin 2\delta = 8.27994$
$c.\sin 1'' = 5.31443$
$\lg 2.\text{term.} = 9.58386$

1. Term. $= 2881''.80$
2. term. $= 0.38$
Parallaxis $\eta = 2882.18 = 48' \ 2''.18$

Ad hunc valorem admodum simplicius pervenire possumus. Est nimirum

$$\cot g \delta' = \frac{\sin(\mathcal{L}'-n)}{\sin(\mathcal{L}-n)}\left(\cot g\delta - \frac{\sin\Pi \sin q}{\sin\delta}\right)$$

et ponendo $\lg\theta = \frac{\sin\Pi\sin q}{\sin\delta}$ erit

$$\cot g\delta' = \frac{\sin(\mathcal{L}'-n)\cos(\delta+\theta)}{\sin(\mathcal{L}'-n)\sin\delta\cos\theta}$$

formula quae dat distantiam apparentem a polo ecliptices. — Operando cum logarithmis septem decimalium erit:

$l.\sin\Pi = 8.1964376$
$\sin q = 9.9479187$
$c.\sin\delta = 0.0000197$
$\lg\theta = 8.1443754$
$c.\cos\theta = 0.0000422$
$c.\sin\delta = 0.0000197$
$\cos(\delta+\theta) = 7.6450441 -$
$\sin(\mathcal{L}'-n) = 9.7178330$
$c.\sin(\mathcal{L}-n) = 0.2898798$
$\cot g\delta' = 7.6478188 -$
$c.\sin 1'' = 5.3144251$
$\delta' = 2.9622439 - = 916''.73$

$\theta = 0° \ 47' \ 55''.9$
$\delta = 89 \ 27 \ 15.0$
$\theta+\delta = 90° \ 15' \ 10''.9$

ex quo $\delta' = 90° \ 15' \ 16''.73$
$\delta = 89 \ 27 \ 15$
$\eta = 0° \ 48' \ 1''.73$

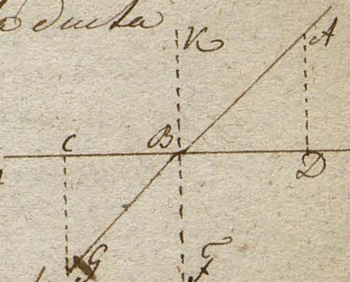
Refractio

Refractio

Fluidum istud peculiare, extensibile, rarum, perlucidumque, nimirum aëream atmosphæricum circumdare totum nostrum globum ~~terrestrem~~ terraqueum ex omni parte, seque extendere ad magnam altitudinem, cuilibet est notum. — Totum hoc fluidum, admodum necessarium ad nostram existentiam, constituit atmosphæram, habetque proprietatem se condensandi per frigus et se dilatandi per calorem. — Propter universalem gravitatem, h. e. propter attractionem terræ nostræ, cujus partem constituit atmosphæra, et propter ejus compressibilitatem, strata aërea ad superficiem terræ sunt maximæ densitatis, et densitates aucta altitudine semper decrescunt. — Posita temperatura constanti, sua densitas est proportionalis ponderi comprimenti (: Lex Mariotti:) et hinc altitudini barometri. — Ex hac proprietate resultat possibilitas mensurandi altitudines per observationes barometricas. — Propter hanc atmosphæram nos astra non videmus eo loco, ubi revera existunt, quia radii lucis per transitum per media variæ densitatis, mutant suam directionem, quum refringantur vel ad perpendiculum, vel a perpendiculo, et hic effectus vocatur Refractio. — Radius directus et refractus formant cum hoc perpendiculo angulos, quorum unus est angulus incidentiæ alter refractionis; sinus horum angulorum sunt semper in ratione constanti. — Experientia quoque comprobat, Refractionem radiorum in eadem superficie crescere, cum eorum obliquitate, et vim refringentem aëris esse proportionalem suæ densitati, vel pressioni superiorum stratorum. Densitates stratorum autem progressive crescunt ex limitibus atmosphæræ usque ad superficiem terræ; ex quo sequitur, radium lucis oblique transgredientem omnia hæc strata supposita sphærica, concentrica pervenire ad nos in linea curva concava versus superficiem terræ; sed quum nos supponamus

semper

objecta in directione radiorum ad nos pervenientium, nos refe-
rimus igitur astra ad puncta cœli, quæ nobis indicat tangens
hujus trajectoriæ quam describit radius lucis. — Refractio hinc
est angulus quem facit hæc tangens cum ~~radio~~ recta ducta
ex oculo nostro ad verum locum astri. —



Invenire legem secundum quam radii lucis refringuntur, si ex uno medio in aliud transeunt

Radius AB refringatur in puncto B et eat ad G. ponamus rationem celeritatis radii adhuc non refracti ad celeritatem refracti uti $m:n$. Igitur tempus, quo linea BG percurritur, ad tempus per AB uti $nBA : mBG$. Sit $AD = a$, $CG = b$, $CD = c$, $CB = x$, hinc $BD = c - x$, $BG = \sqrt{x^2+b^2}$
$AB = \sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}$ et $nBA + mGB = n\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2} + m\sqrt{x^2+b^2}$
Quum autem lux ex A in G tempore brevissimo venire debeat, nam natura semper sequatur brevissimam viam erit $n\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2} + m\sqrt{x^2+b^2}$ brevissimum tempus quo lux per refractionem ex A in G pervenire potest. Quæ, ~~ra~~ ponimus hinc nobis lineam curvam pro qua est $n\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2} + m\sqrt{x^2+b^2} = y$
ex quo $n(xdx - cdx) : \sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2} + mxdx : \sqrt{x^2+b^2} = dy = 0$

$$\frac{mx}{\sqrt{x^2+b^2}} = \frac{n(c-x)}{\sqrt{a^2+c^2-2cx+x^2}} \quad \text{h. e.} \quad \begin{matrix} mCB : BG = nDB : AB \\ mCB \cdot AB = BG \cdot nDB \end{matrix}$$

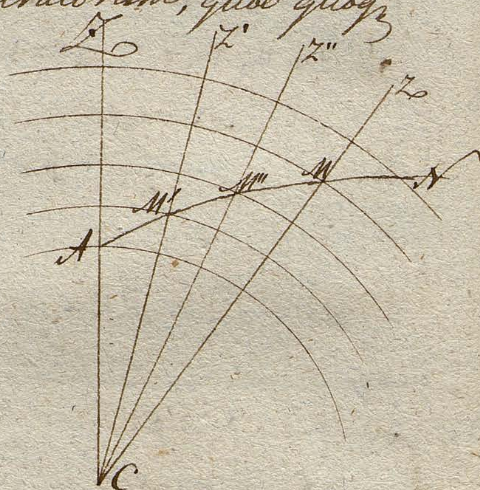
posito $BG = AB$ est $mCB = nDB$ hinc $m : n = BD : BC$. —

Per præteritam simplicem explicationem hujus phænomeni quilibet videbit, refractionem Astronomicam seu atmosphæricam maximam esse in Horizonte, semperq. imminui, dum astra se elevant supra hoc planum, et esse nullam si astrum pervenerit ad Zenith. — Effectus hinc refractionis est, elevare astra supra suum locum verum; et locum habet hic effectus in verticali. — Igitur angularis altitudo astri observata in superficie terræ, tantummodo est altitudo apparens; imminui hæc debet refractione ut habeatur altitudo vera. —

Quoque resultat ex hoc, valorem refractionis dependere ab altitudine apparenti astri, seu uti dicitur, habere pro argumento hanc altitudinem apparentem. —

Dabimus hic ideam mediorum per quae pervenerunt Astronomi ad statuendam aliquam theoriam. —

Ad inveniendam aequationem differentialem trajectoriae descriptae per radium lucis, in suo transgressu per atmosphaeram, supponimus 1° quicunque sit angulus sub quo incidit radius lucis ex vacuo in aërem, rationem sinus anguli incidentiae et refractionis semper esse constantem; 2° vires refringentes stratorum aëris esse proportionales densitatibus horum stratorum, quod quoque experientia comprobat.



His suppositis, sit $A M' M'' \ldots M N$ trajectoria radii lucis, AN atmosphaera cujus omnia strata AM', $M'M''$.... sunt supposita concentrica et sphaerica, et densitatis crescentis secundum certam legem, a puncto, quo incidit radius lucis in atmosphaeram donec pervenerit ad oculum observatoris. —

Designemus per $a, y', y'' \ldots y$ radios AC, $M'C$..... trajectoriae; per $Z, z', z'' \ldots z$ angulos, quos elementa subsequentia AM', $M'M''$..... MN hujus curvae faciunt respective cum verticalibus CZ, Cz', Cz''..... Cz; tandem per $\omega', \omega'' \ldots \omega$ angulos quos eadem elementa faciunt cum radiis $y', y'' \ldots y$

Supponamus quoque rationem sinus anguli incidentiae ad illum refractionis in strato AM' esse $(n):1$

ita ut in strato $M'M''$ sit --- $n':1$

$M''M$ --- $n'':1$

et in ultimo strato --- $n:1$

Temperatura supponitur in omnibus stratis eadem. —

Secundo

Secundum primum principium est, si u'. u''...u sint in punctis M', M''... M anguli incidentiæ radii lucis, pro puncto M'

$$\frac{\sin u'}{\sin \omega'} = (n) \qquad \frac{\sin u'}{\sin z'} = n'$$

pro puncto M'' $\frac{\sin u''}{\sin \omega''} = n' \qquad \frac{\sin u''}{\sin z''} = n''$

pro puncto M. $\frac{\sin u}{\sin \omega} = n'' \qquad \frac{\sin u}{\sin z} = n$

hinc eliminando successive u', u''.... u, erit

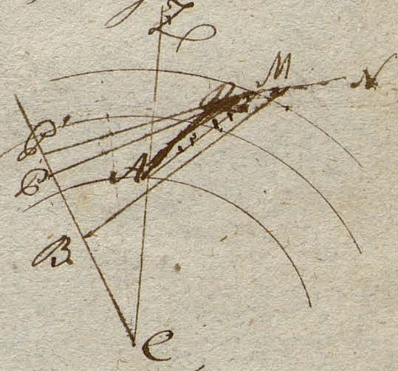
$$\frac{\sin \omega'}{\sin z'} = \frac{n'}{(n)},\ \frac{\sin \omega''}{\sin z''} = \frac{n''}{n'} \ldots\ldots \frac{\sin \omega}{\sin z} = \frac{n}{n''}$$

Praeterea triangula elementaria AM'C, M'M''C.... possunt considerari qua recti linea, hinc est:

$$\frac{\sin Z}{\sin \omega'} = \frac{r'}{a},\ \frac{\sin z'}{\sin \omega''} = \frac{r''}{r'} \ldots\ldots \frac{\sin z''}{\sin \omega} = \frac{r}{r''}$$

Multiplicando inter se has rationes et praecedentes erit reducendo $\frac{\sin Z}{\sin z} = \frac{n}{(n)} \cdot \frac{r}{a}$

Haec ultima relatio est independens a numero stratorum contentorum inter superficiem terrae et punctum N; hinc illa exprimet generaliter ~~unam~~ proprietatem trajectoriae quaesitae. Considerando hinc A, M', M''... N qua curvam continuam cujus cavitas obversa est coelo, et rectas NMP. AM'R qua tangentes in extremitatibus hujus curvae; prior representabit directionem primitivam luminis astri, altera erit linea per quam referimus astrum ad suum locum apparentem in coelo, et angulus harum rectarum erit mensura refractionis, quae habet locum in puncto A.



Dein ducendo parallelam MB ad AM', angulus PMB quoque erit aequalis Refractioni PMA.

Supponamus nunc priorem tangentem PMN sumere positionem infi

infinite vicinam $C'M$; quia eidem distantiae Zenithali $ZCM = Z$ plures possunt correspondere refractiones differentes, dum angulus $C'MC$ propter suam parvitatem, erit differentiale Refractionis $C'MB$.

Praemissis his considerationibus, obtinetur expressio hujus differentialis sequenti modo:

Demittatur ex centro C terrae in rectam MC' perpendiculum CC', designetur per x basis $C'M$ trianguli rectanguli $CC'M$, per y ejus altitudinem CC', et per r refractionem, quam locum habet inter A et M h.e. angulum $C'MB$ et erit generaliter

$$tg\,dr = \frac{C'C}{C'M} \text{ vel } dr = \frac{dy}{x}$$

Sed per praecedentia, et quia $y = r \sin C'MC = r \sin Z$ ... ($C'MC$ = verticali angul. Z)
erit

$$y = \frac{a(n)}{n} \sin Z$$

Praeterea, quum vis refringens aëris supposita est proportionalis densitati ρ, erit exprimendo hanc per $K\rho$ in regione MN, erit

$K\rho = n^2 - 1$ ... (Vide traité de physique de M. Biot tom III p. 266)

ubi K est vis refringens aëris in hac altitudine; ex quo

$$n = \sqrt{1 + K\rho}$$

Sit (ρ) densitas aëris in superficie terrae; erit ex eadem ratione

$$(n) = \sqrt{1 + K(\rho)}$$

hinc

$$y = \frac{a \sin Z \cdot \sqrt{1 + K(\rho)}}{\sqrt{1 + K\rho}} \quad \text{et}$$

$$x = \frac{r\sqrt{1 + K\rho - \frac{a^2}{r^2}\sin^2 Z \cdot (1 + K(\rho))}}{\sqrt{1 + K\rho}}$$

tandem

$$dr = \frac{dy}{x} = \frac{-aK\,d\rho \sin Z \cdot \sqrt{1 + K(\rho)}}{2(1 + K\rho)\, r \sqrt{1 + K\rho - \frac{a^2}{r^2}\sin^2 Z (1 + K(\rho))}}$$

Hae est aequatio differentialis pag. 244 tomi IV Mechanique celeste, ad quam quoque Brinkley et Andrews pervenerunt per methodum priori analogam.

Ad integrationem hujus aequationis, nota debet esse quantitas ρ in functione quantitatis r, h. e. nota debet esse lex, secundum quam decrescunt strata atmosphaeres. — Laplace consideravit in eodem casu ambos limites hujus legis, qui sunt una densitas constans et una densitas decrescens in progressione geometrica, crescente altitudine supra horizontem maris in progressione arithmetica, quae vero supponit temperaturam uniformem in qualibet puncto atmosphaeres.

Nos hic dabimus tantum simplicissimum casum, nimirum nos supponimus tantum distantias zenithales observatas, contentas inter 0° et 74°. —

Assumamus ad hunc effectum hypothesin temperaturae uniformis et faciamus

$$\frac{a}{l}=1-S,\quad \alpha=\frac{b(\rho)}{2(1+b(\rho))}=\frac{\frac{2G}{v^2}(\rho)}{1+\frac{4G}{v^2}(\rho)} \quad \text{--- (Vid. Biot)}$$

ubi v est celeritas lucis in vacuo et G summa virium attrahentium aëris, cujus densitas sit aequalis unitati. — Aequatio differentialis transibit in hanc

$$dr=-\frac{\frac{\alpha d\rho}{(\rho)}(1-S)\sin Z}{\left[1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\right]\sqrt{\cos^2 Z-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)+(2S-S^2)\sin^2 Z}}$$

et neglectis altioribus potentiis quantitatum α et S

$$dr=-\frac{\frac{\alpha d\rho}{(\rho)}(1-S)\,tg Z}{1-2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)}\left\{1+\frac{1}{2}\left[\frac{2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)}{\cos^2 Z}-(2S-S^2)\,tg^2 Z\right]\right\}$$

$$=-\frac{\alpha d\rho}{(\rho)}(1-S)\,tg Z\left[1+2\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\right]\cdot\left[1+\frac{\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)}{\cos^2 Z}-S\,tg^2 Z\right]$$

$$=-\frac{\alpha d\rho}{(\rho)}(1-S)\,tg Z\left[1-S\,tg^2 Z-\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\left(2+\frac{1}{\cos^2 Z}\right)\right]$$

$$=-\frac{\alpha d\rho}{(\rho)}\,tg Z\left[1-\frac{S}{\cos^2 Z}+\alpha\left(1-\frac{\rho}{(\rho)}\right)\frac{2\cos^2 Z+1}{\cos^2 Z}\right]$$

et integrando

$$r=-\alpha\,tg Z\left[\frac{\rho}{(\rho)}-\int\frac{S d\rho}{(\rho)\cos^2 Z}+\alpha\left(\frac{\rho}{(\rho)}-\frac{1}{2}\frac{\rho^2}{(\rho)^2}\right)+\frac{2\cos^2 Z+1}{\cos^2 Z}\right]+\text{Const}$$

Si sumatur hoc integrale inter limites $\rho=(\rho)$ et $\rho=0$, h. e. a superficie terrae usque ad limites atmosphaeres, et observando pro limite

$\varrho = (\varrho)$ esse $s = 0$ erit

$$r = \alpha \,\mathrm{tg}\, Z \left[1 + \tfrac{1}{2}\alpha \frac{(2\cos^2 Z + 1)}{\cos^2 Z} + \frac{1}{\cos^2 Z}\int \frac{s\,d\varrho}{(\varrho)}\right]$$

Integrando per partes est:

$$\int \frac{s\,d\varrho}{(\varrho)} = \frac{s\varrho}{(\varrho)} - \int \frac{\varrho\,ds}{(\varrho)}$$

pro $\varrho = 0$, $s = 1$ seu y infinite magno, hinc

$$\int \frac{s\,d\varrho}{(\varrho)} = -\int \frac{\varrho\,ds}{(\varrho)}$$

Restat igitur hoc ultimum integrale. – Ad hoc inveniendum, sit p, pressio aëris atmospherici in regione ubi g exprimit gravitatem, evidens est, quum massa aequatur producto ex volumine in densitatem, et pondus massae ductae in gravitatem, nos habere

$$dp = -g\varrho\,dy = -g\frac{y^2}{a}\varrho\,ds.$$

Nos sumimus hic signum minus, quia pressio in eadem ratione decrescit uti altitudo crescit. –

Sit nunc (g) gravitas ad superficiem terrae, erit

$$g = (g)\frac{a^2}{y^2} \quad \text{(lex naturae)}$$

hinc

$$p = -(g)a\int\varrho\,ds$$

Ergo integrale $\int\varrho\,ds$ aequalis est pressioni toti (p) ad superficiem terrae, divisae per $(g)a$. –

Videamus nunc quomodo possimus exprimere hanc pressionem in functione altitudinis atmosphaerae: cujus densitas sit (ϱ) et temperatura semper eadem. –

Si temperatura est uniformis, vires expansivae diversarum molecularum aëris proportionales sunt suis densitatibus, h. e.

$$p = (p)\frac{\varrho}{(\varrho)}$$

et per praecedentia

$$dp = -(g)\frac{a^2}{y^2}\varrho\,dy$$

hinc

$$(p)\cdot\frac{d\varrho}{(\varrho)} = (g)\,a\,(\varrho)\cdot d\cdot\frac{a}{y} \qquad \text{(quoad } s\text{)}$$

et integ

et integrando
$$lg\varrho = \frac{(g)a(\varrho)}{(p)} \cdot \frac{a}{r} + const.$$
Ad determinationem constantis sit $r = a$, hinc $\varrho = (\varrho)$ et
$$\log(\varrho) = \frac{(g)a(\varrho)}{(p)} + const$$
$$const = \log(\varrho) - \frac{(g)a(\varrho)}{(p)}$$
ergo $\log \varrho = \frac{(g)a(\varrho)}{(p)}\left(\frac{a}{r} - 1\right) + lg(\varrho)$
et transeundo ad numeros
$$\varrho = (\varrho) \cdot c^{\frac{(g)a(\varrho)}{(p)}\left(\frac{a}{r}-1\right)}$$
ubi c est basis logarithmorum Neperi corum. —
Sed per hypothesin l est altitudo columnae aëris densitatis (ϱ), qui agitatus per gravitatem (g) facit aequilibrium cum (p)
hinc $(p) = (g)(\varrho) \cdot l$ - - - - - - - - - - - - - - (m)
et tandem $\varrho = (\varrho) \cdot c^{-\frac{a s}{l}}$
et haec aequatio quoque comprobat posita temperatura uniformi in tota atmosphaera, densitatem decrescere in progressione geometrica, si altitudines crescunt in progressione arithmetica
Praeterea propter $\int \varrho ds = \frac{(p)}{(g)a}$ et $(p) = (g)(\varrho)l$
erit $\int \frac{\varrho ds}{(\varrho)} = \frac{l}{a}$ et $r = \alpha \, tg Z \left[1 + \frac{\frac{a}{2}\alpha(2\cos^2 Z + 1)}{\cos^2 Z} - \frac{l}{a}\right]$
Haec expressio tantummodo dependet a valoribus quantitatum (ϱ) et l, qui sunt dati per altitudines barometri ~~xxx~~ et thermometri in loco observationis; hinc quoque assignari debet limes, ubi haec formula cessat esse exacta. — Laplace calculavit ad hunc effectum terminum maxime considerabilem seriei praecedentis inter eos qui sunt neglecti, et invenit eum 1".1 pro distantia Zenithali apparenti 79°, et hinc insensibilem pro minori adhuc distantia Zenithali. —
Quaeramus nunc valores numericos elementorum hujus formulae.
Per hypothesin l repraesentat altitudinem atmosphaerae cujus densitas est (ϱ) et temperatura zero, erit per praecedentia:

$$(p) = (g)(\varrho)\, l$$

Sit quoq. Δ densitas mercurii, et h altitudo barometri pro eadem temperatura zero, erit quoq.

$$(p) = (g)\, \Delta h$$

ex quibus $$l = \frac{\Delta}{(\varrho)}\, h$$

Per experimenta celebb. Arago et Biot

$$\frac{\Delta}{(\varrho)} = 10473.04$$

pro temperatura zero, et altitudine barometrica $h = 0^m.76$

dein est $$l = 7960^m$$

Laplace invenit $$l = 7974^m$$

per combinationem magni numeri observationum barometricarum, factarum in diversis altitudinibus et in pedibus montium, et comparatarum cum mensurationibus trigonometricis.

Retinendo hoc ultimum resultatum, et notando esse

$$a = 6366198^m \quad \text{erit} \quad \frac{l}{a} = 0.00125254$$

Experimenta prius citata in iisdem circumstantiis barometricis et thermometricis, et quidem in partibus radii

$$\tfrac{1}{2} b(\varrho) = \frac{2g}{v^2}(\varrho) = 0.0002945856$$

ex quo $$\alpha = 0.000294412$$

Delambre, per comparationem magni numeri observationum invenit

$$\tfrac{1}{2} b(\varrho) = \frac{2g}{v^2}(\varrho) = 0.0002940470$$

ex quo $$\alpha = 0.000293876$$

valorem, qui fere identicus est cum praecedenti directe determinato et per experimenta admodum delicata. —

Cum autem sit haec quantitas proportionalis densitati (ϱ), densitas aëris est proportionalis pressioni, seu altitudini barometri; hinc necessarium est introducere in priori expressione pro r correctionem relativam quoad hoc instrumentum. Praeterea, quum haec densitas quoq. decrescit in eadem ratione, uti temperatura crescit, etiam

applicari

applicari debet ad hanc formulam correctio quoad statum thermometri. Secundum experimenta Gay-Lussac volumen aëris expressum per unitatem, posita temperatura 0°, et sub pressione, quae aequivalet illi columnae mercurialis altitudinis $0^m.76$, se dilatat quantitate $= 0.00375$ pro quolibet gradu thermometri centigradi, hinc pro t gradibus thermometri, volumen aëris erit $= 1 + 0.00375t$. Si nunc h designat observatam altitudinem barometri, erit quum dilatatio mercurii reducti ad zerum pro quolibet gradu centigradi thermometri sit $\frac{1}{5412}$ (: sed secundum novissima experimenta $\frac{1}{5550}$:) densitas aëris temperaturae t, si illa pro temperatura aquae regelantis sit unitas

$$\frac{h}{0^m.76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} \text{ vel brevius } \frac{h}{0^m.76(1+mt)(1+nt)}$$

quia massis positis aequalibus, densitates sunt inverse proportionales voluminibus. –

Quoad valorem l, visibile est secundum ~~valorem~~ aequationem (m), illum non mutari per altitudines barometri, si temperatura est constans; sed si temperatura mutatur et pressio manet constans, l variatur in ratione inversa quantitatis (ϱ), in hoc casu est

$$l = 7974^m(1+0.00375t)$$

Ex hoc sequitur
$$r = \frac{\alpha h \operatorname{tg} Z}{0^m.76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} + \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 h^2(1+2\cos^2 Z)}{(0^m.76)^2(1+0.00375t)^2(1+\frac{t}{5412})^2}\cdot\frac{\operatorname{tg} Z}{\cos^2 Z}$$
$$- \frac{\alpha h}{0^m.76}\cdot 0.00125254 \cdot \frac{\operatorname{tg} Z}{\cos^2 Z}$$

formula in qua $\alpha = 60''.616$

Pro majori commoditate calculi, alternari possunt secundus et tertius terminus ita:

$$r = \frac{\alpha h \operatorname{tg} Z}{0^m.76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})} + \frac{\frac{1}{2}\alpha^2 h^2(1+2\cos^2 Z)\operatorname{tg} Z}{0^m.76(1+0.00375)(1+\frac{t}{5412})}\cdot\cos^2 Z - \frac{\alpha h . 0.00125254}{0^m.76(1+0.00375t)(1+\frac{t}{5412})}\cdot\frac{\operatorname{tg} Z}{\cos^2 Z}$$
$$- \alpha . 0.00375t . 0.00125254 \frac{\operatorname{tg} Z}{\cos^2 Z}$$

Hae

Haec formula est deducta usque ad distantias zenithales 74°, pro majoribus usq ad horizontem quoq est data formula a celeb. La-place. — Etsi tabulae his formulis superstructae serviant in tota earum extensione, Astronomi tamen evitant observationes astro-rum prope horizontem, propter inconstantiam Refractionis. — Tandem, facta abstractione a factore $\frac{h}{0^m.76(1+0.00375\,t)(1+\frac{t}{5412})}$ erit, devolvendo hanc expressionem respectu potentiarum $tg Z$ et ponendo $\cos^2 Z = \frac{1}{1+tg^2 Z}$

$$r = (0.99874746 + \tfrac{3\alpha \sin 1''}{2})\alpha\, tg Z - (0.00125254 - \tfrac{\alpha}{2}\sin 1'')\alpha\, tg^3 Z \ldots$$

vel ponendo cum celeb. Biot $\alpha = 60''.525$, $\alpha \sin 1'' = 0.000293434$

et hinc $$r = 0.99918760\,\alpha\, tg Z - 0.00105823\,\alpha\, tg^3 Z \;\ldots\ldots (N)$$

× Ante cognitionem hujus theoriae de qua dedimus ideam, Astronomi usi sunt potissimum duabus formulis in construendis tabulis, quae considerari possunt uti casus particulares praecedentis, et quas quoq noscere debemus. —

Z, B, A, D, C, E, a, b, P

Sit ECD planum media dirimens, AC radius inci-dens, qui directione Cb ad perpendiculum ZCP re-fringitur, angulus incidentiae aCP = ACZ, angu-lus refractionis bCP = BCZ = Z seu apparens di-stantia a Zenith; hinc aCb = ACB refractio; dein est $m = \frac{\sin aCP}{\sin bCP} = \frac{\sin(Z+r)}{\sin Z}$ hinc esset

$m \sin Z = \sin(Z+r)$ expressio ex qua refractio inveniri posset. Observationes autem ostenderunt, ma-jorem esse harmoniam si pro r ponatur $-nr$, ubi n est constans hinc est $$m \sin Z = \sin(Z - nr) \;\ldots\ldots (I)$$
et haec est aequatio sic dicta Simpsoniana.

Ex hac aequatione quoq sequitur

$$1 : m = \sin Z : \sin(Z - nr)$$

hinc

$$\cos\left(\tfrac{p+p'}{2}-k\right) = \cos B\cos(C-K) - \sin B\sin(C-K)$$

$$\sin\left(\tfrac{p+p'}{2}-k\right) = \sin B\cos(C-K) + \cos B\sin(C-K)$$

$$A\cos B\left\{\cos B\cos(C-K) - \sin B\sin(C-K)\right\}$$

$$A\sin B\left\{\sin B\cos(C-K) + \cos B\sin(C-K)\right\}$$

$$\cancel{A\sin B\{A\cos B\sin(C-K) + A\sin B\cos(C-K) = A\sin B\{\sin(B+C-K)}$$

$$\cancel{A\cos B\{\cos B\cos(C-K) + A\sin B\sin(C-K) = A\cos B\{\cos(B-(C-K)}$$

$$A\cos B.\cos B\cos(C-K) - A\cos B.\sin B\sin(C-K)$$

$$A\sin B.\sin B\cos(C-K) + A\sin B\cos B\sin(C-K)$$

$$A(\cos B\cos B\cos(C-K) + \sin B\sin B\cos(C-K))$$

$$A(\cos^2 B\cos(C-K) + \sin^2 B\cos(C-K))$$

$$A\cos(C-K)\left\{\cos^2 B + \sin^2 B\right\} = A\cos(C-K)$$

$$tg(45-x) = \frac{tg\,45 - tg\,x}{1 + tg\,45\,tg\,x} = \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$$

$$\frac{A}{A'} = tg\,x$$

$$\frac{A'-A}{A'} = 1 - tg\,x$$

$$\cancel{A'-A = A' - \frac{A}{A'}}$$

$$A'-A = A' - \frac{AA'}{A'}$$

$$\frac{1-\frac{A}{A'}}{1+\frac{A}{A'}} = \frac{A'-A}{A'+A}$$

$$1 - \frac{A}{A'} = 1 - tg\,x$$

$$1 + \frac{A}{A'} = 1 + tg\,x$$

dividendo $\frac{A'-A}{A'+A} = \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x}$

$$\mathrm{tg}(45-x)\,\mathrm{ctg}\,\frac{C'-C}{2} = \mathrm{tg}\,y$$

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{ctg}\,\frac{C'-C}{2} = \mathrm{tg}\,y$$

$$\frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,\frac{\cos\frac{C'-C}{2}}{\sin\frac{C'-C}{2}} = \mathrm{tg}\,y$$

$$0 = \frac{A'-A}{A'+A}\cos\left(\frac{C'+C}{2}-K\right)\cos\frac{C'-C}{2} - \sin\left(\frac{C'+C}{2}-K\right)\sin\frac{C'-C}{2}$$

$$0 = \cos\left(\frac{C'+C}{2}-K\right)\cos\frac{C'-C}{2} - \sin\left(\frac{C'+C}{2}-K\right)\sin\frac{C'-C}{2}$$

$$0 = \frac{1-\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}\,x}\,\mathrm{ctg}\,\frac{C'-C}{2} - \mathrm{tg}\left(\frac{C'+C}{2}-K\right)$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{C'+C}{2}-K = \mathrm{tg}\,y$$

$$\frac{C'+C}{2}-K = y$$

$$K = \tfrac{1}{2}(C'+C) - y$$

$$\frac{2\cos^2\frac{1}{2}nR}{\sin^2\frac{1}{2}nR}$$

$$\frac{\mathrm{tg}(z-\frac{1}{2}nr)}{\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}nr}\,\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}nR$$

$$\frac{\sin(z-\frac{nr}{2})\cos\frac{nr}{2}}{\sin\frac{nr}{2}\cos(z-\frac{nr}{2})}$$

<u>formula Delambri</u>

ex aequatione Sympsonii

$m\sin z = \sin(z-nr)$ est

$m\sin z = \sin z\cos nr - \sin nr\cos z$ vel

$m = \cos nr - $ ~~$\sin nr$~~ $\mathrm{ctg}\,z$

$\cos nr = \cos^2\frac{nr}{2} - \sin^2\frac{nr}{2}$

dividendo ambos terminos per unitatem erit

$$\cos nr = \frac{\cos^2\frac{nr}{2}-\sin^2\frac{nr}{2}}{\cos^2\frac{nr}{2}+\sin^2\frac{nr}{2}} = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2}}$$

$\sin nr = 2\sin\frac{nr}{2}\cos\frac{nr}{2}$ dividendo per unitatem

$$\sin nr = \frac{2\sin\frac{nr}{2}\cos\frac{nr}{2}}{\cos^2\frac{nr}{2}+\sin^2\frac{nr}{2}} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{nr}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2}}$$

$$m = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2}} - \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{nr}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2}}\,\mathrm{ctg}\,z$$

$$m + m\,\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2} = 1 - \mathrm{tg}^2\frac{nr}{2} - 2\,\mathrm{tg}\frac{nr}{2}\,\mathrm{ctg}\,z$$

$$m\,\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{nr}{2} + 2\,\mathrm{tg}\frac{nr}{2}\,\mathrm{ctg}\,z = 1-m$$

$$\mathrm{tg}^2\frac{nr}{2} + \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{nr}{2}}{(m+1)\,\mathrm{tg}\,z} = \frac{1-m}{1+m}$$

$$\mathrm{tg}\frac{nr}{2} = -\frac{1}{(m+1)\,\mathrm{tg}\,z} \pm \sqrt{\frac{1}{(m+1)^2\,\mathrm{tg}^2 z} + \frac{1-m}{1+m}}$$

$$\mathrm{tg}\frac{nr}{2} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}(z-\tfrac{1}{2}nr)$$

$$\mathrm{tg}\frac{nr}{2} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\left(\frac{\mathrm{tg}\,z-\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}nr}{1+\mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}nr}\right)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr + \mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nr = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR(\mathrm{tg}\,z - \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr) = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}\,z - \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}\frac{nr}{2}$$

~~$\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR$~~ $\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nr +$

$$\mathrm{ctg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr = \mathrm{tg}(z-\tfrac{1}{2}nr)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}(z-\tfrac{1}{2}nr)$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr = -\frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,z\cos^2\frac{1}{2}nR}\ \text{~~}(\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR)\text{~~}^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\left(\frac{\mathrm{tg}\,z-\mathrm{tg}\frac{1}{2}nr}{1+\mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}nr}\right)$$

$$\mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nr + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}\,z - \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr$$

$$\mathrm{tg}\,z\,\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nr + \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}nr(1+\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR) = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR\,\mathrm{tg}\,z$$

$$\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nr + \frac{\mathrm{tg}\frac{1}{2}nr}{\mathrm{tg}\,z\cos^2\frac{1}{2}nR} = \mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}nR$$

$$\frac{1+m}{1-m} = \frac{\sin z + \sin(z-nr)}{\sin z - \sin(z-nr)} = \frac{tg(z-\frac{nr}{2})}{tg\frac{nr}{2}}$$

vel $tg\frac{nr}{2} = \frac{1-m}{1+m} tg(z-\frac{nr}{2})$ - - - - - - - - - - - - - (II)

et haec est aequatio Bradleyana. —

Aequatio (I) dat

$$m = \cos nr - \sin nr \cot z$$

sed $\cos nr = \frac{1-tg^2\frac{nr}{2}}{1+tg^2\frac{nr}{2}}$

$$\sin nr = \frac{2tg\frac{nr}{2}}{1+tg^2\frac{nr}{2}}$$

si hi valores substituantur, oritur aequatio quadratica pro $tg\frac{nr}{2}$ quae resoluta in seriem dat

$$tg\frac{nr}{2} = a\,tg z + b\,tg^3 z + c\,tg^5 z + \ldots\ldots (III)$$

quae est expressio Delambri.

Si R est Refractio horizontalis pro $z=90°$, aequatio (I) erit

$$m = \cos nR \quad \text{hinc}$$

$$\cos nR \sin z = \sin(z-nr) \text{ vel}$$

$$1 : \cos nR = \sin z : \sin(z-nr)$$

$$\frac{1+\cos nR}{1-\cos nR} = \frac{\sin z + \sin(z-nr)}{\sin z - \sin(z-nr)} \quad \text{ex quo}$$

$$tg^* \tfrac{1}{2}nr = tg^2 \tfrac{1}{2}nR\, tg(z-\tfrac{1}{2}nr)$$

sed $tg(z-\frac{1}{2}nr) = \frac{tg z - tg\frac{1}{2}nr}{1+tg z\, tg\frac{1}{2}nr}$ quod substitutum in priori aequatione dat

$$tg\tfrac{1}{2}nr = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}nR\, tg z}\left[(1+\sin^2 nR\, tg^2 z)^{\frac{1}{2}} - 1\right]$$

et posito $tg\, x = \sin nR\, tg z$, est

$$tg\frac{nr}{2} = tg\tfrac{1}{2}x\; tg\tfrac{1}{2}nR \;\ldots\ldots\ldots\ldots (IV)$$

formula quae pro calculo est admodum commoda.

Delambre admodum simpliciter determinavit valores quantitatum n et R per observationes duarum refractionum r et r', nimirum

Ultima formula dat propter parvitatem angulorum nr et nR

$$r = R\,tg\tfrac{1}{2}x \quad \text{pro distantia a zenith } Z$$

et pro distantia a zenith Z'

$$r' = R\,tg\tfrac{1}{2}x'$$

hinc $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{tg\frac{1}{2}x'}{tg\frac{1}{2}x}$

sed $tg\,x = \dfrac{2\,tg\frac{1}{2}x}{1 - tg^2\frac{1}{2}x}$, ergo

$$\frac{r'}{r} = \frac{tg\,x'(1 - tg^2\frac{1}{2}x')}{tg\,x(1 - tg^2\frac{1}{2}x)} = \frac{tg\,Z'(1 - tg^2\frac{1}{2}x')}{tg\,Z(1 - tg^2\frac{1}{2}x)} =$$

$$= \frac{tg\,Z'(1 - tg^2\frac{1}{2}x')}{tg\,Z(1 - (\frac{r}{r'})^2 tg^2\frac{1}{2}x')}$$

$$\frac{tg\,Z'}{tg\,Z} = \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r'}{r}(\frac{r}{r'})^2 tg^2\frac{1}{2}x'}{1 - tg^2\frac{1}{2}x'} = \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}tg^2\frac{1}{2}x'}{1 - tg^2\frac{1}{2}x'}$$

$$\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'}tg^2\tfrac{1}{2}x' = tg\,Z'\,ctg\,Z - tg\,Z'\,ctg\,Z\,tg^2\tfrac{1}{2}x$$

$$tg^2\tfrac{1}{2}x' = \frac{tg\,Z'\,ctg\,Z - \frac{r'}{r}}{tg\,Z'\,ctg\,Z - \frac{r}{r'}}$$ quod quoque ita potest scribi

$$tg^2\tfrac{1}{2}x' = \frac{tg\,A - tg\,B}{tg\,A - ctg\,B} = \frac{\sin(A-B)\,tg\,B}{\sin(A+B-90^\circ)}$$

Per hanc ultimam formulam innotescit $\frac{1}{2}x'$, ex quo

$$tg\tfrac{1}{2}x = \tfrac{r}{r'}\,tg\tfrac{1}{2}x' \quad \text{et} \quad R = r\,ctg\tfrac{1}{2}x = r'\,ctg\tfrac{1}{2}x'$$

tandem $\sin nR = tg\,x\,ctg\,Z = tg\,x'\,ctg\,Z'$ et $n = \frac{nR}{R}$

Supponamus $Z' = 90^\circ$, hinc $r' = R$, $tg\frac{1}{2}x' = 1$ et $tg\frac{1}{2}x = \frac{r}{R}$

hinc $\sin nR = tg\,x\,ctg\,Z = \dfrac{2(\frac{r}{R})\,ctg\,Z}{1 - (\frac{r}{R})^2} = \dfrac{2Rr\,ctg\,Z}{(R+r)(R-r)}$.

Excepta formula celeb. Laplace omnes eatenus sunt imperfectae, quatenus dant tantummodo ad certum gradum refractionem. Novissimas deductiones quoad refractionem sunt a celeb. Bessel et Lüttrow. — (Adnotetur quoad refractionem mediam et veram)

Methodus practica determinandi refractionem potissimum est sequens: Comparari nimirum debent altitudines observatae stellarum, quae igitur adhuc continent refractionem, cum illis

alti-

Deductio formulae $\frac{tg\frac{1}{2}x'}{tg\,[\ldots]} = \frac{\sin(A-B)\,tg B}{\sin(A+B-90)}$ ex aequatione

$$\frac{r'}{r} = \frac{tg\frac{1}{2}x'}{tg\frac{1}{2}x} \text{ - - - - - - - - - - - - } (\alpha)$$

scimus ex trigonometria

$$tg x = \frac{2tg\frac{1}{2}x}{1-tg^2\frac{1}{2}x} \text{ - - - - } tg\frac{1}{2}x = \frac{tg x(1-tg^2\frac{1}{2}x)}{2}$$

et $tg x' = \frac{2tg\frac{1}{2}x'}{1-tg^2\frac{1}{2}x}$ ergo - - - - $tg\frac{1}{2}x' = \frac{tg x'(1-tg^2\frac{1}{2}x')}{2}$

positis his valoribus in aequatione (α) erit

$$\frac{r'}{r} = \frac{\frac{tg x'(1-tg^2\frac{1}{2}x')}{2}}{\frac{tg x(1-tg^2\frac{1}{2}x)}{2}} = \frac{tg x'(1-tg^2\frac{1}{2}x')}{tg x(1-tg^2\frac{1}{2}x)}$$

Aequatio(α) dat quoque $tg\frac{1}{2}x = \frac{r}{r_1}tg\frac{1}{2}x'$ ergo $tg^2\frac{1}{2}x = \left(\frac{r}{r_1}\right)^2 tg^2\frac{1}{2}x'$

et posito hoc valore in ultima aequatione pro $tg^2\frac{1}{2}x$ erit:

$$\frac{r'}{r} = \frac{tg x'(1-tg^2\frac{1}{2}x')}{tg x(1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 tg^2\frac{1}{2}x')}$$

ex praecedentibus est ~~fx~~ $tg x = \sin n R\, tg Z$

et $tg x' = \sin n R\, tg Z'$ ergo ponendo hos valores in aequatione praecedenti $\sin n R$ in numeratore et denominatore se tollent et

erit ~~$\frac{r'}{r} = \frac{tg Z'(1-tg^2\frac{1}{2}x')}{tg Z(1-tg}$~~ $\frac{r'}{r} = \frac{tg Z'(1-tg^2\frac{1}{2}x')}{tg Z(1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 tg^2\frac{1}{2}x')}$ inde

$$\frac{tg Z'}{tg Z} = \frac{\frac{r'}{r}(1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 tg^2\frac{1}{2}x')}{1-tg^2\frac{1}{2}x} = \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r}{r_1}tg^2\frac{1}{2}x'}{1-tg^2\frac{1}{2}x'} \text{ ergo}$$

$\frac{r'}{r} - \frac{r}{r_1}tg^2\frac{1}{2}x = \frac{tg Z'}{tg Z}(1-tg^2\frac{1}{2}x')$ pro $tg Z$ possumus ponere in numeratore $ctg Z$ quia dividere per $tg Z$ vel multiplicare per $ctg Z$ est unum et idem nam $ctg Z = \frac{1}{tg Z}$ ergo erit si revera multiplicemus

$\frac{r'}{r} - \frac{r}{r'} tg^2 \tfrac{1}{2}x' = tg z' ctg z - tg z' ctg z\, tg^2 \tfrac{1}{2}x'$ et hinc

$tg z' ctg z\, tg^2 \tfrac{1}{2}x' - \frac{r}{r'} tg^2 \tfrac{1}{2}x' = tg z' ctg z - \frac{r'}{r}$ dein est

$$tg^2 \tfrac{1}{2}x' = \frac{tg z' ctg z - \frac{r'}{r}}{tg z' ctg z - \frac{r}{r'}}$$

si nominemus $tg z' ctg z = tg A$
et $\frac{r'}{r} = tg B$ erit:

$$tg^2 \tfrac{1}{2}x' = \frac{tg A - tg B}{tg A - ctg B}$$

multiplicemus ambos terminos fractionis istius per $tg B$, habebimus

$$tg^2 \tfrac{1}{2}x' = \frac{(tg A - tg B)\, tg B}{(tg A - ctg B)\, tg B}$$

X sed $tg A - tg B = \frac{\sin A}{\cos A} - \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\cos A \cos B} = \frac{\sin (A-B)}{\cos A \cos B}$

et $(tg A - ctg B)\, tg B = tg A\, tg B - ctg B\, tg B = \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - \frac{\cos B \sin B}{\sin B \cos B} =$

$$= \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} - 1 = \frac{\sin A \sin B - \cos A \cos B}{\cos A \cos B} =$$

$$= - \frac{\cos (A+B)}{\cos A \cos B}$$

sed scimus $\sin (a - 90) = - \cos a$

ergo $- \cos (A+B) = \sin (A + B - 90)$

positis his duobus valoribus in ultima aequatione pro
$tg A - tg B$ et pro $(tg A - ctg B)\, tg B$ erit

$$tg^2 \tfrac{1}{2}x' = \frac{\sin (A-B)\, tg B}{\sin (A+B-90)}$$ proposita formula

altitudinibus, ubi refractio non amplius occurrit. Assumamus, stellam transire per Zenith; si diu eadem stella in suis diversis distantiis usq ad Horizontem et simul correspondentia Azymutha observantur, per observationem in Zenith innotescit stellæ declinatio libera ab influxu refractionis; per quam conjunctim cum altitudine poli et observatis azimuthis derivari possunt omnes altitudines sine refractione. (Differentiæ ambarum erunt refractiones in observatis distantiis. — Hac ratione construxit celeb. Piazzi præcipuam partem suæ tabulæ refractionum. — In hac tabula a gradu 38 distantiæ Zenithalis usq ad 89° refractiones tantum per observationes, a 0° vero usq ad 38° et per observationes et per theoriam sunt determinatæ. — Lacaille pro Azymuthis assumsit angulos horarios, Bradley declinationes solis et stellarum in vicinia poli; sed anguli horarii non ~~multam~~ magnam præbent certitudinem, et declinationes et etiam ipsæ stellæ tantummodo pro parvo numero distantiarum servire possunt. Generatim igitur solum per observationes refractiones pro omnibus distantiis a Zenith non accurate determinari possunt, accedere debet theoria. —

Consectaria ex omnibus prioribus sunt sequentia:

1° Refractio exserit suam actionem tantummodo in altitudines.

2° Refractio appropinquat corpora cælestia Zenitho.

3° In Zenith Refractio est nulla.

4° Refractio in parvis distantiis a Zenith jam est sensibilis et crescit usque ad Horizontem. —

5° Quum corpora cælestia sint extra regionem atmosphæræ, eorum refractiones in iisdem distantiis sunt eædem.

6° Azymutha per refractionem non mutantur. —

7° Anguli horarii et distantiæ a polo per eam mutantur.

8° Si corpus coeleste in ortu et occasu Horizontem tangere videtur, istud jam est vel supra vel infra eum.

9° Azymuthum corporum coelestium, si ea pro nobis sunt in Horizonte

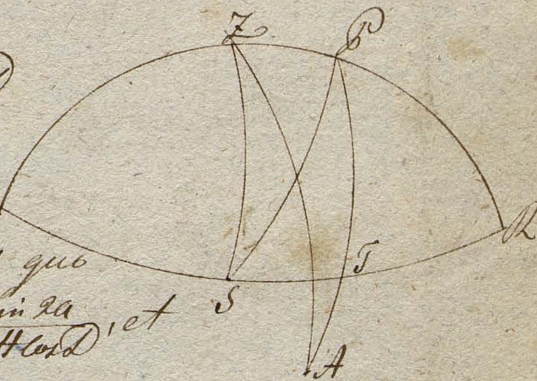
non manet idem, si revera tangunt Horizontem; quae differentia oritur ab obliquo situ orbitarum stellarum respectu Horizontis.
Tabulae sunt constructae pro sic dictis refractionibus mediis, h.e. sito statu barometri et termometri; ut autem ex his mediis eruantur verae, adnexa est alia tabula quae dat correctiones. —
Refractiones mediae autem sunt variabiles etsi status barometri et thermometri maneat constans:
1º. Si aër est siccus, alio modo se extendit, quam si est humidus, et si temperatura pro ambobus casibus sit eadem.
2º. Venti adducunt semper novos fluxus aëris, quorum momentaneae variationes nec in barometro nec thermometro mutationes producere possunt. —
3º. Fluidum electricum, per quod certe densitas aëris nec crescit nec decrescit, tamen habet, uti observavit Piazzi, aliquam actionem in lucem et turbat directionem radiorum. —
4º. Non sine fundamento quoq; conjicere possumus, plures substantiarum aëriformium quae e terra in aërem transeunt, independenter a statu barometri et thermometri, turbare refractionem. —
Nos autem habemus ad mensurandam humiditatem et siccitatem hygrometrum, sed hoc instrumentum est adhuc tam imperfectum, ut usq; ad hoc tempus, adhuc non magnam utilitatem praebuerit.

Refractio quoq; producit Crepusculum matutinum et vespertinum. Si sol majorem quam 96° 33' distantiam a Zenith habet, refractio non est tam fortis, ut radii solares pervenire possint ad oculos nostros; refringuntur nimirum irregulariter per moleculas atmospherae; nos non videmus imaginem solis, sed pars plus vel minus magna coeli est illuminata; hoc lumen
(aurora) nobis annuntiat ortum solis et semper erit majus, donec sol sit in Horizonte et hoc phenomenon vocatur Crepusculum. Idem quoq; quoad occasum solis, hinc distinguitur Crepusculum matutinum et vespertinum. —

Pars illuminata atmosphaerae quando Sol vel apparet vel disparet, habet pro basi circulum Horizontis; si autem Sol magis est depressus, curva, quae est limes reflexi luminis, semper magis et magis est obliqua. — Quando limes L transit per Zenith, observator, qui habet solem a tergo, non amplius videbit lucem, et hoc est, quod Lambert nominat finem crepusculi civilis.

Si cum attentione serena die prosequimur motum hujus curvae, apprehendere possumus circiter momentum, quo disparet et calculando pro hoc momento distantiam Solis a Zenith, invenire possumus depressionem Solis pro momento, quo incipit et finem adsequitur crepusculum. —

Sit TA haec depressio, et nominetur hic arcus 2a, et deinde habebimus in triangulo ZPA



$$\cos ZPA = \frac{\cos(90+2a)}{\cos H \cos D} - tg H tg D$$

Si Sol autem est in Horizonte est:

$$\cos ZPS = -tg H tg D \text{ hinc}$$

$$\cos ZPS - \cos ZPA = \frac{\sin 2a}{\cos H \cos D} \text{ et quo}$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(ZPA - ZPS) \sin \tfrac{1}{2}(ZPA + ZPS) = \frac{\sin 2a}{\cos H \cos D}, \text{ et}$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(P' - P) = \frac{\sin 2a}{2 \sin \tfrac{1}{2}(P' + P) \cos H \cos D}$$

ubi P' et P sunt anguli horarii.

Differentia angulorum horariorum correspondentium ortui solis et initio crepusculi, divisa per 15, dabit durationem crepusculi. Cognita autem duratione per observationem, calculari potest depressio TA = 2a, et hac inventa, calculari potest duratio pro die et loco dato; nam, uti videmus, dependet duratio a latitudine geographica et a declinatione. — Tantum parvus numerus observationum hujus durationis est notus; dedit sunt a Lacaille in zona torrida, qui invenit AT = 16° et 17°. Lemonnier invenit 17° usque ad 21°, antiquiores assumserant 18°. —

Supponamus $H=0$, $D=0$ erit

$$\cos H \cos D = 1 \quad tg H tg D = 0 = \cos P \text{ vel}$$

$P = 90° = 6^h$; $\cos P - \cos P' = 0 - \cos P' = \sin 2a$ vel

$P' = 90° + 2a$, et duratio crepusculi $\frac{2a}{15}$ et hoc est brevissimum omnium crepusculorum, nam prior expressio est quoq

$$2 \sin \tfrac{1}{2}(P' - P) = \sin 2a \sec H \sec D \operatorname{cosec}(P' + P)$$

et productum trium secantium habet pro minimo unitatem.

Crepuscula sunt quoq magis longiora pro latitudinibus majoribus.

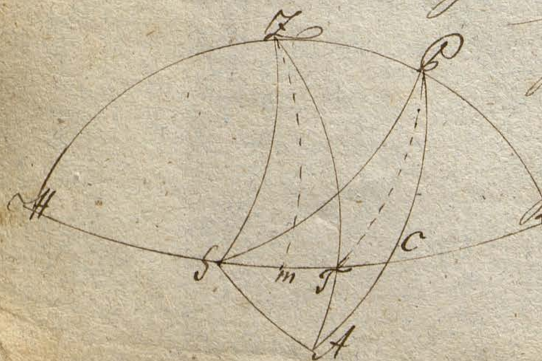
Supponamus latitudinem et declinationem esse nullam, duo poli erunt in Horizonte, et Sol describit aequatorem SZ, qui transibit per Zenith, arcus OS, motus solis erit mensura anguli crepusculi $OPS = 18°$, et crepusculum durabit $\frac{18}{15} = 1^h\, 12'$.

Alio tempore sit AP distantia solis a polo, $ZA = 90° + 2a$, $HA = 2a$, HPA erit duratio crepusculi, hinc triangulum in H rectangulum HPA dabit

$$\sin HPA = \frac{\sin HA}{\sin PA} = \frac{\sin 2a}{\cos D}$$

quae quantitas est major quam $\sin 2a$, hinc crepusculum quoq crescit cum declinatione.

Problema brevissimi crepusculi occupavit fratres Bernoulli per 5 annos; Joannes Bernoulli tandem dedit resolutionem per suam methodum de maximis et minimis. Nos dabimus hic resolutionem multo faciliorem et magis completam.



Sit $ZA = 90° + 2a$, $AS' = 2a$, S sol in Horizonte. Triangulum rectangulum ASS' dat

$$\cos AS = \cos AS' \cos SS' = \cos 2a \cos(PS - PS') = \cos 2a \cos(PZS - PZS')$$

($\cos AS'$ est constans)

Ulterius SS' erit parvum, majora erunt $\cos SS'$ et $\cos AS$ hinc minus AS, et revera videmus, quando Sol ascendit a $18° = 2a$ h.e. ab A usq ad S, tempus semper

minus

minus esse, quo minor est declinatio, et jam diximus, omnium minimum esse crepusculum, si AS est perpendicularis ad Horizontem, et SS̄=0 et et PZS = PZA = 90° hinc SS̄ = PZS − PZA est minimum possibile, si non poterit esse zero, hinc

$$\cos PZA = \frac{\cos PA - \cos PZ \cos ZA}{\sin PZ \sin ZA} = \frac{\sin D}{\cos H \cos 2a} + tg H tg 2a$$

supponamus 2a=0, $\cos PZA$ erit $\cos PZS = \frac{\sin D}{\sin H}$

$$\cos PZA - \cos PZS = tg H tg 2a + \frac{\sin D}{\cos H}\left(\frac{1}{\cos 2a} - 1\right) = tg H tg 2a + \frac{\sin D}{\sin H}\left(\frac{1-\cos 2a}{\cos 2a}\right)$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(PZS - PZA) = \frac{tg H tg 2a + \frac{2 \sin D \sin a}{\cos H \cos 2a}}{2 \sin \tfrac{1}{2}(PZA + PZS)}$$

PZS − PZA erit minimum possibile, si $\sin \tfrac{1}{2}(PZA + PZS) = 1$ h. e. PZS + PZA = 180°, Hinc PZS = 180° − PZA.

Hinc Azymutha debent esse supplementa unum ad alterum, vel AS + AS̄ = 180°; ½(AS + AS̄) = 90° = Am et mS = − mS̄

Sed $\sin PS : \sin PZS = \sin PZ : \sin PSZ$ } hinc $\sin PSZ = \sin PAZ$
$\sin PA : \sin PZA = \sin PZ : \sin PAZ$ } PSZ = PAZ

Hinc anguli Solis et ad initium et ad finem crepusculi sunt inter se aequales, et hoc principio superstruxerunt Maudint et Lagnoli eorum solutiones. — Praeterea $tg PR = \sin RS\, tg PSR = \sin S̄R\, tg PS̄R$ hinc $tg PSR = tg PS̄R$ seu PSR = PS̄R ex quo PS = 180 − PS̄ seu PS = 90 + D ergo PS̄ = 90° − D

ulterius $tg RPS = \frac{tg RS}{\sin PR} = \frac{-tg RS}{\sin PR} = - tg RPS̄$ hinc RPS + RPS̄ = 180° deinde $\cos PZA = -\cos PZS$, hinc

$$tg H tg 2a + \frac{\sin D}{\cos H \cos 2a} = - \frac{\sin D}{\cos H}$$

$\sin H \sin 2a = - \sin D - \sin D \cos 2a = - \sin D(1 + \cos 2a)$

$2 \sin H \sin a \cos a = - 2 \cos^2 a \sin D$, et $\sin D = - \sin H tg a$

et hoc est formula quam Bernoulli dedit sine demonstratione

$\cos PZS = \frac{\sin D}{\cos H} = - tg H tg a$, et $\cos PZA = + tg H tg a$
$= \sin mS̄ = - \sin mS$ nova formula

His suppositis, aequatio prior $\cos AS = \cos AS̄ \cos SS̄$ erit
$\cos AS = \cos 2a \cos 2mS̄$

$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}AS=(1-2\sin^2 a)(1-2\sin^2 m\delta)$$
$$=1-2\sin^2 a-2\sin^2 m\delta+4\sin^2 a\sin^2 m\delta$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}AS=\sin^2 a+tg^2 a\, tg^2 H-2\sin^2 a\, tg^2 a\, tg^2 H=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 H}\left(\cos^2 H+\frac{\sin^2 H}{\cos a}-2tg^2 a\sin^2 H\right)$$
$$=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 H}\left(\cos^2 H+\sin^2 H-\sin^2 H\, tg^2 a\right)=\frac{\sin^2 a}{\cos^2 H}\left(1-\sin^2 D\right)=\frac{\sin^2 a\cos^2 D}{\cos^2 H}\ \text{et}$$
$$\sin\tfrac{1}{2}AS=\frac{\sin a\cos D}{\cos H}\quad\text{et}\quad\frac{\sin\frac{1}{2}AS}{\cos D}=\frac{\sin a}{\cos H}=\sin\tfrac{1}{2}\text{anguli durationis}=\sin\tfrac{1}{2}(P'-P)$$

aequatio celeb. Cagnoli. —

Sed $\sin\frac{1}{2}(P'+P)=\dfrac{\sin 2a}{2\sin\frac{1}{2}(P'-P)\cos H\cos D}=\dfrac{2\cos a\sin a}{\frac{2\sin a}{\cos H}\cos H\cos D}=\dfrac{\cos a}{\cos D}$

Triangulum PSZ dat
$$\cos PZ=\cos S\sin ZS\sin PS+\cos ZS\cos PS$$
$$\sin H=\cos S\cos D\quad\text{et}$$
$$\cos S=\cos A=\frac{\sin H}{\cos D}\quad\text{et triangulo } PAS$$

Priores formulae autem quoque dant
$$\cos PZS\cos PSZ=\frac{\sin D}{\cos H}\cdot\frac{\sin H}{\cos D}=tg D\, tg H=\cos ZPS.$$
hinc in triangulo rectangulo PZS cosinus anguli oppositi lateri 90°
aequatur producto cosinuum alterorum angulorum. —

Per hanc simplicem analysin applicatam ad duo triangula sphaerica et sine ope calculi differentialis, pervenerimus ad hanc solutionem magis completam quam quaelibet cujuscunque autoris qui se hac re occupavit. ———

Determinatio temporis per observationes.

Quum corpora coelestia in continuo versentur motu respectu plani Horizontis, Meridiani etc, ad quae plana eorum situs referri solent, Astronomus apud quamvis observationem, non tantum hunc situm, sed et tempus adsignare debet pro quo hic situs locum habuit. Haec Determinatio temporis ex observationibus pertinet ad maxime praecipuas partes Astronomiae. —

Simplicissimum medium determinationis temporis est methodus altitudinum correspondentium h.e. altitudinum aequalium alicujus astri in utraque parte Meridiani. Sine cognitione hujus ipsius altitudinis, sine cognitione situs astri in coelo, vel observatoris in terra

si

si tantum modo de aequalitate altitudinum et de uniformi motu horologii fuimus convicti, medium temporum horologii inter ambas observationes quoque pro tempore culminationis observati astri assumi potest, quum uti jam prius habuimus, ad aequales altitudines quoque aequales, sed quoad signa contraria, anguli horarii pertinent, posita nimirum declinatione astri constanti. — Hoc tempus culminationis cum illo per calculum enucleato astri noti tempore culminationis dabit statum horologii respectu adhibiti temporis veri, medii vel siderei. Eadem disquisitio alio tempore repetita, dat secundum statum horologii et ex his duobus statibus horologii, motus diurnus vel horarius horologii respectu temporis adhibiti derivari potest. — Ex invento hac ratione statu et motu horologii, dein facile per simplicem proportionem tempus verum cujuscunque alius observationis inveniri potest. —

Posito v.c. tempore horologii in meridie vero

4 Maji $0^h\ 2'\ 27''$
5 — $0\ \ 2\ \ 57$

sequitur statum horologii respectu temporis veri 4. Maji in meridie fuisse $2'\ 27''$ et motus diurnus accelerans $30''$. Si autem 4. Maji aliqua observatio facta esset tempore horologii $10^h\ 14'\ 32''$, dein est

$$24^h : (10^h\ 14'\ 32'') = 30'' : x$$

vel

$$x = 12''.75$$

sive est

$$10^h\ 14'\ 32'' - 2'\ 27 - 12''.75 = 10^h\ 11'\ 52''.25$$

tempus verum observationis.

Si autem declinatio astri, cujus altitudines correspondentes sunt observatae, esset variabilis, uti hoc v.c. apud solem locum habet, anguli horarii aequalibus altitudinibus correspondentes non amplius erunt aequales. Sint nimirum s et s' hi anguli horarii, t et t' tempora altitudinum aequalium, dein tempus culminationis non amplius est aequale $T = \frac{t+t'}{2}$ sed $T \pm \frac{s-s'}{15}$

Ad inveniendam hanc correctionem, sit s, δ, s', δ' angulus horarius et declinatio pro observatis aequalibus altitudinibus h ante et post meridiem

dein

dum est $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$

$\sin h = \sin\varphi\sin\delta'' + \cos\varphi\cos\delta''\cos s'$.

Multiplicando primam aequationem per $\cos\delta''$ et secundam per $-\cos\delta$, earum summa erit

$$\sin h(\cos\delta - \cos\delta'') + \sin\varphi\sin(\delta-\delta'') - \cos\varphi\cos\delta\cos\delta''(\cos s' - \cos s) = 0$$

vel $\sin\frac{s-s'}{2} = \frac{\sin\varphi\sin(\delta-\delta'') - 2\sin h \sin\frac{\delta+\delta''}{2}\sin\frac{\delta-\delta''}{2}}{2\cos\varphi\cos\delta\cos\delta''\sin\frac{s+s'}{2}}$

et valor hic $\frac{s-s'}{2}$ erit quaesita correctio. —

Magis apta ad calculum est sequens expressio

$$s - s' = (\delta-\delta'')\left(\frac{tg\varphi}{\sin s} - \frac{tg\delta\cos s}{\sin s}\right)$$

nimirum prior aequatio sine errore ita scribi potest

$$s-s' = \frac{\sin\varphi(\delta-\delta'') - \sin h\sin\delta(\delta-\delta'')}{\cos\varphi\cos^2\delta\sin s}$$

et substituto pro h valore

$$s-s' = (\delta-\delta'')\left[\frac{\sin\varphi - (\sin\varphi\sin^2\delta + \cos\varphi\cos\delta\sin\delta\cos s)}{\cos\varphi\cos^2\delta\sin s}\right]$$

$$= (\delta-\delta'')\left[\frac{\sin\varphi\cos^2\delta - \cos\varphi\cos\delta\sin\delta\cos s}{\cos\varphi\cos^2\delta\sin s}\right]$$

ex quo allata expressio, vel brevius tantummodo differentiando aequationem pro h respectu s et δ, statim oritur quaesita aequatio. —

Si ergo x est quaesita correctio in tempore et $d\delta$ variatio declinationis in dimidio intervallo θ observationum, erit

$$x = \frac{d\delta}{15}\left(\frac{tg\varphi}{\sin 15\theta} - tg\delta\, ctg\, 15\theta\right)$$

Eodem modo possumus, si sumatur una altitudo vespertino altera matutino tempore, tempus inferioris culminationis solis seu tempus verae mediae noctis invenire. Si iterum est θ dimidium intervallum observationum dim est, si pro meridie erat $s = 15\theta$, pro media nocte

$$s = 180 + 15\theta$$

sive correctio $x = -\frac{d\delta}{15}\left(\frac{tg\varphi}{\sin 15\theta} + tg\delta\, ctg\, 15\theta\right)$

In ambabus expressionibus pro australibus declinationibus $tg\delta$ est quantitas negativa, et si sol est in primo aut quarto quadrante, $d\delta$ est negativum, cujus valor semper ex ephemeridibus sumi potest.

Si horologium in hora respectu adhibiti horologii, accelerat quantitate α'', vel retardat, prior valor quantitatis x in primo casu per $(1+\alpha)$ in-

cundo

in secundo per $1-\alpha$ multiplicari debet. —

Alia est parva correctio hujus determinationis temporis oritur ex consideratione, refractionem post meridiem propter majorem calefactionem atmosphaerae, aliqua quantitate minorem esse, quam ante meridiem, hinc Solem post meridiem aliquo tempus citius pervenire ad eandem altitudinem, et hinc quoque ex observationibus conclusus meridies, erit aliqua quantitate ante verum meridiem. Hae correctio, quae autem fere in omnibus casibus insensibilis est, exprimi potest, uti quilibet facile invenire potest, per $+\frac{dr\cos h}{30\cos\varphi\cos\delta\sin s}$ ubi dr est differentia refractionum pro altitudinibus ante et post meridiem.

Prior correctio propter mutatam declinationem potest in commodis tabulis poni, quae autem jam in fere omnibus operibus Astronomicis occurrunt. —

Exempl. Göttingae 27 Martii 1794 sequentes correspondentes observationes superioris limbi Solis sunt factae:

Observ. altitud.		Tempus horologii ante	post meridiem
22°	55'.5	20h 46' 9"	4h 16' 4"
23	20.5	49' 9"	13 3
23.	25.5	49' 45"	12 28
23	30.5	50' 20"	11 51

Dimidia summa primi et ultimi temporis dat 0h 31' 6".5 pro tempore increscenti meridiei.

Semiintervallum harum observationum est 3h 44' 57".5 vel in arcu 56° 14' 22".5. —

Altitudo poli est $\varphi = 51° 31' 54''$. — Declinatio Solis in meridie (ex ephemeridibus:) est $\delta = 2°\ 47'$ et variatio 23' 26" hinc variatio in 3h 45' est $d\delta = -219''.6$ cum signo minus quia Sol est in primo quadrante longitudinis.

Hinc est $\frac{d\delta}{15}\cdot\frac{tg\varphi}{\sin s} = -22''.17$ — — $\frac{d\delta}{15}\,tg\delta\,ctg\,s = -0.48$

hinc quaesita correctio $\alpha = -21''.69$

et tempus in meridie vero 0h 31' 6".5 − 21".69 = 0h 30' 44".8

Eadem ratione tractari possunt quoque sequentes correspondentes altitudines, sed multo commodius erit, quaerere incorrectum meridiem ex medio omnium observationum, correctionemque tantum semel calculare pro meridie omnium observationum ante et post meridiem, quia pro parvis temporum intervallis hae correctiones fere proportionales sunt temporibus. —

Si horologium inter duas sequentes culminationes Solis non fere 24^h sed v.c. $24^h\ 4'$ daret, prior correctio x adhuc per $\frac{24^h\ 4'}{24^h} = 1.003$ multiplicari deberet. —

Ex una sola observata altitudine invenire tempus. — Resolutio hujus Problematis, quod pro Astronomia practica maximi est momenti, contenta est in sequentibus expressionibus

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

vel posito $h = 90 - z$

$$\sin^2 \frac{s}{2} = \frac{\sin \frac{z-\varphi+\delta}{2} \sin \frac{z+\varphi+\delta}{2}}{\cos \varphi \cos \delta}$$

vel tandem

$$\cos^2 \frac{s}{2} = \frac{\cos \frac{\varphi+\delta+z}{2} \cos \frac{\varphi+\delta-z}{2}}{\cos \varphi \cos \delta}$$

Si observatum sidus est Sol, $\frac{s}{15}$ erit tempus verum quaesitum; pro omnibus ceteris sideribus praeterea nota debet esse ascensio recta α sideris observati et A ascensio recta veri Solis pro momento observationis, sed haec ultima tantum per ambages inveniri potest, quum quaeratur tempus verum observationis. — Assumitur nimirum aliqua approximata ascensio recta Solis, v.c. pro meridie diei observationis, et cum hac quaeritur approximatum tempus verum, et dein pro hoc tempore correspondens ascensio recta Solis, cum qua quaeritur correctum tempus verum; haec methodus toties repeti debet, quoties ad praescriptum finem est necessarium. — Inventis hac ratione s, α et A, erit quaesitum tempus verum $= \frac{\alpha - A + s}{15}$. —

Quantitas h, ante applicationem in calculo, per Parallaxin et Refractionem corrigi debet, uti δ reduci debet per Praecessionem, Aberrationem et Nutationem ad apparentem declinationem. —

Exemp 1. Die 17 Junii 1810 Casani observata est:

Tempore	Altitudo superioris limbi Solis
$4^h\ 41'\ 44''$	$30°\ 15'\ 19''$
$4\ \ 51\ \ 24$	$28\ \ 53\ \ 49$

Quum declinatio Solis in vicinia solstitii lentissime mutatur, potest assumi pro $4^h\ 46'$ $\delta = 23°\ 23'\ 24''$. — Altitudo poli est $\varphi = 55°\ 47'\ 39''$ hinc dat prima observatio

distantia a Zenith	$59°$	$44'$	$41''$
Refractio — +		1	37
Radius Solis		15	47
Parallaxis			7
$z =$	$60°$	$1'$	$58''$

eadem

Eadem ratione pro 2 observatione $z = 61° \; 23' \; 34''$

ex quo anguli horarii sunt $70° \; 37' \; 20''$
$73 \; \; 2 \; \; 32$

et in tempore $4^h \; 42' \; 29''$ } temporis veri
$4 \; \; 52 \; \; 10$

Hinc horologium respectu temporis veri plus dat $45''.5$. —

Pro hoc momento tempus medium $17''$ majus est tempore vero, hinc dat horologium $62''.5$ plus respectu temporis medii. —

Exemp. 2. Die 31 Martii 1790 Viennæ observata est altitudo Reguli (α Leonis)

$54° \; 41' \; 8''$ tempore $9^h \; 2' \; 20''$

Refractio — 47

$90 - z = 54° 40' 21''$

$\delta = 12° \; 59' \; 28''$, $\varphi = 48° \; 12' \; 36$

hinc $s = -3° \; 19' \; 38''$ negative quia observatio facta est in orientali parte Meridiani. —

Quum horologium fere jam dedit tempus verum, pro $9^h \; 2' \; 20''$, est ascensio recta veri Solis (: ex ephemeridibus) $A = 0^h \; 41' \; 29''.5$

præterea ascensio recta stellæ — $\alpha = 9^h \; 57' \; 11''.0$

hinc tempus verum observationis $\alpha - A + \frac{s}{15} = 9^h \; 2' \; 23''.0$

vel horologium dedit $3''$ minus respectu temporis veri. —

Pro stellis fixis, commodissimum est, si non tempus verum solare sed tempus sidereum observationis quæritur. —

Si nimirum s est secundum priora calculatus angulus horarius, α apparens ascensio recta sideris, dein tempus siderale observationis est $\alpha + s$; et ex hoc tempore siderali, si necessarium est, secundum priora, tempus verum et medium inveniri potest. —

Exemp. 1819 11. Maji erat observata a refractione liberata, distantia a Zenith α Orionis

$73° \; 4' \; 46''.7$ tempore horologii $10^h \; 39' \; 55''.5$

Hujus sideris apparens ascensio recta est $\alpha = 86° \; 20' \; 30''.0$

apparens declinatio $\delta = 7° \; 21' \; 56''.2$ — Altitudo poli $\varphi = 45° \; 24' \; 2''.5$

$$\begin{array}{rrrrl} \text{hinc} \quad s = & 73° & 19' & 46.6 & \\ \alpha = & 86 & 20 & 30.0 & \\ \hline & 159° & 40' & 16''.6 & = 10^h \; 38' \; 41''.11 \text{ tempus siderale} \\ & & & & \;\; 10 \;\; 39 \;\; 55.5 \text{ tempus horologii} \\ \hline & & & & - \;\; 1' \; 14''.39 \text{ correctio horologii} \end{array}$$

Eodem modo immediate tempus medium observationis inveniri potest. Si nimirum est α, ut prius, apparens ascensio recta sideris, et M ascensio recta medii solis pro meridie diei observationis (ex ephemeridibus) ambae in tempore expressae, et angulus horarius s secundum priora quoq inventus est, dein est primum approximatum tempus medium observationis
$$\mathfrak{T} = \alpha - M + \frac{s}{15}$$
et haec expressio esset perfecte accurata, si sol medius a meridie diei observationis suam ascensionem rectam non mutasset, vel quod idem est si inter meridiem et observationem tempus medium esset aequale tempori siderali. Quum autem hoc non locum habeat, prior quantitas $\mathfrak{T}$, quae in ~~tempore~~ siderali expressa est, ad tempus medium reduci debet. – Erit igitur tempus correctum medium observationis, secundum priora
$$\mathfrak{T} - 0.0027304\,\mathfrak{T}$$
ubi $\mathfrak{T}$ est expressum in horis earumq partibus.

Exemp. Varsten Nübuhr observavit Alexandriae 11. Octobris 1761 tempore $10^h\ 56'\ 25''$ distantiam a zenith Aldebarani (α Tauri) $61^\circ\ 27'\ 30''$

error instrumenti erat $-\ 3'\ 0''$

ascensio recta apparens stellae $\alpha = 4^h\ 22'\ 16''.35$
declinatio apparens $\delta = 16^\circ\ 0'\ 39''.65$
altitudo poli $\varphi = 31^\circ\ 12'\ 13''.0$
Refractio $1'\ 44''.2$
$M = 13^h\ 20'\ 43''.926$

hinc $z = 61^\circ\ 26'\ 14''.2$

et ex hoc $s = 65^\circ\ 56'\ 13''.93 = 19^h\ 36'\ 15''.074$
$4\ \ 22\ \ 16.35$

Al. Zenith $= 23^h\ 58'\ 31''.424$
$M = 13\ \ 20\ \ 43.926$
$\mathfrak{T} = 10\ \ 37\ \ 47.498$
$-\ \ 1\ \ 44.485$

tempus medium observat. $= 10^h\ 36'\ 3''.013$

vel horologium dat $20'\ 21''.987$ plus respectu temporis medii. –

post

Post duas dies 13. Octob. tempore $12^h\ 23'\ 34''$ observavit distantiam a zenith ejusdem stellae $= 41°\ 34'\ 50''.5$

$$\alpha = 4\ 22\ 16.436$$
$$\delta = 16\ 0\ 39.72$$
$$M = 13\ 28\ 36.047$$

hinc $\quad s = 42°\ 36'\ 22''.378$

ergo $\quad \alpha - M + s = 12^h\ 3'\ 14''.895$
$$-\ 1\ 58.486$$

tempus medi: $= 12^h\ 1'\ 16''.409$

horologium dedit $\quad 22'\ 17''.591$ plus respectu temp. med. —

Ut haec methodus commode saepius repeti possit, quaeri potest pro pluribus electis angulis horariis apparens altitudo sideris h', instrumentum poni ad hanc altitudinem, et tempus horologii cum assumto angulo horario comparari, et quo status horologii prodit. Si v. c. pro Sole h est vera altitudo centri, h' apparens altitudo superioris limbi, δ declinatio centri, et φ altitudo poli, dein est pro quolibet angulo horario

$$tg\, a = \cos s\, ctg\, \varphi$$
$$\sin h = \frac{\sin \varphi}{\cos a} \sin(\alpha + \delta)$$

$$h' = (h + \text{radio}\ \odot) + \text{Refractione} - \text{Parallaxi}$$

ubi refractio pro vera altitudine $h + \text{rad:}\ \odot$, non pro apparenti quaeri debet. —

Si calculantur pro determinato loco in aliqua tabella valores quantitatum a et $\log \frac{\sin \varphi}{\cos a}$ a 5 ad 5 minuta prima, per plures horas et ante et post meridiem, applicatio hujus methodi, magnopere abbreviatur.

Non inutile erit scire gradum exaktitudinis, quem obtinere possumus per calculum temporis absoluti. —

Nos habuimus $\quad \sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s.$ —

Differentiando hanc aequationem, assumendo tantum h et s qua variabiles erit

$$ds = \frac{dh \cos h}{\cos \varphi \cos \delta \sin s}$$

designando per ω Azymuthum, erit quoque

$$\frac{\cos h}{\sin s} = \frac{\cos \delta}{\sin \omega} \quad \text{hinc} \quad ds = \frac{dh}{\cos \varphi \sin \omega}.$$ —

Ex hoc sequitur, pro eodem valore quantitatis dh, variationem anguli horarii ds esse eo minorem, quo major est $\sin \omega$. Sed hic valor erit in suo maximo, si $\omega = 90°$. Hinc maxime favorabile momentum ad determinationem anguli horarii locum habet, si astrum est in suo primoverticali. Sed non semper est possibile observare astrum hoc favorabili momento; sed eligendo aliquod astrum, cujus declinatio est parva, et quod fere 45° distat a meridiano, magna quoque cum praecisione determinari potest tempus. — Formula praecedens hac ratione quoque scribi potest:

$$dh = ds \sin \omega \cos \varphi$$

et haec formula dat quoque demonstrationem principii, quo innititur methodus actualis observationis, nimirum altitudines astrorum, in aliqua distantia a Meridiano, crescere proportionaliter temporibus, et hinc medium variarum altitudinum correspondere exacte epochae quoque mediae. Et revera, si $\sin \omega$ non multum differt ab unitate, et series observationum non per admodum longum tempus durat, uti de 8' usque 10', variatio non magnum habet influxum in valorem factoris $\sin \omega \cos \varphi$, vel quod idem est, variatio altitudinis crescit proportionaliter cum variatione temporis ds. Sed si $\sin \omega$ est admodum parvum, tunc valor quantitatis dh, crescit uti quadratum temporis, ~~ipsi x~~ quia in hoc casu, ω est proportionale ipsi s. Generatim ad cognoscendam durationem observationum altitudinum seu distantiarum a Zenith, calculatur ex formula

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$$

valor quantitatis s correspondens valori medio quantitatis h; tunc faciendo variare s dimidio intervallo hujus seriei, determinatur h' per

$$\sin h' = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s'$$

ubi s' est novus angulus horarius; hac ratione habetur $h' - h = dh$; tunc calculatur quoque dh per formulam prius adductam, sumendo pro s et h ~~suos~~ eorum valores medios, si tunc hi duo valores consentiunt usque ad $\frac{1}{100}$ minuti secundi, media ~~differentia~~ distantia considerari potest qua correspondens epochae mediae observationum.

Quand

Quando desideramus tempus verum cum magna precisione, et habemus complures factas observationes, vel si observationes instituuntur cum circulo repetitore, binae et binae observationes disponantur, ut habeatur una distantia media et unum tempus medium datum per pendulum; hac ratione v. c. si habentur decem conjunctae observationes, habentur quoque decem correctiones temporis, quarum medium dein erit correctio pro momento medio inter omnes observationes. — (Uniformitas variationis distantiarum et temporis.)

Inter methodos propositas ad reductionem omnium distantiarum zenithalium observatarum ad tempus medium inter omnia tempora penduli, potissimum notatu digna est illa, propter suam elegantiam et simplicitatem, quam dedit Soldner in Berliner Jahrbuch pro anno 1818. —— Sit φ altitudo poli, δ declinatio, ω azimuthum Solis, s angulus horarius, a angulus inter verticalem et circulum declinationis, z distantia a zenith, erit

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s$$

Assumamus variabilem z crescere quantitate Δz, angulus horarius s, qui est functio hujus variabilis, crescit Δs. — Quantitates φ et δ considerantur qua constantes, et si quantitas δ non maneat constans (compensantur in utroque medio.)

Per Theorema Taylorianum est

$$\Delta z = \frac{dz}{ds}\Delta s + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\Delta s^2}{1.2} + \frac{d^3z}{ds^3}\frac{\Delta s^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

differentiando bis aequationem priorem, erit:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\sin s \cos\varphi \cos\delta}{\sin z}$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\cos s \cos\varphi \cos\delta}{\sin z} - \frac{\cos z \sin s \cos\varphi \cos\delta}{\sin^2 z}\cdot\frac{dz}{ds}$$

praeterea triangulum sphaericum inter Zenit, polum et locum Solis dat

$$\sin a \cos\delta = \cos\varphi \sin\omega$$
$$\sin s \cos\varphi = \sin z \sin a$$

hinc

hinc $\frac{dz}{ds} = \sin a \cos\delta$ $\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\cos s \cos\varphi \cos\delta}{\sin z} - \frac{\cos z \cos\delta \sin a \cos\varphi \sin\omega}{\sin z}$

Sed $\cos s = \sin a \sin\omega \cos z - \cos a \cos\omega$, hinc

$$\frac{d^2z}{ds^2} = -\frac{\cos\varphi \cos\delta \cos\omega \cos a}{\sin z}$$

et quo $$\Delta z = \frac{\Delta s \cos\varphi \cos\delta \sin s}{\sin z} - \tfrac{1}{2}\Delta s^2 \frac{\cos\varphi \cos\delta \cos a \cos\omega}{\sin z} + \text{etc}$$

Nos negligimus terminum tertii ordinis, quia fere in omnibus casibus, contenti possumus esse cum hoc gradu approximationis. Distantia zenitalis correcta hinc erit hujus formae

$$z + \Delta z = z + a\Delta s - b\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''} + \text{etc}$$

posito nimirum $\frac{1}{2}\Delta s^2 = 2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s$

Quaelibet alia distantia zenitalis, quam huic correspondens seminintervallo, simili modo reduci potest, earumque summa, si designetur per symbolum sequens $\Sigma(z+\Delta z)$ ~~etc~~ erit:

$$\Sigma(z+\Delta z) = \Sigma z + a\Sigma\Delta s - b\,\Sigma\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''} + \text{etc} -$$

Sit O summa distantiarum observatarum $= \Sigma(z+\Delta z)$ et n numerus observationum, habebimus pro distantia media:

$$\frac{O}{n} = \frac{\Sigma z}{n} + \frac{a}{n}\Sigma\Delta s - \frac{b}{n}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''} + \ldots\ldots$$

Si autem omnes observationes referantur ad momentum medium, terminus primus, proportionalis variationi temporis, in prima potentia constabit ex duabus partibus aequalibus sed diversis signis affectis, nimirum pro mediis et primis observationibus signo plus pro secundis signo minus affectis, hinc hic terminus evanescit, quod quoque experientia confirmat. Ergo simpliciter erit:

$$\frac{\Sigma z}{n} = \frac{O}{n} + \frac{b}{n}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''}$$

Distantia $\frac{\Sigma z}{n}$ quae locum habet pro momento medio temporum, differt igitur a distantia media observata quantitate $\frac{b}{n}\Sigma\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''}$ Coëfficiens $b = \frac{\cos\varphi \cos\delta \cos a \cos\omega}{\sin z}$ continet quantitates a et ω, quae

ante

ante omnia debent determinari, quod facile fit ex aequationibus

$$\sin a = \frac{\sin s}{\sin z}\cos\varphi \quad \text{et} \quad \sin w = \frac{\sin s}{\sin z}\cos\delta$$

et quia angulus s datus est per pendulum, omnia erunt nota pro determinatione coëfficientis b. – Quantitas $\sum \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''}$ in tabulis poni potest, uti revera jam existunt. Quantitas Δs obtinetur sumendo differentiam momenti medii et cujusvis temporis observationis. – Attendere quoque debemus ad determinationem signi quantitatis b, h.e. attendere an anguli a et w sint obtusi aut acuti; In nostro climate, angulus a est semper acutus, sed azimutum per magnam partem diei est obtusum; semper est obtusum si declinatio Solis est Australis, sed si est borealis, azimutum w potest esse acutum, si Sol non magnopere est elevatus supra Horizontem, tandem hoc azimutum semper est Rectus, si Sol transit per primum verticalem. Omnis incertitudo tollitur per formulam $\cos s = tg\,\delta\, ctg\,\varphi$, per quam innotescit hora diei, quando angulus w est rectus. –

Altera methodus procedendi secundum Soldner, est, calculandi una vice s, a, et w datis $\frac{b}{n}$, δ, et φ; declinatione semper assumta illa, quae correspondet mediae seriei. Angulus horarius s, seu tempus verum, ad quod hac ratione pervenimus, tantum est approximatus; ille corrigitur, inquirendo effectum, quem potest producere in angulo horario ista parva variatio distantiae Zenitalis $\frac{b}{n}\sum\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{\sin 1''}$

Ex praecedentibus habetur

$$ds = \frac{dz \sin z}{\cos\varphi\cos\delta\sin s}$$

pro dz autem poni potest ejus valor $\sum\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{n\sin 1''}\cdot\frac{\cos\varphi\cos\delta\cos a\cos w}{\sin z}$

erit

$$ds = \sum\left(\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\Delta s}{n\sin 1''}\right)\frac{\cos a\cos w}{\sin s}$$

Correctio temporis approximati erit dein $\frac{ds}{15}$. – Magna necessaria est attentio in calculo hujus ultimae formulae ad signa functionum trigonometricarum. Notari potest $\sin s$ esse positivum post transitum per Meridianum, negativum ante hunc transitum. –

Delambre comparavit numerice methodum ordinariam cum illa celeb. Soldner, et videbat esse fere eandem simplicitatem et exactitudinem, concludere correctionem mediam penduli ex resultatis partialibus per observationes conjunctas quatuor et quatuor. —
Ex. g. Tempus medium inter viginti observationes est inventum $3^h\ 38'\ 36''.95$ in loco cujus distantia poli a Zenith erat $39^\circ\ 10'\ 20''.1$; distantia zenitalis media solis, correcta a refractione et parallaxi $51^\circ\ 14'\ 7''$; declinatio Solis pro momento intermedio $21^\circ\ 26'\ 40''$; ex hoc concludi potest per methodum ordinariam tempus correspondens

distantiis mediis	$3^h\ 36'\ 38''.13$
Horologium	$3\ 38\ 36.95$
hinc correct. resultat.	$+\ 1'\ 58''.82$

si separatim observationes quatuor et quatuor, media correctio erit $-\ 2''\ 1''.3$.

Ex hoc sequitur, correctionem mediam penduli, correspondentem ad horam intermediam esse exactissime $2'\ 1''.3$. Hinc istae viginti observationes in unam solum conjunctae producunt errorem $2''.5$. Calculando binas et binas observationes, correctio penduli est $2'\ 1''.55$. Formula celeb. Soldner dat hoc ultimum resultatum ad $0''.07$ (Vide Connaissance des Tems de 1820)

Methodo pro statu admodum commoda status penduli ex temporibus, ubi duae notae stellae unam eandem ignotam altitudinem habent, determinari potest.
Sint α, δ, ascensio recta et declinatio in motu diurno praecedentis stellae, α' et δ' pro sequenti stella, s tempus siderale in gradus mutatum intervalli observationum, θ angulus amborum circulorum horariorum, in quibus stellae observatae sunt, dein est, si stella in orientaliori circulo horario prius observata est

$$\theta = \alpha' - \alpha + \mathfrak{J}$$

in casu contrario $\quad \theta = \alpha' - \alpha - \mathfrak{J}$

Si s est angulus horarius stellae in occidentaliori circulo horario, $\theta - s$ erit angulus horarius alterius stellae, et si h est communis altitudo habemus $\quad \sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos s = \sin\varphi \sin\delta' \cos\varphi \cos\delta' \cos(\theta - s)$

ex quo

ex quo $(\cos\delta' - \cos\delta''\cos\theta)\cos s - \cos\delta''\sin\theta\sin s = (\sin\delta'' - \sin\delta)\,tg\,\varphi$

Hinc fit $\frac{\cos\delta' - \cos\delta''\cos\theta}{\cos\delta''\sin\theta} = tg(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)$ dein est

$\cos\delta''\sin\theta\,[tg(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)\cos s - \sin s] = (\sin\delta'' - \sin\delta)\,tg\,\varphi$ et

$\sin(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma-s) = \frac{(\sin\delta''-\sin\delta)\,tg\,\varphi\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)}{\cos\delta''\sin\theta}$

Ad calculum logarithmicum quantitatis γ est

$\frac{\cos\delta'}{\cos\delta''\sin\theta} = tg(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma) + ctg\,\theta = \frac{\cos(\tfrac{1}{2}\theta-\gamma)}{\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)}$

et $\frac{\cos\delta'-\cos\delta''}{\cos\delta'+\cos\delta''} = \frac{\cos(\tfrac{1}{2}\theta-\gamma)-\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)}{\cos(\tfrac{1}{2}\theta-\gamma)+\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)}$ h. e.

$tg\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta')\,tg\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta') = tg\tfrac{1}{2}\theta\,tg\,\gamma$ hinc

$tg\,\gamma = tg\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta')\,tg\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta')\,ctg\tfrac{1}{2}\theta$

praeterea

$\frac{\cos\delta'-\cos\delta''}{\cos\delta''} = \frac{\cos(\tfrac{1}{2}\theta-\gamma)-\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)}{\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)} = \frac{2\sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\gamma}{\cos(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma)}$

hinc fit

$\sin(\tfrac{1}{2}\theta+\gamma-s) = \frac{tg\,\varphi\sin\gamma(\sin\delta''-\sin\delta)}{\cos\tfrac{1}{2}\theta(\cos\delta'-\cos\delta'')} = \frac{tg\,\varphi\sin\gamma\,ctg\tfrac{1}{2}(\delta''+\delta')}{\cos\tfrac{1}{2}\theta}$

$= \frac{tg\,\varphi\cos\gamma\,tg\tfrac{1}{2}(\delta''-\delta')}{\sin\tfrac{1}{2}\theta}$. —

Exemp. Pro 1815 12 Martii

α Andromedae 21h 33′ 26″ tempus penduli sideralis
α Lyrae 22 5 21

Positiones apparentes harum stellarum sunt

$\alpha = 18^h\ 30'\ 28''.96$, $\delta = 38°\ 37'\ 6''.6$
$\alpha' = 23\ 58\ 33.33$, $\delta' = 28\ 2\ 14.8$

hinc $\theta = 89°\ 59'\ 50''.55$
$\varphi = 51°\ 31'\ 54''$
hinc $\gamma = -3°\ 29'\ 4''.93$
$s-\tfrac{1}{2}\theta-\gamma = 9\ 28\ 9.93$
$\tfrac{1}{2}\theta+\gamma = 41\ 30\ 50.34$
$s = 50°\ 59'\ 0''.27 = 3^h\ 23'\ 56''.02$
$\alpha = 18\ 30\ 28.96$

tempus sider. observ. α Lyrae = 21h 54′ 24″.98
Tempus penduli 22 5 21.00
Correctio penduli = −10′ 56″.02 (vide Berl. Jahrbuch 1796 p. 132)

Quum in magnis latitudinibus geographicis Sol, qui potissimum ad determinationem temporis et per correspondentes et per simplices altitudines adhiberi solet, non amplius sit aptus ad observationes altitudinum uti vidimus in praecedenti deductione potissimum idonei momenti, hujus loco distantia solis ab aliquo ~~quoad~~ positionem suam accurate determinato objecto terrestri observari, et hac ratione tempus determinari potest. (Vide monatliche Correspondenz III. B.)

Sit φ altitudo aequatoris, A. Z azimutum et distantia a zenith objecti terrestris, quae ambae quantitates ex observationibus qua notae praesupponuntur, dein invenitur angulus horarius S et distantia a polo P per sequentes expressiones

$$tg\, x = \frac{\sin \frac{\varphi - Z}{2}}{\sin \frac{\varphi + Z}{2}}\, tg \frac{A}{2}$$

$$\sin \frac{P}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi + Z}{2}}{\cos x} \cos \frac{A}{2}$$

$$\sin S = \frac{\sin A \sin Z}{\sin P}$$

Si nunc Δ sit distantia ~~alicujus~~ astri noti, cujus distantia a polo est p et angulus horarius s, est observata, s invenitur ex aequatione $\sin \frac{s - S}{2} = \sqrt{\frac{\sin \frac{\Delta + P - p}{2} \sin \frac{\Delta + p - P}{2}}{\sin P \sin p}}$

Si $\frac{s - S}{2}$ fere est 90° melius est adhibere similem expressionem pro $\cos \frac{s - S}{2}$ Vide Berl Jarbuch 1814 p. 99. et 1819 p. 129)

Necessarium quoque est respicere refractionem objecti terrestris et astri. Prima facit, ut quantitates S et P revera non sint constantes. Sed refractio terrestris admodum est incerta, et ejus variatio praecipue si objectum non est in magna distantia ab observatore, tam parva, ut fere in omnibus casibus negligi possit. Refractio sideris autem duplici modo respici potest. Correctio nimirum vel ad distantiam a polo p et ad angulum horarium applicari potest, vel ad apparentem distantiam Δ ut mutetur in veram Δ'.

Sint p' s' hae quantitates refractione affectae, π angulus parallacticus,

$$dz = \text{Refract.} - \text{Parallaxi altitud. dein est}$$
$$p' - p = dz \cos z \quad \text{et} \quad s' - s = dz \frac{\sin \pi}{\sin p}.$$

Pro secundo casu queritur $\Delta' - \Delta$ etc.
Hac omnia supponunt azimutum objecti terrestris quasi notum; in sequentibus videbimus, quomodo hoc azimutum ex observationibus determinari possit. Hic notari potest, quantitates S et P invenire posse, sine cognitione azimuti, ex duabus observatis distantiis hujus objecti a noto astro et intervallo temporum. —
Redibimus ad resolutionem hujus problematis, quando sermo erit de determinatione altitudinis poli et temporis veri ex observatis duabus distantiis a Zenith alicujus astri et tempore intermedio. —
Simplicissimum uti et certissimum medium determinationis temporis per observationes est illud per tubum meridianum qui sit dictum culminatorium, h. e. per tubum, qui in axi horizontali accurate in plano Meridiani mobilis est. Observatur nimirum transitus stellarum in filis verticalibus, que sunt in foco ambarum lentium, et inveniendo hac ratione tempus culminationis, tantummodo hoc tempus cum calculato tempore medio aut siderali culminationis comparari debet, ut eluceat error penduli. Sed magis complicata est hæc methodus, si instrumentum ipsum erroribus est obnoxium, uti hoc semper locum habet, si v. c. axis horizontalis tubi aliquam inclinationem versus horizontem habeat, vel axis optica tubi aliquam inclinationem versus Meridianum habeat, et nos videbimus in nostris prælectionibus practicis, quomodo isti errores eruti in calculum vocari possunt, et quomodo generatim istud instrumentum, quod pro Astronomia maximi est momenti adhiberi debeat. —
Si autem observator non est instructus culminatorio, omnes priores methodi sunt admodum molestæ. — celeb. Olbers proposuit aliam methodum, quæ propter suam facilitatem et præcisionem in applicatione potissimum notatu digna est. Si nimirum in vicinia loci,

abi

ubi observationes fiunt, est altus perpendicularis murus, vel aliud verticale objectum terrestre, v.c. conductor, turris; observari possunt disparitiones stellarum fixarum, et si tubus semper ponitur in eodem loco, si v.c. notentur loca pedum, evidens est, stellas, quamdiu ascensio recta et declinatio maneant eadem, quolibet die eodem tempore disparere. — Si tunc aliquo die correctio penduli v.c. per altitudines correspondentes est inventa, notum est tempus siderale vel medium harum disparitionum, pro hoc die observationum, et ex hoc facile dein tempus pro aliis diebus inveniri potest. —

Omnes ceteræ methodi determinationis temporis non magni sunt utilitatis pro praxi; tantummodo adhuc unum problema hic adferam, quod sæpius magna cum commoditate adhiberi potest.

Uti jam sæpius habuimus, est

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos s$$

et pro alia stella $\sin h' = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos s'$

Multiplicando primam harum aequationum per $\cos \delta'$ secundam per $\cos \delta$, erit earum summa

$$\sin h \cos \delta' + \sin h' \cos \delta - \sin \varphi \sin(\delta + \delta') = \cos \varphi \cos \delta \cos \delta' (\cos s + \cos s') \text{ ----- } (1)$$

et earum differentia

$$\sin h' \cos \delta - \sin h \cos \delta' + \sin \varphi \sin(\delta - \delta') = \cos \varphi \cos \delta \cos \delta' (\cos s' - \cos s) \text{ ---- } (2)$$

Dividendo hanc aequationem (2) per (1) erit

$$\operatorname{tg} \frac{s+s'}{2} \operatorname{tg} \frac{s-s'}{2} = \frac{\sin h' \cos \delta - \sin h \cos \delta' + \sin \varphi \sin(\delta - \delta')}{\sin h \cos \delta' + \sin h' \cos \delta - \sin \varphi \sin(\delta + \delta')} \text{ ------- } (3)$$

Aequatio (2) dat quoque si $\delta' - \delta$ est parvum,

$$\sin \frac{s+s'}{2} \sin \frac{s'-s}{2} = \frac{2 \cos \delta \cos \frac{h+h'}{2} \cos \frac{h-h'}{2} + (\delta' - \delta)(\sin \varphi - \sin h \sin \frac{\delta' + \delta}{2})}{2 \cos \varphi \cos \delta \cos \delta'} \text{ --- } (4)$$

Si observationes institutæ sunt in eadem vel in diversis partibus Meridiani, in primo casu $s'-s$, in secundo $s'+s$ est datum, si nota sunt tempora penduli observationum, hinc pro quolibet casu ex aequationibus (3) vel (4) singuli anguli horarii s et s' vel tempora observationum innotescunt. —

Si $\delta = \delta'$ pro una eademque fixa, ultima aequatio erit:

$$\sin\frac{s+s'}{2}\sin\frac{s'-s}{2} = -\frac{\sin\frac{h-h'}{2}\cos\frac{h+h'}{2}}{\cos\varphi\cos\delta}$$

et per hanc aequationem invenitur tempus ex duabus altitudinibus ejusdem stellae et ex intervallo temporis observationum. —

Si tandem in aequatione (2) ponantur altitudines aequales, erit:

$$\sin\frac{s-s'}{2} = \frac{\sin\varphi\sin(\delta-\delta') + 2\sin h\sin\frac{\delta+\delta'}{2}\sin\frac{\delta-\delta'}{2}}{2\cos\varphi\cos\delta\cos\delta'\sin\frac{s+s'}{2}}$$

ex quo correctio $\frac{s-s'}{2}$ altitudinum correspondentium invenitur.

Ex aequatione (4) quilibet facile videt, ad determinationem temporis per hanc methodum, neque declinationem neque altitudinem poli, neque altitudines ipsas cum magna praecisione notas esse debere, sed tantummodo differentiam altitudinum, et differentiam declinationum quam accuratissime determinatam esse debere, ut quoque pro angulo horario accuratum resultatum evadat. —

Determinatio altitudinis poli per observationes.

Altitudo poli primo ex qualibet observata altitudine noti sideris inveniri potest, si notum est tempus observationis h. e. angulus horarius sideris; hac ratione in aequatione sequenti, tantum φ est ignotum, nimirum

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$$

ponatur $tg\,x = \cos s\, ctg\,\delta$ erit

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\, tg\,x\, tg\,\delta$$
$$= \sin\varphi\sin\delta + \frac{\cos\varphi\sin\delta\sin x}{\cos x} \quad \text{et}$$
$$\sin h\cos x = \sin\varphi\sin\delta\cos x + \cos\varphi\sin\delta\sin x$$
$$= \sin\delta(\sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x) = \sin\delta\sin(\varphi+x)$$

hinc $\sin(\varphi+x) = \frac{\sin h\cos x}{\sin\delta}$

Si observatae sunt altitudines correspondentes, hae dant tempus culminationis astri et angulos horarios, qui pertinent ad quamlibet altitudinem, tunc omnia, quae sunt necessaria ad resolutionem problematis. —

Differentiando priorem aequationem respectu quantitatum h, s et φ, erit

introducendo $\sin\omega = \frac{\cos\delta \sin s}{\cos\varphi}$ et $\cos\omega = \frac{\sin\varphi \sin h - \sin\delta}{\cos\varphi \cos h}$

$$d\varphi = \frac{-dh - d\delta \cos\varphi \sin\omega}{\cos\omega}$$ ubi ω azimuthum est;

et hac ultima ~~aequatione~~ expressione sequitur, observationes altitudinum admodum aptas esse in vicinia Meridiani. —

Si altitudo sideris ipso momento ~~[illegible]~~ culminationis observata fuerit, dein est, si z vocetur error instrumenti, refractione et parallaxi correcta distantia a Zenith et δ declinatio apparens sideris in parte australi Zenithi

$\varphi = z + \delta$ ubi australes declinationes sunt negativae; et in parte boreali Zenithi pro superiori culminatione

$\varphi = \delta - z$

pro inferiori $\varphi = 180 - \delta - z$

Apud solem et aliis sideribus notabilis radii, observatur altitudo superioris vel inferioris limbi, quia centrum non cum exactitudine observari potest. —

Exemp. 1809 8. Febr. Cracoviae

observata distan a Zenith superioris limbi solis

		64°	50'	54."28
	error collim. —		3	13.4
		64°	47'	40."88
Bar. 27" 6.'''5 par.	correct refract. +		2	9.00
Therm Reaum. -4.0	radius (ephemerid.) +		16	15.36
	parallaxis altitudinis —			7.78
	z =	65°	5'	57."46
	δ =	−15	2	16.70
	φ =	50°	3'	40."76

Si praeter altitudinem poli etiam error collimationis instrumenti esset ignotus, dein necessariae sunt duae observationes in diversis partibus Zenithi ad determinationem harum quantitatum. —

Si z, δ est distantia a zenith et declinatio sideris in parte australi zenithi, z', δ' in parte septemtrionali, dein haberemus, si error collimationis esset zero $\varphi = z + \delta$, $\varphi' = \delta' - z'$

ultima aequatio pro superioribus culminationibus; pro inferioribus loco δ' scribi debet $180 - \delta'$. —

Si nunc instrumentum omnes distantias a zenith v. c. dat quantitate a minores, ubi hinc est a error collimationis, deinde est, si nominemus Φ correctam altitudinem poli,

$$\Phi = z + a + \delta, \quad \Phi = \delta' - (z' + a)$$

Eliminando quantitatem a, erit

$$\Phi = \frac{\varphi' + \varphi}{2}$$

et eliminando Φ, est $a = \frac{\varphi' - \varphi}{2}$

vel vera altitudo poli est dimidia summa, et error collimationis dimidia differentia superius inventarum incorrectarum altitudinum poli. —

Exemp. 1808 30. Sept. Cracoviae in australi parte Meridiani

	observata dist. a zenith	apparens δ
30 δ Aquilae	47° 20' 52''.1	2° 44' 57''.3
38 μ Aquilae	43 6 31.7	6 59 23.3
γ Aquilae	39 56 6.2	10 9 47.9

Barom. 27'' 1'''.6 Par.
Therm. + 8°.0 Reaum.

2. Octob. ejusdem anni in septemtrionali parte Meridiani

δ ursae minor.	36° 33' 24''.9	86° 34' 38''.1
50 Draconis	25 11 43.0	75 12 31.7
52 Υ —	21 1 58.5	71 2 51.1

Barom. 27'' 5'''.6
Therm. + 4°.8

Prima observatio dat	47° 20' 52''.1
correcta refractio	1 0.4
δ	2 44 57.3
Altitudo poli	50° 6' 49''.8

Eadem ratione de ceteris. —

Hinc

Hinc est ex tribus primis ~~aequationibus~~ observationibus

Altitudo poli 50° 6' 49."8
47.0
40.6

Medium φ = 50° 6' 45."8

Ex tribus ultimis Altitudo poli 50° 0' 30."6
21.7
30.5

Medium φ' = 50° 0' 27."6

Hinc vera altitudo poli est $\varphi = \frac{\varphi'+\varphi}{2} = 50° \ 3' \ 36."7$

Error collimationis $a = \frac{\varphi'-\varphi}{2} = - 3' \ 9."1$

quae quantitas ab omnibus distantiis a zenith subtrahi debet.

Applicatio hujus methodi est quam simplicissima et maxime secura, si australes et boreales altitudines sunt ejusdem magnitudinis, quia deinde incertitudo applicatae Refractionis evanescit; sed quoque ad alias diversae magnitudinis altitudines, uti ex exemplo vidimus, adhiberi potest.

Si eadem stella bis inverso instrumento observatur ita, ut subdivisus limbus in prima observatione v.c. versus Orientem, in secunda versus Occidentem spectet, error collimationis in ambabus observationibus habebit eundem valorem, sed diversa signa, hinc sufficient duae tales observationes ad determinationem hujus erroris, sed nondum verae altitudinis poli, quae ultima supponit quoque cognitionem declinationis.

Sint e.g. h. h' observatae altitudines sideris inversis positionibus instrumenti, ambae in inferiori culminatione, deinde est vera altitudo poli, si a est error collimationis

$$\varphi = h - a + 90 - \delta\,; \quad \varphi' = h' + a + 90 - \delta$$

ex quo error collimationis $a = \frac{h-h'}{2}$

et vera altitudo poli est $\frac{\varphi+\varphi'}{2} = \frac{h'+h}{2} + 90 - \delta$

supposito, δ habere in ambabus observationibus eundem valorem.

Ut altitudo poli etiam independenter a declinatione inveniatur,

sint

Sint H, H' aliæ duæ altitudines ejusdem stellæ diversis positioni-
bus instrumenti, et ambæ in superiori culminatione, deinde est iterum

$$\Phi = H - a - (90 - \delta)$$
$$\Phi' = H' + a - (90 - \delta)$$

hinc error collimationis $\frac{H - H'}{2}$ et altitudo poli $\frac{\Phi + \Phi'}{2} = \frac{H + H'}{2} - (90 - \delta)$

Si conjugantur hæc resultata cum prioribus, deinde est ex omnibus
quattuor observationibus

error collimationis $a = \frac{(H - H') + (h - h')}{4}$

et vera altitudo poli $A = \frac{(H + H') + (h + h')}{4}$

Si sidus culminat supra polum in parte australi Zenithi, pro obser-
vatis altitudinibus earum complementa ad 180 sumi debent, et
hæc per H, H' exprimi. — Ad variationem declinationis quoque
respici debet. —

Ad determinationem altitudinis poli, potissimum stellæ circum-
polares sunt idoneæ, quia, uti ex præcedentibus videmus, declina-
tio hujus stellæ non est necessaria, si ambæ culminationes obser-
vantur, et neque cognitio erroris collimationis, si inversis positio-
nibus instrumenti observatur. —

Præcipue stella polaris quæ maxime vicina polo, potissimum
apta est ad determinationem altitudinis poli, quia et sua va-
riatio altitudinis in vicinia Meridiani, et differentia refractionis
in ambabus culminationibus est tam parva, ut quoque parvus error
in momento culminationis non magnum habeat influxum in quæ-
sitam altitudinem poli. Si observationes superioris et inferioris
culminationis pluribus distant a se diebus, ita, ut declinatio si-
deris pro ambabus observationibus non amplius qua constans
assumi possit, respicere debemus quoque ad hanc variationem decli-
nationis. — Optimum erit, quamlibet singularium observationum
cum correspondente apparenti declinatione calculare, per quod accipimus

tot resultata pro altitudine poli, quot sunt observationes, ita ut uno intuitu harmoniam singularum observationum perspicere possimus. Error qui per suppositam non accurate veram declinationem oritur, et qui apud stellam polarem non potest locum habere, quum haec admodum bene jam est determinata, et qui semper erit parvus ad resultatum ultimum, vel ad dimidiam summam superiori et inferiori culminatione conclusae altitudinis poli, nullum habebit influxum, quum in hac dimidia summa propter ejus signa diversa evanescat. —

Si tantum una v. c. superior culminatio alicujus stellae circumpolaris inverso instrumento observata est, dein est, si z est observata distantia a zenith et r Refractio,

instrumento versus occasum $z+a+r=\delta-\varphi$

— — — — ortum $z'-a+r=\delta-\varphi$

hinc $\varphi=\delta-\left(\frac{z'+z}{2}+r\right)$ et $a=\frac{z'-z}{2}$

Eadem ratione pro inferiori culminatione

instrumento versus occasum $Z+a+R=180-D-\varphi$

— — — — ortum $Z'-a+R=180-D-\varphi$.

hinc $\varphi=180-D-\left(\frac{Z'+Z}{2}+R\right)$ et $a=\frac{Z'-Z}{2}$

et quamquam quodlibet horum φ dependeat a declinatione, tamen medium ex ambobus tantummodo a differentia declinationum in intervallo temporis est dependens, cum habeamus

$$\varphi=90-\tfrac{1}{2}\left(\frac{Z+Z'+z+z'}{2}+R+r\right)+\tfrac{1}{2}(\delta-D)$$

Si autem vellemus eandem culminationem inverso instrumento observare, sidus non amplius erit in plano Meridiani. Videbimus autem inferius, quomodo distantia observata a zenith in vicinia Meridiani per simplicem calculum reduci possit ad distantiam zenithalem meridianam. —

Maximae utilitatis ad determinationem altitudinis poli sunt sic dictae altitudines circummeridianae, h. e. altitudines observatae non in magna distantia a Meridiano, quarum magnus numerus ante et post meridiem uno die observari potest. Si reducuntur hae observatae altitudines ad eam, quae locum habet momento culminationis, habentur tot meridianae altitudines h. e. tot determinationes altitudinis poli, quot habentur revera altitudines observatae. —

Dantur variae methodi, perficiendi hanc reductionem ad Meridianum,

nos hic tantummodo praecipuam afferemus.

Sit $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z$

Erit quoq. $z = \frac{\sin a - \sin(a-b)\cos a - \cos(a-b)\sin a}{\cos a}$

Si in hac expressione pro $\sin(a-b)$ et $\cos(a-b)$ substituantur valores per potentias quantitatis $(a-b)$ erit

$$z = (a-b) + \frac{(a-b)^2}{1.2}\,tg\,a - \frac{(a-b)^3}{1.2.3} - \frac{(a-b)^4}{1.2.3.4}\,tg\,a + \ldots$$

et invertendo hanc seriem

$$a-b = z - \frac{z^2}{1.2}\,tg\,a + \frac{z^3}{1.2.3}(1+3tg^2a) - \frac{z^4}{1.2.3.4}(9\,tg\,a + 15tg^3a) + \frac{z^5}{1.2.3.4.5}(105tg^4a + 90tg^2a + 9) - \ldots$$

Sed, uti scimus, altitudo alicujus sideris h, ad quam pertinet angulus horarius s, altitudo poli φ et declinatio δ, expressa est per sequentem aequationem $\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$

Si autem h' et δ' sint meridiana altitudo et declinatio hujus sideris, et $h' - h = dh$ erit

$$h = h' - dh = 90 - \varphi + \delta' - dh$$

hinc prior aequatio

$$\cos(\varphi - \delta' + dh) = \cos(\varphi - \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{s}{2}$$

vel etiam

$$\frac{\cos(\varphi-\delta) - \cos(\varphi-\delta'+dh)}{\sin(\varphi-\delta)} = \frac{2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{s}{2}}{\sin(\varphi-\delta)}$$

Si haec expressio comparatur cum praecedenti $\frac{\sin a - \sin b}{\cos a} = z$

est $a = 90 - \varphi + \delta$, $b = 90 - \varphi + \delta' - dh$, $z = 2m\sin^2\frac{s}{2}$ ubi $m = \frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$

hinc est

$$\begin{aligned} dh\sin 1'' = {} & (\delta' - \delta)\sin 1'' + 2m\sin^2\frac{s}{2} - 2m^2\sin^4\frac{s}{2}\,ctg(\varphi-\delta) + \\ & + 4m^3\sin^6\frac{s}{2}\left(\frac{1}{3} + ctg^2(\varphi-\delta)\right) - 2m^4\sin^8\frac{s}{2}\left(3ctg(\varphi-\delta) + 5ctg^3(\varphi-\delta)\right) + \\ & + m^5\sin^{10}\frac{s}{2}\left(28ctg^4(\varphi-\delta) + 24ctg^2(\varphi-\delta) + \frac{12}{5}\right) - \\ & - m^6\sin^{12}\frac{s}{2}\left(84ctg^5(\varphi-\delta) + \frac{280}{3}ctg^3(\varphi-\delta) - 20ctg(\varphi-\delta)\right) + \ldots \quad (I) \end{aligned}$$

et haec expressio est quaesitus valor reductionis dh alicujus extra meridianum observatae altitudinis ad altitudinem meridianam. Ipsa valet invariata, si sidus culminat in parte australi Zenithi.

Si sidus culminat inter polum et Zenith, est:

$$h' = 90 + \varphi - \delta$$
$$m = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\delta - \varphi)}$$

hinc pro $\delta' = \delta$

$$dh \sin 1'' = 2m \sin^2 \frac{s}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{s}{2} \operatorname{ctg}(\delta - \varphi) + 4m^3 \sin^6 \frac{s}{2}\left(\frac{1}{3} + \operatorname{ctg}^2(\delta - \varphi)\right) \cdots (II)$$

Si sidus culminat infra polum est $h' = \varphi + \delta - 90$, $m = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi + \delta)}$ hinc pro $\delta' = \delta$

$$dh \sin 1'' = 2m \sin^2 \frac{s}{2} - 2m^2 \sin^4 \frac{s}{2} \operatorname{ctg}(\varphi + \delta) + 4m^3 \sin^6 \frac{s}{2}\left(\frac{1}{3} + \operatorname{ctg}^2(\varphi + \delta)\right) \cdots (III)$$

et hic valor quantitatis dh in (I) et (II) ad h addi, in (III) vero ab h subtrahi debet, ut obtineatur altitudo meridiana h. —

Quantitas $(\delta' - \delta)$ in (I) ante meridiem est negativa et post meridiem positiva, si distantia sideris a polo crescit; et inverse, ante meridiem positiva, et post meridiem negativa, si distantia sideris a polo decrescit. — Si altitudines non in magna distantia a Meridiano sunt observatae, duo primi termini expressionis pro dh sufficiunt, et fere semper tantum primus terminus. — Primum membrum autem hujus aequationis $2m \sin^2 \frac{s}{2}$, commode calculari potest, si conficitur tabula quae cum argumento ϑ det quantitatem $\left\{\frac{2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin 1''}\right\}$ uti et secundum membrum, si esset necessarium, per aliam parvam tabulam, quae cum eodem argumento det quantitatem $\left\{\frac{2\sin^4 \frac{\alpha}{2}}{\sin 1''}\right\}$. Loco applicationis tandem cujusque harum reductionum ad correspondens h, brevius applicatur summa omnium dh ad summam omnium h, et haec ultima summa per numerum omnium observationum dividitur. Quaeritur nimirum cum argumento $\alpha = t = \frac{s}{15}$ cuicunque observationi correspondens numerus in prima tabula, multiplicetur omnium summa per $\frac{m}{n}$, ubi $m = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}$ et n numerus observationum; hoc hac ratione obtentum productum erit membrum primum aequationis (I); eodem modo quaeratur cum eodem argumento summa numerorum secundae tabulae et multiplicetur haec summa per $\frac{m^2}{n} \operatorname{ctg}(\varphi - \delta)$, et hoc productum erit secundum membrum propositae aequationis (I). In fere omnibus casibus sufficiet, valores hujus secundi membri tantummodo pro aliquibus observationibus

calculandi, et ex his eorum valores pro intermediis observationibus per simplicem interpolationem determinandi. —

Apud stellas fixas pars $(\delta'-\delta)$ evanescit uti et parallaxis et radius; pro his commodissime adhibentur horologia sideralia, et tempus inter tempus horologii observationis et tempus culminationis assumitur qua angulus horarius. — Si adhibetur horologium medium, hoc intervallum pro stellis fixis per 1.002734 multiplicari debet. — Commodius quoque haec correctio in factore ipso dh applicari potest. Si nimirum a est diurna acceleratio in minutis secundis respectu temporis sideris (pro retardationibus a est negativum) dh adhuc multiplicari debet per $1-\frac{2a}{24.60^2}=1-0.0002331a$. —

Si sol v. e. observatur cum horologio siderali dein est fere $a=236''$ hinc iste factor quantitatis dh aequalis 0.9945. Si autem stellae fixae cum horologio medio observantur dein est iste factor 1.0055. —

Si tandem hac ratione obtinetur in vicinia superioris culminationis altitudo meridiana H et in vicinia inferioris H', dein est $\frac{1}{2}(H+H')$ altitudo poli locis observationis, et $\frac{1}{2}(H-H')$ distantia a polo sideris, respectu habito quoque ad refractionem. —

Sine tali tabula tandem, sequens expressio quantitatis dh pro calculo numerico est commodissima. Est nimirum

$$\sin\frac{s}{2}=\left(\frac{s}{2}\right)\sin 1''-\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3}{1.2.3}\sin^3 1''+\frac{\left(\frac{s}{2}\right)^5}{1.2.3.4.5}\sin^5 1''-\ldots$$

hinc obtinetur pro aequatione (I), si haec series usque ad $\left(\frac{s}{2}\right)^9$ continuatur

$$dh=(\delta'-\delta)+(0.2930294)mt^2-(0.9706047-6)m^2t^4\operatorname{ctg}(\varphi-\delta')-(0.4934834-6)mt^4+$$
$$+(0.9492095-11)m^3t^6\left(\tfrac{1}{3}+\operatorname{ctg}^2(\varphi-\delta')\right)+(0.4720883-11)m^2t^6\operatorname{ctg}(\varphi-\delta')+(0.2959970-12)mt^6$$

ubi t, minuta prima temporis, dh, secunda arcus, et coëfficientes numerici jam logarithmi sunt. —

Etiam correctio observatarum distantiarum a Zenith propter variationem Declinationis, sequenti modo commodius inveniri potest. Sit A summa omnium angulorum horariorum ante et B post meridiem, ambo in

minutis primis temporis expressa; dp augmentum distantiae a polo Solis in uno minuto primo (+ dp negativum si distantia a polo decrevit); tandem N numerus observationum, dein est

$$\text{correctum } Z = Z + (A - B)\frac{dp}{N}$$

Parallaxis altitudinis Solis potest assumi $8''{,}7 \sin Z$ (Berl. Jahrb. 1817 p. 138)

Ad disquisitionem utilitatis hujus methodi et limitum in applicatione quaerere volumus errores primi membri seriei, qui ex aliquo errore trium quantitatum s, δ, φ promanant, nam valores ceterorum errorum sunt multo minores.

Posito igitur $dh = \frac{2\cos\varphi\cos\delta\sin^2\frac{1}{2}\delta}{\sin(\varphi-\delta)\sin 1''}$ erit pro erroneo angulo horario

$$d'h = dh \cdot ds \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}s$$

et pro erronea declinatione

$$d'h = \frac{\pm dh^2 \, d\delta \sin 1''}{2\cos^2\delta \sin^2\frac{1}{2}s}$$

et pro erronea altitudine poli

$$d'h = \frac{\mp dh^2 \, d\varphi \sin 1''}{2\cos^2\varphi \sin^2\frac{1}{2}s}$$

signum superius in his ultimis duabus expressionibus pro serie (I), inferius pro (II) et (III). –

Ex hac videmus, praeter curam quam accuratissimae determinationis temporis, nos debere in utraque parte Meridiani aequalem numerum observationum, si fieri potest, facere, quia post culminationem $\operatorname{tg}\frac{1}{2}s$ et hinc quoque $d'h$ in prima praecedentium aequationum signum mutat, per quod igitur quodlibet positivum $d'h$ per correspondens negativum diminuatur. –

Ceterum quum dh sit communis factor in omnibus his tribus aequationibus, in duabus ultimis quoque dh^2, evitare debemus admodum magnos angulos horarios, uti et stellas, ubi φ fere $= \delta$ est. –

Generatim, si in aequatione

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$$

omnes quantitates ponentur variabiles et introducentur quantitates $\sin\omega$, $\cos\omega$, et $\cos\pi$, ubi π est angulus circuli verticalis cum circulo declinationis erit:

$$d\varphi = -\frac{dh}{\cos\omega} - ds\frac{\cos\varphi\sin\omega}{\cos\omega} + d\delta\frac{\cos\pi}{\cos\omega},$$ ex quo sequitur,

quam

quam securissime determinari posse altitudinem poli, ex observationibus quam maxime vicinis Meridiano, uti jam prius diximus. —

Si in priori aequatione differentiale quantitatis sinh respectu s et δ ponatur aequale zero, erit:

$$\sin s = \frac{d\delta}{ds}(tg\varphi - tg\delta\cos s)$$

si ds est unum minutum secundum, $\frac{d\delta}{ds}$ erit variatio declinationis in uno minuto secundo. Quum autem quantitas $\frac{d\delta}{ds}$ uti et angulus horarius s maximae altitudinis, tantummodo admodum parvus esse potest, dein est, si nominetur Ds angulus horarius maximae altitudinis,

$$Ds = \frac{d\delta}{ds}(tg\varphi - tg\delta) = \frac{d\delta}{ds}\cdot\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}$$

Illa sidera igitur, quorum declinatio variabilis est, habent propriè suam maximam altitudinem non in sed extra Meridianum, pro angulo horario Ds. Pro Sole potest iste angulus horarius plura minuta ~~secunda~~ efficere, sed ex hoc sequens differentia altitudinis meridianae et maximae Solis est, uti facile videre possumus, admodum parva. Pro luna vero hic angulus horarius efficere potest 4 et 5 minuta prima, et ex hoc sequens differentia altitudinum est 30". —

Prius enucleata correctio meridiei altitudinum correspondentium Solis, quae sit Δs, est

$$\Delta s = \frac{d\delta}{\sin s}(tg\varphi - tg\delta\cos s)$$

Si igitur hae altitudines sunt sumtae in vicinia meridiani, dein est s admodum parvum et aequale ds, hinc

$$\Delta s = \frac{d\delta}{ds}\left(\frac{\sin(\varphi-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}\right)$$

ergo

$$\Delta s = Ds$$

vel, tempus maximae altitudinis Solis aequalis est tempori incorrecti meridiei ex altitudinibus correspondentibus, si hae ultimae sunt sumtae in vicinia Meridiani.

Ex prioribus sequitur quoque, pro parvis angulis horariis pro quibus $\frac{\cos\varphi\cos\delta}{\sin(\varphi-\delta)}$ est quantitas constans, quadratum anguli horarii se habere uti differentiam observatae et meridionalis altitudinis. Sint igitur H, h, h' altitudines, T, t, t' earum tempora, dein est, si H est altitudo tempore meridiei

$$(T-t')^2 : (H-h) = (T-t)^2 : (H-h')$$

vel

vel $$H = \frac{h(T-t')^2 - h'(T-t)^2}{(T-t')^2 - (T-t)^2}$$

et ita invenitur ex solo tempore horologii meridiei, et per tempora duarum observatarum altitudinum et per has ipsas altitudines, altitudo meridionalis seu altitudo poli, sine priori cognitione hujus altitudinis poli et declinationis. —

Haece methodus adhuc simplificari potest.

Sint tres observatae altitudines cum suis temporibus

$$\frac{h}{T}, \quad \frac{h+\alpha}{T+\beta}, \quad \frac{h+\alpha'}{T+\beta'}$$

ubi et H altitudo meridionalis, et $T+t$ tempus meridiei, deinde est:

$$H-h = Bt^2$$
$$H-(h+\alpha') = B(t-\beta')^2$$
$$H-(h+\alpha) = B(t-\beta)^2$$

ubi B est quantitas constans. —

Eliminando quantitatem B, erit

$$\alpha t^2 = (H-h)(2t\beta-\beta^2)$$
$$\alpha' t = (H-h)(2t\beta'-\beta'^2)$$

et ex his duabus aequationibus eliminando H, erit

$$t = \frac{\alpha\beta'^2 - \alpha'\beta^2}{2(\alpha\beta' - \alpha'\beta)} \text{ ---------------- } (A)$$

et hic valor quantitatis t in una penultimarum aequationum substitutus, dat

$$H = h + \frac{(\alpha\beta'^2 - \alpha'\beta^2)^2}{4\beta\beta'(\beta'-\beta)(\alpha\beta'-\alpha'\beta)} \text{ ---------------- } (B)$$

Aequatio (B) dat altitudinem meridionalem, et (A) angulum horarium t, hinc tempus meridiei $T+t$. —

Aequatio (B) habet hoc commodum, ut per eam altitudo meridionalis ex una altitudine h et differentiis invenitur.

Ad applicationem hujus methodi, cognitio neque declinationis, neque altitudinis poli, neque temporis meridiei, quod more solito per altitudines correspondentes quaeritur, quae saepius sunt propter variam tempestatem molestae, neque absoluti temporis observationum, sed tantum modo earum differentiarum necessaria est. — (Berl. Jahrb. 1799 p. 148).

Prius jam dictum est, pro determinatione altitudinis poli, prae caeteris potissimum stellas in vicinia poli aptas esse, et inter has praecipue stellam polarem, seu α ursae minoris. — Etsi generatim

obser-

observationes horum astrorum meridionales, optimae sint ad determinationem altitudinis poli, tamen etiam aliae altitudines observatae stellarum circumpolarium in omnibus punctis suorum circulorum parallelorum cum utilitate adhiberi possunt. Si nimirum δ aequatur $90°$ seu $\cos\delta$ zero, prior aequatio differentialis habebit hanc formulam

$$d\varphi = dh\frac{\cos h}{\cos\varphi\sin\delta} + ds\sin s\,\mathrm{ctg}\,\delta + d\delta\cos s, \text{ nimirum}$$

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos s$$

$$dh\cos h = d\varphi\sin\delta\cos\varphi + d\delta\sin\varphi\cos\delta - d\varphi\cos\delta\cos s\sin\varphi - d\delta\cos\varphi\cos s\sin\delta - ds\cos\varphi\cos\delta\sin s$$

dividendo per $\cos\varphi\sin\delta$ erit:

$$\frac{dh\cos h}{\cos\varphi\sin\delta} = d\varphi + d\delta\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\mathrm{ctg}\,\delta - d\varphi\,\mathrm{ctg}\,\delta\cos\mathrm{tg}\,\varphi - ds\sin s\,\mathrm{ctg}\,\delta - d\delta\cos s$$

et quia δ fere est $90°$ hinc prior aequatio; — ex quo videmus errorem in observata altitudine fere eundem errorem in altitudine poli producere uti in observationibus meridionalibus. Idem quoque locum habet apud culminationes quoad errorem in declinatione; in diversis distantiis autem a Zenith, effectus hujus erroris quoad altitudinem poli semper imminuitur. — Quod attinet tempus, assumamus, errorem istum esse unum minutum secundum, et $\delta = 88°\,20'$. — Ex hoc fluunt pro angulis horariis

0^h	2^h	4^h	6^h	errores in altitudine poli
$0''.0$	$0''.2$	$0''.4$	$0''.5$	

Sed et hi parvi errores fere toti eliminari possunt, si facimus aliam similem observationem in altera parte Meridiani, in fere ab eo eadem distantia, ubi hi errores acquirunt diversa signa. Haec methodus ad hunc habet hanc utilitatem, ut ejus applicatio non ubi observatio culminationis dependeat a determinato temporis momento, et at haec methodus qualibet hora noctis, et si tubus est fortior, quoque die applicari possit. Etiam Astronomis proficientibus erit maximae utilitatis, quum haec methodus multo accuratior est, quam illa altitudinum circummeridionalium. — Breviter hic adhuc indicabo, quomodo in hoc casu proceditur cum iis ulis multiplicatoribus. —

Sit $p = 90 - \delta$, $\psi = 90 - \varphi$, z medium arithmeticum totius descripti arcus et t, angulus horarius, qui pertinet ad medium observationum, et brevitatis causa $t = 15s$, $m = \frac{\sin p\sin\psi}{\sin z}\cdot\sin t$, $n = \frac{\sin p\sin\psi}{\sin z}\cdot\cos t = m\,\mathrm{ctg}\,t$

ubi

ubi t pro orientalibus angulis horariis negative est. — Si possemus assumere variationem distantiarum a Zenith tempori esse proportionalem, assumtio, quae semper fere locum habebit, si observationes non admodum extenduntur, dein resolutio hujus problematis reduceretur ad determinationem valoris quantitatis ψ ex aequatione

$$\cos z = \cos\psi \cos p + \sin\psi \sin p \cos t$$

quod pluribus modis fieri potest. Quum autem prior suppositio fieri non potest, assumemus non z, sed z − dz esse illam distantiam a Zenith, quae correspondet angulo horario t medii temporum. Haec quantitas dz quoque tot modis diversis inveniri potest, quot modis fieri possunt reductiones ad Meridianum. —

Si applicemus nostram enucleatam methodum, erit

$$dz = m.2\sin\frac{\vartheta}{2} + A.2\sin^2\frac{\vartheta}{2} - B.2\sin^3\frac{\vartheta}{2} + C.2\sin^4\frac{\vartheta}{2} - \text{-----}$$

ubi ϑ est differentia temporis observationis medii omnium temporum observationum, et

$$A = n - m^2 \operatorname{ctg} z$$

$$B = \frac{m}{2} + 2mn \operatorname{ctg} z - \frac{2}{3}m^3 - 2m^3 \operatorname{ctg}^2 z$$

$$C = 2m^2 n - (n^2 - m^2 + 3m^4)\operatorname{tg} z + 6m^2 n \operatorname{ctg}^2 z - 5m^4 \operatorname{ctg}^3 z$$

Deductio horum terminorum ex qualibet observatione esset ~~molesta~~ in applicatione admodum molesta, sequentes considerationes abbreviant hanc methodum. —

Sint ϑ, ϑ', ϑ'' istae differentiae temporum ante, et ϑ_1, ϑ_1', ϑ_1'' post medium omnium temporum observationum, dein primum membrum quantitatis dz est aequale

$$\frac{2m}{N}\left(\sin\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta'}{2} + \ldots\ldots - \sin\frac{\vartheta_1}{2} - \sin\frac{\vartheta_1'}{2} - \ldots\ldots\right)$$

ubi N est numerus observationum. Quum autem, si totum tempus observationum non est longum, cujus extensio dependet ab observatore, quantitates $\frac{\vartheta}{2}$, $\frac{\vartheta'}{2}$ erunt admodum parvae, in prioribus expressionibus pro Sinibus, arcus ipsi poni possunt, quum et communis factor m est admodum parvus quoque in maximis digressionibus a Meridiano. —

Nos igitur habebimus pro primo membro

$$\frac{m}{N}\left(\vartheta + \vartheta' + \vartheta'' + \ldots\ldots - \vartheta_1 - \vartheta_1' - \vartheta_1'' - \ldots\ldots\right)$$

terminum, qui est aequalis zero, quia pars positiva et negativa sunt

aequal.

aequales. Similis consideratio valet etiam pro tertio membro quantitatis dz, cujus coëfficiens, praecipue si angulus horarius non est magnus, adhuc minor erit. Quod tandem attinet quartum membrum, in omnibus casibus est tam parvum, ut semper sine errore penitus negligi potest. — Remanet hinc tantum secundum membrum, et omnia se reducunt ad sequentes simplices expressiones:

Quaerantur dz et x ex sequentibus aequationibus

$$dz = (n - m^2 \operatorname{ctg} z) \cdot \frac{1}{N} \cdot \sum \frac{2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}{\sin 1''}$$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} p \cos t$$

dein invenitur vera altitudo aequatoris Ψ ex aequatione

$$\cos(\Psi - x) = \frac{\cos x \cos(z - dz)}{\cos p}$$

Σ indicat summam omnium $\frac{2 \sin^2 \frac{\tau}{2}}{\sin 1''}$ quae quantitates ipsae ex tabulis sumi possunt, de quibus jam fuit sermo. —

Nunc transibimus ad has methodos, per quas simul tempus et altitudo poli determinari potest. Praecipue harum methodorum ad sequentia duo problemata reduci possunt:

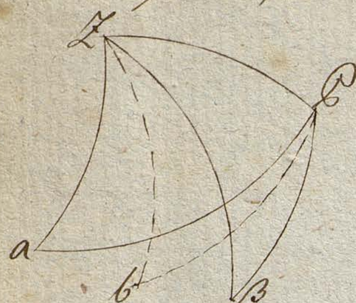
1. Ex observata altitudine duarum stellarum et intervallo temporis, tempora observationum et altitudinem poli invenire. Hoc problema evadit simplicius, si hae observationes in eadem stella (: Methodus clb. Douwes:) vel si 2. hae duae observationes in diversis stellis, sed eodem tempore, instituuntur. —
2. Ex tribus stellis et intervallis temporum, altitudinem poli et adhuc aliud ignotum elementum v. c. errorem collimationis instrumenti, vel declinationem stellae etc invenire.

Pro pluribus quam tribus stellis, vel pluribus quam tribus observationibus in eadem stella analyticae expressiones evadunt admodum complicatae et quoque superfluae, quum per duas vel tres observationes omnia huc pertinentia problemata resolvi possunt. —

Ex duabus altitudinibus duarum stellarum et intervallo temporis invenire tempus et altitudinem poli. —

Sint

Sint α α' apparentes ~~altitudines~~ ascensiones rectae, δ, δ' declinationes, h, h' observatae per refractionem et correctae altitudines ambarum stellarum, et t intervallum temporis in arcu; sit Z zenith, P polus



aequatoris, a et β loca ambarum stellarum. Imaginemur nobis, stellam secundam, quum prima observatur in a, esse in b; in intervallo temporis secundum sidus transibit ex b ad β, dein notum est

$$bP\beta = t \quad \text{et} \quad bPa = \alpha'-\alpha$$

$$\text{uti} \quad \beta Pa = t+\alpha'-\alpha, \quad Pa = 90-\delta, \quad P\beta = 90-\delta'$$

et hinc invenitur ex triangulo $aP\beta$ tertium latus $\beta a = x$ et angulus adjacens $P\beta a = y$. — In triangulo $Z\beta a$ nota sunt omnia tria latera $\beta a = x$, $aZ = 90-h$, $\beta Z = 90-h'$, hinc invenitur angulus $Z\beta a = z$ et hinc quoque angulus $Z\beta P = y-z$

In triangulo $ZP\beta$ tandem nota sunt:

$$Z\beta P = y-z, \quad Z\beta = 90-h', \quad P\beta = 90-\delta'$$

hinc invenitur angulus $ZP\beta$ tempus observationis et PZ seu altitudo poli.

Haec est methodus synthetica; datur quoque methodus analytica, quam autem hic transibimus.

Quum autem altitudo poli in fere omnibus casibus quam approximative nota supponi potest, hoc supposito, dabimus hic indirectam solutionem hujus problematis, quae pro praxi multo commodior est.

Sit $p = 90-\delta$ distantia a polo, $a = 90-h$ distantia a zenith correcta per errorem collimationis, refractionem etc, y, w angulus horarius et azimutham (:ambo negativi in parte orientali Meridiani:), pro alia stella sint hae quantitates p', a', y', w'. Tandem sint γ γ' rectae ascensiones zenithi tempore ambarum observationum.

Nominemus $y' = y-\vartheta$, dein est

$\gamma-\alpha = y$, $\gamma'-\alpha' = y'$ hinc $y'-y$ seu $\vartheta = (\alpha'-\alpha)-(\gamma'-\gamma)$ hinc ϑ notum

Sit nunc fere nota altitudo aequatoris x, dein est:

$$\cos\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\frac{\sin\frac{p+x+a}{2}\sin\frac{p+x-a}{2}}{\sin p \sin x}}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}y' = \sqrt{\frac{\sin\frac{p'+x+a'}{2}\sin\frac{p'+x-a'}{2}}{\sin p' \sin x}}$$

nimirum

nimirum ex consideratione $\cos s = \sin h$ - - - - et $\cos \frac{1}{2} s = \sqrt{\frac{1+\cos y}{2}}$

et $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y+x}{2} \sin \frac{y-x}{2}$

Si x bene est electum, est

$$\gamma = \alpha + y = \alpha + y' + \partial \text{ est } \gamma' = \alpha' + y' = \alpha' + y - \partial$$

Si autem x erronee est assumptum, quoque expressiones pro γ, γ' erunt erroneae. Sit igitur dx ignotus error quantitatis x, dein habemus

$$dy = dx \frac{\cotg \omega}{\sin x} = A\,dx$$

$$dy' = dx \frac{\cotg \omega'}{\sin x} = A'\,dx$$

et ascensio recta Zenithi erit

$$\gamma = \alpha + y + A\,dx = \alpha + y' + \partial + A'\,dx$$

$$\gamma' = \alpha' + y' + A'\,dx = \alpha' + y - \partial + A\,dx$$

ex quo sequitur $dx = \frac{y' - y + \partial}{A - A'}$

Ex hoc igitur fluit sequens solutio:

Quaerantur primo y et y' ex prioribus aequationibus, dein tantummodo in minutis primis valores quantitatum ω et ω' per sequentes expressiones $\sin \omega = \frac{\sin p \sin y}{\sin \alpha}$, $\sin \omega' = \frac{\sin p' \sin y'}{\sin \alpha'}$

dein est $A = \frac{\cotg \omega}{\sin x}$, $A' = \frac{\cotg \omega'}{\sin x}$

et

$$dx = \frac{y' - y + \partial}{A - A'}$$

hinc vera altitudo aequatoris $x + dx$ et vera ascensio recta Zenithi.

$$\gamma = \alpha + y + A\,dx = \alpha + y' + \partial + A'\,dx$$

$$\gamma' = \alpha' + y' + A'\,dx = \alpha' + y - \partial + A\,dx$$

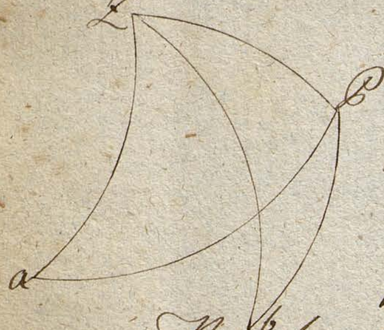
Si mutentur dein γ, γ' in tempus sidereale, dabunt immediate vera tempora sideralia observationum, hinc et tempus verum et medium h. e. correctionem horologii. (Vid. Berl. Jahrbuch 1817 p. 136.)

Si vellemus supponere, ambas altitudines esse observatas in eodem momento, pro practica utilitas non erit magna, quia duo observatores, duo instrumenta et simul accuratissima harmonia observationum necessaria sunt, et tota solutio non multum simplicior evadit.

Supponere quoque possumus, ambas ~~observationes~~ altitudines esse obser-

observatas in una eademque stella, solutio erit quidem simplicior, sed fere in omnibus casibus intervallum temporis notabile inter observationes assumi debet, vel convicti esse debemus, de statu regularique motu horologii per plures horas.

Ex duabus altitudinibus alicujus stellae et intervallo temporis observationum invenire tempus et altitudinem poli. —



Stella sit observata in punctis a et b. Quaeratur iterum in triangulo Pba, ubi $Pa = Pb$ latus ab et angulus Pba, deinde in triangulo Zba omnia latera sunt nota, ergo quoque angulus Zba et hinc etiam

$$ZbP = Pba - Zba.$$

In triangulo ZbP nota sunt ZbP, Zb, Pb, ergo inveniri possunt ZPb seu tempus et ZP seu altitudo poli.

Nunc transeamus ad indirectam solutionem hujus problematis. —

Sint iterum h, h' altitudines, t, t' anguli horarii, δ apparens declinatio, et φ assumta altitudo poli, deinde est

$$\sin\frac{t+t'}{2}\sin\frac{t'-t}{2} = \frac{\cos\frac{h+h'}{2}\sin\frac{h-h'}{2}}{\cos\varphi\cos\delta}$$

Si hae altitudines sunt in diversis partibus Meridiani, $\frac{t+t'}{2}$ si autem in eadem parte $\frac{t'-t}{2}$ est notum, et hinc in ambobus casibus ope prioris aequationis, quantitas t' et t potest inveniri et quoque clarum est, errorem in assumta altitudine poli in determinationem temporis parvum habere influxum, si una altitudo in vicinia Meridiani, altera quam maxime remota observatur. Inventis hac ratione t' et t, vera altitudo poli φ' invenitur ex

$$\cos(\varphi'-\delta) = \sin h' + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t'\cos\varphi\cos\delta$$
$$= \sin h + 2\sin^2\tfrac{1}{2}t\cos\varphi\cos\delta$$

vel ex

$$\cos(\varphi'+\delta) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}t'\cos\varphi\cos\delta - \sin h'$$
$$= 2\cos^2\tfrac{1}{2}t\cos\varphi\cos\delta - \sin h$$

quae ultimae aequationes ad calculum commodiores reddi possunt, nimirum sit

$$\sin h = \operatorname{tg} A$$
$$2\sin^2\tfrac{1}{2}t\cos\varphi\cos\delta = \operatorname{tg} B, \text{ hinc}$$
$$\cos(\varphi'-\delta) = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

vel

vel $\sin h^* = \operatorname{tg} A'$, $2\cos^2 \frac{1}{2} t \cos\varphi \cos\delta' = \operatorname{tg} B'$

$$\cos(\varphi' + \delta') = \frac{\sin(B' - A')}{\cos B' \cos A'}$$

Haec methodus proposita est a celeb. Douwes. (: Vid. Bohnenbergers Ortsbestimmung p. 283. Berl. Jahrb. 1798 correspond. astronom. B. Zach 1820 März :)

Aequatio differentialis $d\varphi = -\frac{dh}{\cos\omega} - ds \cos\varphi \operatorname{tg}\omega + d\delta \frac{\cos\pi}{\cos\omega}$ jam prius adducta, dat, si h et h' assumantur qua constantes, h. e. qua nullis erroribus affectae, pro prima observatione

$$dt = -\frac{d\varphi}{\cos\varphi \operatorname{tg}\omega}$$

et pro secunda $d\varphi' = -dt' \cos\varphi \operatorname{tg}\omega'$

Si hinc pro uniformi motu horologii ambo valores quantitatum dt, dt' sibi aequales ponuntur, est

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\omega'}{\operatorname{tg}\omega}$$

et si ponatur $\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\omega'$, seu si ambae observationes sunt factae in aequalibus distantiis a Meridiano; quoque est $d\varphi' = d\varphi$ ergo semper obtinebitur eadem altitudo poli hypothetica $\varphi' = \varphi$.

Si autem $\operatorname{tg}\omega' < \operatorname{tg}\omega$, etiam $d\varphi' < d\varphi$, et si $\operatorname{tg}\omega' > \operatorname{tg}\omega$ etiam $d\varphi' > d\varphi$, vel quaelibet nova hypothesis, semper magis et magis a veritate discedit.

Ex tribus observationibus trium stellarum invenire φ, t et adhuc aliud elementum.

Sint α, α', α'' apparentes ascensiones rectae, δ, δ', δ'' declinationes harum stellarum, quae in eadem altitudine h temporibus ϑ, ϑ', ϑ'' observatae sunt. Si pendulum regulatum est secundum tempus siderale, et si K est acceleratio, tum sunt:

$$s = -K + \vartheta - \alpha, \quad s' = -K + \vartheta' - \alpha', \quad s'' = -K + \vartheta'' - \alpha''$$

anguli horarii stellarum in arcus mutati, hinc est, si ponatur $\vartheta - \alpha = p$, $\vartheta' - \alpha' = p'$, $\vartheta'' - \alpha'' = p''$

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(p - K)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos(p' - K)$$
$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta''' + \cos\varphi \cos\delta''' \cos(p'' - K)$$

Si prima harum aequationum a secunda subtrahatur erit:

$$\operatorname{tg}\varphi = \cos\frac{p'-p}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta'+\delta}{2}\cos\left(\frac{p'+p}{2}-K\right) + \sin\frac{p'-p}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta'-\delta}{2}\sin\left(\frac{p'+p}{2}-K\right)$$

Sit nunc
$$A\sin B = \sin\frac{p'-p}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta'-\delta}{2}$$
$$A\cos B = \cos\frac{p'-p}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta'+\delta}{2}$$
$$C = \frac{p'+p}{2} - B$$
dein est ultima aequatio
$$\operatorname{tg}\varphi = A\cos(C-K) \text{ - - - - - - - - - - (1)}$$
Eodem modo obtinetur
$$A'\sin B' = \sin\frac{p''-p}{2}\operatorname{ctg}\frac{\delta''-\delta}{2}$$
$$A'\cos B' = \cos\frac{p''-p}{2}\operatorname{tg}\frac{\delta''+\delta}{2}$$
$$C' = \frac{p''+p}{2} - B'$$
$$\operatorname{tg}\varphi = A'\cos(C'-K) \text{ ——————— (2)}$$
Ambo valores quantitatis φ dant
$$0 = A\cos(C-K) - A'\cos(C'-K) \text{ vel}$$
$$0 = \big((A'-A)-(A'+A)\big)\cos(C-K) + \big((A'-A)+(A'+A)\big)\cos(C'-K)$$
$$0 = (A'-A)\{\cos(C-K)+\cos(C'-K)\} - (A'+A)\{\cos(C-K)-\cos(C'-K)\}$$
vel tandem $0 = (A'-A)\cos\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)\cos\frac{C'-C}{2} - (A'+A)\sin\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)\sin\frac{C'-C}{2}$

Ponatur igitur $\frac{A}{A'} = \operatorname{tg}x$ dein est $\frac{A'-A}{A'+A} = \operatorname{tg}(45^\circ - x)$. et

$\operatorname{tg}y = \operatorname{tg}(45^\circ - x)\operatorname{ctg}\frac{C'-C}{2}$ dein est
$$K = \tfrac{1}{2}(C'+C) - y \text{ - - - - - - - - - (3)}$$
Aequatio prima (1) vel secunda (2) dat altitudinem poli, et (3) acceleratio-nem penduli. —

Cum φ et K ex una primarum trium aequationum possumus calcu-lare altitudinem veram h, et dein est h+Refract. apparens altitudo calculi, quae cum illa, per errorem collimationis correcta altitudine ob-servata, comparata, dabit errorem subdivisionis instrumenti. —

In electione stellarum, praecipue videre debemus, ut earum azimutha sint admodum diversa, vel ut earum circuli verticales in Zenitho non faciant admodum parvos angulos. —

(: Vid. Monatl. Correspond. Octob. 1808 et Januar 1809, Maylaender Ephemeriden 1810. Berliner Jahrbuch 1790. 1803. :)

Theodolit

Si azimuthum ω, et a refractione liberata altitudo sideris H observata sunt, cujus declinatio est δ, facile et hoc altitudo poli derivari potest ex aequatione $\sin\delta = \sin H \sin\varphi - \cos H \cos\varphi \cos\omega$

Si observamus in vicinia Meridiani, dein per eandem aequationem altitudinem meridianam $H+x$ ex observata altitudine H derivare possumus, si istam aequationem differentiamus respectu H et ω, et dein valores quantitatum $\left(\frac{dH}{d\omega}\right)$, $\left(\frac{dH}{d\omega^2}\right)$, etc., posito in his expressionibus $\omega=0$, in expressione $H+x = H + \left(\frac{dH}{d\omega}\right)d\omega + \left(\frac{d^2H}{d\omega^2}\right)\frac{d\omega^2}{1.2} + \left(\frac{d^3H}{d\omega^3}\right)\frac{d\omega^3}{1.2.3} + \ldots$ substituantur.

Sed primi tres termini jam sufficient, et nos habebimus, si post differentiationem $\omega=0$ ponitur

$$\left(\frac{dH}{d\omega}\right)=0, \quad \frac{d^2H}{d\omega^2} = \frac{\cos\varphi \sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta}.$$

Assumamus igitur, azimuthum in prima observatione esse Ω et jam a refractione correcta altitudo H, pro secunda observatione $\Omega + a$ et $H+h$ etc, tandem azimutum instrumenti, si tubus est in Meridiano, aequale $\Omega+\alpha$ et meridiana altitudo $H+x$ hinc

Ω .... H
$\Omega+a$ .... $H+h$
$\Omega+a'$ .... $H+h'$
$\Omega+\alpha$ .... $H+x$

Hinc est ex prima observatione $x = A\alpha^2$
secunda .... $x-h = A(\alpha-a)^2$
tertia .... $x-h' = A(\alpha-a')^2$ } .... (I)

ubi $A = 30\frac{\cos\varphi \sin(\varphi-\delta)}{\cos\delta}\sin 1''$. Hic terminus valet invariatus pro culminationibus in parte australi Zenithi. In parte boreali est pro superioribus culminationibus $A = 30\frac{\cos\varphi\sin(\delta-\varphi)}{\cos\delta}\sin 1''$. pro inferioribus culminationibus $A = -30\frac{\cos\varphi\sin(\delta+\varphi)}{\cos\delta}\sin 1''$

Per aequationes (I) igitur quantitas x, vel meridionalis altitudo $H+x$ et hinc quoq altitudo vera poli φ sine adjumento horologii, tantum per differentias lectorum azimuthorum quam maxime accurate inveniri potest.

Sed haec methodus supponit cognitionem situs Meridiani, et hinc videtur

non

non apta esse potissimum pro proficientibus Astronomis, qui volunt determinationes altitudinum poli facere. —

Impedimentum hinc, quod applicationi hujus methodi oppositum est, consistit in eo, ut in aequationibus (I) non solum quantitas x, sed et α (: a quo situs meridiani dependet :) incognitae sint. —

Sed hae ipsae aequationes suppeditant medium commodum, eliminandi quantitatem α. Si hoc facimus cum primis duabus aequationibus, et ponamus quantitatem notam Aa^2 aequalem K, obtinebimus

$$x = \frac{(h+k)^2}{4k} \text{ - - - - - - (II)}$$

et per hanc expressionem quantitas x, et hinc quoque altitudo poli $\varphi = H + x - \delta$ methodo hac admodum simplici, sine cognitione situs Meridiani vel temporis meridiei determinari potest, et quidem accurate, si observationes non in magna distantia a Meridiano institutae sunt. Haec vicinia Meridiani etiam tum, si ejus situs plane ignotus est, ex immediatis observationibus, nimirum ex ipsis pedetentim crescentibus altitudinibus sideris, in omnibus ~~a~~ casibus se manifestat. —

Simplificari quoque potest praecedens methodus; nimirum eliminando in aequationibus (I) non tantum quantitatem α sed et A; habebimus dein

$$x = \frac{(M'a' - Ma)^2}{4aa'(a'-a)(M'-M)} \text{ - - - - - - (III)}$$

ubi brevitatis causa $M = ah'$ et $M' = a'h$ positum est, et haec expressio nihil aliud supponit, quam tria Lecta azimutha et tres observatas altitudines. — Ad calculum haec methodus simplicissima evadit, si duae harum altitudinum assumuntur ejusdem magnitudinis, quae fere semper est in potestate observatoris. — Si priores duae sunt aequales, dein est $h = 0$, hinc

$$x = \frac{a'h'}{4a'(a-a')}$$

Si prima et ultima aequales sunt, dein $h' = 0$, ergo

$$x = \frac{a'^2 h}{4a(a'-a)}$$

Si secunda et tertia aequales sunt, est

$$x = \frac{(a+a')^2 h}{4aa'}$$ (: Vid. Annalen der Wiener Sternwarte, 4. Theil — von Littrow :)

Alia adhuc et ultima methodus determinationis altitudinis poli, quam hic adducam. —

Si h est observata altitudo stellae polaris et per refractionem correcta, t angulus horarius, p apparens distantia a polo, φ altitudo poli, dein est, posito $x = h - \varphi$

$$\sin h = \cos p \sin(h-x) + \sin p \cos(h-x) \cos t$$

Ex hac aequatione pluribus modis valor quantitatis x per p, h et t inveniri potest. Si quartae et altiores potentiae quantitatis p omittantur, quod fere in omnibus casibus licet, dein est, si ponatur

$A = \frac{1}{2} p^2 \sin^2 t \sin 1''$ et $B = \frac{2}{3} A p \cos t \sin 1''$

$x = p \cos t - A \operatorname{tg} h + B$, et quaesita altitudo poli

$$\varphi = h - p \cos t + A \operatorname{tg} h - B$$

et haec est aequatio calculanda. — Parva tabula construi potest, quae pro quolibet valore anguli horarii t det quantitatem

$$M = \frac{1}{2} p^2 \sin^2 t \operatorname{tg} h \sin 1'' - \frac{1}{3} p^3 \sin^2 t \cos t \sin^2 1''.$$

Si adjicere ~~[illegible]~~ vellemus, uti fecit celeb. Schumacher, aliquam parvam summam tabulam pro quantitate $N = p \cos t$, habebimus sine omni altero calculo

$$\varphi = h + M - N.$$

Si vellemus autem construere tabulam generalem pro omnibus altitudinibus poli, pro itineribus aut terra aut mari, haec tabula consistet ex duabus partibus, et dabit cum argumento t quantitates A et B, ex quo tandem habebimus

$$\varphi = h - p \cos t + A \operatorname{tg} h - B$$

Tabula haec occurrit in Berliner Jahrbuch pro 1825. —

Haec methodus uti et praecedens est a celeb. Littrow. —

Determinatio Longitudinis Geographicæ ex observationibus

Quum Sol in 24 horis temporis veri (: stella fixa in 24 horis temporis sideralis:) ab ortu occasum versus per omnes Meridianos terræ transit, et quum in quolibet loco est meridies seu 0^h, si Sol per Meridianum hujus loci transit, locus aliquis una, duabus aut tribus horis prius habebit meridiem, quam alius, si 15°, 30°, 45° magis versus orientem situs est, et hæc differentia apud omnia cetera tempora diei in his duobus locis habebit locum. —

Differentia longitudinis geographicæ duorum locorum, h.e. angulus eorum Meridianorum, erit igitur differentiæ verorum mediorum vel sideralium temporum proportionalis, quæ in his duobus locis eodem momento numerantur. Hæc tempora autem in quolibet loco inveniuntur per methodos priores, tantummodo determinari debet, quale tempus simul in ambobus locis sit. Hoc vero invenitur, si in ambobus locis idem phænomenon observatur, quod pro ambobus locis eodem momento locum habet, uti eclipses lunæ, emersiones et immersiones satellitum Jovis in umbram sui planetæ primarii, signa per pulverem data etc. vel 2° si in ambobus locis phænomenon aliquod observatur, quod quidem non revera eodem momento locum habet, ex quo autem talis tautochrona apparitio per calculum deduci potest, uti eclipses Solis, occultationes fixarum per lunam, transitus lunæ per Meridianum, distantiæ lunæ a notis stellis fixis etc; vel etiam, si horologium, cujus motus accurate notus est, in uno horum locorum secundum tempus hujus loci regulatur, et dein, sine turbatione motus ipsius, transfertur ad alium locum, et ibi cum tempore hujus loci comparatur. —

Nunc tantummodo loquemur de istis phænomenis tautochronis; ceteras methodos habebimus cum sermo erit de eclipsibus. —

Sit tale phaenomenon tautochronum in uno loco observatum tempore T, altero loco tempore T', supposito, ambo horologia habere motum uniformem. Si haec tempora amborum locorum essent vera aut media sideralia, dein esset differentia longitudinum

$$15(T'-T)$$

et secundus locus jacet magis orientem versus si T' majus est T.
Si autem non sunt haec tempora sideralia, haec tempora per methodos edoctas ad haec tempora sideralia reduci possunt. —
Hanc correctionem horologiorum autem, seu hanc mutationem temporum evitare possumus, si in ambobus locis observatur culminatio ejusdem fixae. — Si nimirum t est tempus culminationis fixae in uno loco, et t' in altero, dein effluxerunt a momento hujus tautochroni phaenomeni, usque ad culminationem fixae in uno loco t-T, et in altero t'-T' horae; hinc fixa prius transibat per meridianum primi loci horis (t-T)-(t'-T'), et si t'-T' majus est quam t-T, secundus locus jacet in parte orientali primi. — Si effluunt dein ab una culminatione hujus fixae usque ad sequentem in ambobus locis 24 horae, erit differentia longitudinis amborum locorum

$$\frac{366}{24}\left((t-T)-(t'-T')\right)$$

Si autem ab una culminatione veri aut medii Solis usque ad sequentem effluxerunt 24 horae, dein terra in hoc tempore quoque respectu Solis veri aut medii, semel circa axem sese rotavit, et hinc etiam erit differentia longitudinum. $15((t-T)-(t'-T'))$.

Praecipua phaenomena, ad hunc finem spectantia, sunt ellipses Lunae. Dum nimirum Luna, quando intrat in umbram terrae, privatur suo lumine pro omnibus locis, quibus est visibilis, eodem momento, differentia veri, medii aut sideralis temporis horum phaenomenorum pro duobus locis statim dabit differentiam longitudinis amborum locorum. —

Dum autem umbra non bene terminata est, momenta immersionis et emersionis Lunae in umbram, non cum magna precisione obser-

vari

observari possunt, hinc quoq; ex tali observato phaenomeno conclusa differentia longitudinum saepe magnis est obnoxia erroribus. Magis accuratae sunt observationes immersionum et emersionum macularum diversarum Lunae. Etiam perfectio tuborum amborum observatorum, status atmosphaerae etc. suum habent influxum in resultata. —

Ut convicti simus de incertitudine harum observationum, adferam hic resultata ex observata eclipsi Lunae Gothae et Parisiis 22 Octb. 1790. Haec observatio dat pro differentia longitudinum amborum locorum

0h	34'	11"
	33	23
	33	56
	33	32
	33	39
	33	13
	33	46
	33	35

ergo magnas differentias singularium observationum. —

Accuratiores sunt observationes immersionum et emersionum satellitum Jovis, sed et hae non dant hanc harmoniam, quam cupimus in his disquisitionibus. Ut autem ex his observationibus prodeat differentia longitudinum cum praecisione possibili, attendere debemus ad sequentia. In ambobus locis, applicentur, si fieri possit, tubi ferè ejusdem fortitudinis, et comparetur in ambobus locis aequalis numerus immersionum et emersionum, et excludantur omnes observationes quae admodum vicinae sunt oppositioni Jovis cum Sole. Quum autem praecedentia tautochrona phaenomena non cum magna praecisione observari possint, alia similia phaenomena in terra, quae non sunt obnoxia his erroribus adhibentur, uti sunt signa per pulverem data etc. Duae aut tres unciae pulveris communis dant momentaneam flammam, quae cum tubis, qui v. c. vigesies augent, et de die in distantia quinque aut sex milliarium germanic. videri potest. Si ista signa noctis tempore instruantur, tubus de die debet dirigi in locum determinatum. Secundum experimenta celeb. Zach signa noctis tempore per 7 aut 8 uncias pulveris, in distantia triginta milliarium videri

possunt

possunt, si locus ubi instituuntur, est debite altus. — Res principalis in his observationibus est accurata determinatio status et motus horologii, quae obtinetur per altitudines correspondentes vel alio modo. Quum celeritas lucis pro observationibus hujus generis qua infinite magna assumi possit, hae phaenomena qua tautochrona assumi possunt. (Vide quoque Annalen der Wiener Sternwarte)

Perfectio qua nunc horologia portatilia, Chronometra, conficiuntur, nobis quoque suppeditat medium, tempus alicujus loci per haec horologia immediate comparandi cum tempore alterius loci, et hac ratione determinandi differentiam longitudinum amborum locorum. — Per exemplum potissimum enucleare possumus hanc methodum. —

Anno 1786 29 Maji invenit B. Zach in specula comitis Brühl Londini, suum Chronometrum in meridie hujus diei 2".1 minus dare tempore medio hujus loci, et ex pluribus aliis diebus invenit, chronometrum quotidie retardare 0".1715 respectu temporis medii. — 27 Junii hinc post 29 dies revenit in suam speculam Seeberg. Tempus medium in meridie vero Londini pro 27 Junii est (ex ephemeridibus) $0^h\ 2'\ 34''.3$

Si ab hoc tempore subtrahatur prima retardatio 29 Maji vel 2".1, et retardatio in 29 diebus vel 29(0.1715) = 4".97 obtinetur tempus Chronometri 27 Junii in meridie vero Londini

$$t = 0^h\ 2'\ 27''.23$$

Sed eodem die ille observavit Seebergi altitudines correspondentes Solis, et ex his invenit tempus Chronometri 27 Junii in meridie vero Seebergi $t' = 11^h\ 19'\ 3''.40$

Hinc est distantia longitudinum amborum locorum

$$t - t' = 0^h\ 43'\ 23''.83$$ (Seeberg magis orientem versus)

(Vid. Berl. Jahrbuch 1806 p. 210)

Si in duobus locis, qui non jacent sub eodem Meridiano, observatur differentia culminationis lunae et alicujus fixae, hae differentiae non erunt aequales, quia ascensio lunae admodum celeriter, saepe usque ad 15 gradus in uno die variat. Ex hac sequitur, ex his differentiis

ex his differentiis, si nota est diurna variatio Ascensionis rectae Lunae etiam inverse ad differentiam longitudinum amborum locorum observationum concludi posse. –
Per exemplum clarius videbimus hanc methodum. –

Observata est Gothae temp. sidereo				Manheimi temp. sidereo		
culminatio Lunae	13^h	$47'$	$32''.45$	13^h	$47'$	$53''.0$
Spicae	13	14	17.87	13	14	17.2
		33^m	$14''.58$		$33'$	$35''.8$
					33	14.58
						$21''.22$

vel $0° \; 5' \; 18''.3 = a$

Ex observationibus priorum et sequentium dierum (vel ex ephemeridibus per interpolationem:) inventa est differentia ascensionis rectae Lunae in una hora temporis sideralis

$$0^d \; 34' \; 44''.998 = 0°.579166 = b$$

Si ergo x est distantia Meridianorum amborum locorum dein est

$$b : a = 1 : x \quad \text{vel} \quad x = \frac{a}{b} = 0^h.15266 = 0^h \; 9' \; 9''.6.$$

(Vid. Monatl. Corresp. 1803 Sept. De simili determinatione longitudinum per observatas altitudines Lunae v. Monatl. Corresp. 1805 Decem et Berl. Jahrbuch 1799 p. 92:)

(Ad hunc finem potissimum vari, aptae quoque sunt observationes (distantiarum Lunae ab aliis sideribus. Differentia temporum duarum observationum, quaelibet expressa in tempore sui loci, pro quibus eadem (geocentrica) distantia centri Lunae ab astro locum habet, est quoque differentia Meridianorum observatorum, seu differentia longitudinum. Locum unius harum observationum etiam calculatio hujus distantiae ex tabulis Lunae tenere potest, quum hae tabulae secundum novissimos labores in hac materia ad hunc finem sufficiunt. Ad hunc maxime aptam esse Lunam, ex hoc sequitur, quia motus omnium aliorum corporum coelestium est admodum lentus, et hinc errores parvi observationum vel calculi ex tabulis majores errores in quaesitis resultantis producerent. Sic similes observationes in Sole tredecies minus accuratae essent, quia motus Solis fere tredecies minor est quam ille Lunae. ——

Sint h, H verae a refractione et parallaxi liberatae altitudines centri Solis et Lunae, h' H' earum apparentes seu observatae altitudines, δ vera et δ' apparens seu observata distantia eorum centrorum. —

Cum vera et apparentia loca cujuscunque sideris jaceant in eodem verticali circulo, est, si communis differentia Azimuthi amborum siderum est ω

$$\cos\delta = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos\omega$$
$$\cos\delta' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos\omega$$

ex quo $$\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\sin\frac{\delta'+H'-h'}{2}\sin\frac{\delta'-H'-h'}{2}}{\cos H' \cos h'}$$

et $$\cos^2\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\frac{H'+h'+\delta'}{2}\cos\frac{H'+h'-\delta'}{2}}{\cos H' \cos h'}$$

Eodem modo dat prima praecedentium aequationum.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\delta = \cos(H-h) - 2\cos H \cos h \sin^2\frac{\omega}{2}\\ \cos\delta = 2\cos H \cos h \cos^2\frac{\omega}{2} - \cos(H-h)\\ \cos\delta = \cos(H-h)\cos^2\frac{\omega}{2} - \cos(H+h)\sin^2\frac{\omega}{2}\end{array}\right\} \text{------ (I)}$$

Et secunda aequationum (I) sequitur

$$\cos\delta = \frac{2\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'}\cos\frac{H'+h'+\delta'}{2}\cos\frac{H'+h'-\delta'}{2} - \cos(H+h)$$

vel etiam $$\left.\begin{array}{l}\sin^2\frac{\delta}{2} = \cos^2\frac{H+h}{2} - m\cos\frac{H'+h'+\delta'}{2}\cos\frac{H'+h'-\delta'}{2}\\ \cos^2\frac{\delta}{2} = \sin^2\frac{H+h}{2} + m\cos\frac{H'+h'+\delta'}{2}\cos\frac{H'+h'-\delta'}{2}\end{array}\right\} \text{---- (II)}$$

ubi $m = \frac{\cos H \cos h}{\cos H' \cos h'}$ est

Si ponatur commoditatis calculi causa

$$\sin A = \frac{1}{\cos\frac{H+h}{2}}\sqrt{m\cos\frac{H'+h'+\delta'}{2}\cos\frac{H'+h'-\delta'}{2}}$$

dein sequitur ex prima aequationum (II)

$$\sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{H+h}{2}\cos A$$

et si iterum est

$$\operatorname{tg} B = \frac{1}{\sin\frac{H+h}{2}}\sqrt{m\cos\frac{H'+h'+\delta'}{2}\cos\frac{H'+h'-\delta'}{2}}$$

dein sequitur ex secunda aequationum (II)

$$\cos\frac{\delta}{2} = \sin\frac{H+h}{2}\cdot\frac{1}{\cos B}$$

Praeterea si ponatur

$$\sin C = \frac{1}{\cos\frac{H-h}{2}}\sqrt{m\sin\frac{\delta'+H'-h'}{2}\sin\frac{\delta'-H'+h'}{2}}$$

A.

et $\quad tg D = \frac{1}{\sin\frac{H-h}{2}} \sqrt{m \sin\frac{d+H'-h'}{2} \sin\frac{d-H'+h'}{2}}$

erit ex aequationibus (I)

$$\cos\frac{\delta}{2} = \cos\frac{H-h}{2} \cos C \quad \text{et}$$

$$\sin\frac{\delta}{2} = \sin\frac{H-h}{2} \cdot \frac{1}{\cos D}$$

et plures aliae expressiones. ——

Hae expressiones pro δ sunt praecipuae quae ex praecedentibus aequationibus (I) derivari possunt.

(Dantur quoque methodi, per quas via indirecta inveniri potest quantitas δ, sed directae sunt accuratiores. —

(Vid. Berl. Ephemer. pro 1783 Monathliche Correspon. 1806 Januar. Correspon. Astron. Vol. 12 No 5 p. 458 nouvelle methode par M. Guépratte et No 3 p. 296. Horner et p. 242. — Schubert p. 139.)

(Addam hic novissimam methodum celeb. Schubert reducendi distantias Lunae (: Corresp: Astro. Vol. 12 p. 139:)

Sit D distantia apparens amborum centrorum. L apparens altitudo Lunae. S eadem Solis. ΔD, ΔL, ΔS cognitae variationes horum angulorum, dein erit secundum theorema Taylorianum.

$$\Delta D = \left(\frac{dD}{dL}\right)\Delta L + \left(\frac{dD}{dS}\right)\Delta S + \left(\frac{d^2D}{dL^2}\right)\frac{\Delta L^2}{1.2} + \left(\frac{d^2D}{dS^2}\right)\frac{\Delta S^2}{1.2.} + \left(\frac{d^2D}{dL\,dS}\right)\Delta L \Delta S + \left(\frac{d^3D}{dL^3}\right)\frac{\Delta L^3}{1.2.3} + \text{etc}$$

Designando per Z azimuthum interceptum inter haec duo astra, erit

$$\cos Z = \frac{\cos D - \sin L \sin S}{\cos L \cos S}$$

Sed quantitas Z est constans, differentiale igitur erit aequale zero sive $0 = - dD \sin D \cos L \cos S + dL \cos S (\cos D \sin L - \sin S) + dS \cos L (\cos D \sin S - \sin L)$

ex quo obtinemus sequentia differentialia partialia

$$\left(\frac{dD}{dL}\right) = \frac{\cos D \sin L - \sin S}{\sin D \cos L}; \qquad \left(\frac{dD}{dS}\right) = \frac{\cos D \sin S - \sin L}{\sin D \cos S}$$

$$\left(\frac{d^2D}{dL^2}\right) = \frac{\sin^2 D - \sin^2 L - \sin^2 S + 2\cos D \sin L \sin S}{tg D \sin^2 D \cos^2 L}$$

$$\left(\frac{d^2D}{dS^2}\right) = \frac{\sin^2 D - \sin^2 S - \sin^2 L + 2\cos D \sin S \sin L}{tg D \sin^2 D \cos^2 S}$$

$$\left(\frac{d^2D}{dL\,dS}\right) = \frac{\sin^2 L + \sin^2 S - \sin^2 D - 2\cos D \sin L \sin S}{\sin^3 D \cos L \cos S}$$

Tres

Tres aequationes ultimae erunt simpliciores, attendendo, quartam esse aequalem tertiae ductae in $\frac{\cos^2 L}{\cos^2 S}$ et quintam esse aequalem $-$ tertiae ductae in $\frac{\cos L}{\cos D \cos S}$. Praeterea per transformationes cognitas formularum trigonometricarum habemus

$\sin^2 D - \sin^2 L - \sin^2 S = \frac{1}{2}\cos 2L - \frac{1}{2}\cos 2S - \cos^2 D = \cos(L+S)\cos(L-S) - \cos^2 D$

et $2\cos D \sin L \sin S = \cos D\left(\cos(L-S) - \cos(L+S)\right)$ hinc numerator tertiae aequationis erit $= \{\cos(L+S) + \cos D\}\{\cos(L-S) - \cos D\}$

$= 4\cos\frac{D+L+S}{2}\cos\frac{D-L-S}{2}\sin\frac{D+L-S}{2}\sin\frac{D-L+S}{2}$

Brevitatis causa ponendo

$\frac{D+L+S}{2} = a$, $\frac{D-L-S}{2} = b$, $\frac{D+L-S}{2} = c$, $\frac{D-L+S}{2} = d$ et $\cos a \cos b \sin c \sin d = M$

prior numerator erit $= 4M$ et tota aequatio tertia dabit

$$\left(\frac{d^2 D}{dL^2}\right) = \frac{4M\cos D}{\sin^3 D \cos^2 L}$$

formula admodum commoda pro usu logarithmico. — Per hanc formulam obtinebimus valores quantitatum $\left(\frac{d^2 D}{dS^2}\right)$ et $\left(\frac{d^2 D}{dL\,dS}\right)$ tantummodo multiplicando priorem aequationem respective per $\frac{\cos^2 L}{\cos^2 S}$ et $-\frac{\cos L}{\cos D \cos S}$

Designentur nunc per $l.\ s.$ refractiones correspondentes altitudinibus $L.\ S.$ jam cum suis correctionibus, per $p.$ parallaxis lunae pro altitudine $L-l$ et quidem relate ad latitudinem loci; observetur deinde quoque nos refractionem s debere imminuere parallaxi alterius astri altitudinis S, si hoc astrum est Sol, vel aliquis planeta, cujus parallaxis non amplius est insensibilis. His positis habebimus

$$\Delta L = p - l, \quad \Delta S = -s$$

Maximus valor, quem $p-l$ acquirere potest, est $56'$ quod dat pro maximo quantitatis $(p-l)^2 \mp 5.5''$, et pro $\frac{\Delta L^3}{6} = 0''.1$. Sequentes termini sunt adhuc multo minores, hinc possumus in omnibus casibus negligere omnes tertii ordinis, vel tertias potentias refractionis et Parallaxis. — Sit parvus arcus ΔD seu δ, qui addi debet ad distantiam observatam D, erit igitur

$$\delta = \frac{(p-l)\,\text{ctg}\,D}{\cos L}\left\{\sin L - \frac{\sin S}{\cos D} + \frac{2M\sin(p-l)}{\sin^2 D \cos L}\right\} + \frac{s\,\text{ctg}\,D}{\cos S}\left\{\frac{\sin L}{\cos D} - \sin S + \frac{2M\sin s}{\sin^2 D \cos S} + \frac{4M\sin(p-l)}{\sin^2 D \cos D \cos L}\right\}$$

Si D majus est quam $45°$ quod saepissime locum habet, possumus negligere in usu ordinario terminos multiplicatos per M, quod dat

$$\delta'' = (p-1)\left(\frac{tg\, L}{tg\, D} - \frac{\sin S}{\sin D \cos L}\right) + s\left(\frac{\sin L}{\sin D \cos S} - \frac{tg\, S}{tg\, D}\right)$$

Si $D = 90°$, ista aequatio erit:

$$\delta'' = \frac{s \sin L}{\cos S} - \frac{(p-1)\sin S}{\cos L} + \frac{4M(p-1)s}{\cos L \cos S}$$

Si L vel S aequatur $90°$, $p-1$ seu s deveniunt aequalis zero. Si D et L sunt $90°$, Sol est in Horizonte, $S=0$, $p-1=0$, $\delta''=s$. Si D et S sunt $90°$, prior aequatio dabit $\delta'' = -(p-1)$.

Haec methodus est directa; dat nimirum immediate correctionem δ in functione trium arcuum datorum D, L, S. Haec methodus quoque est exacta, nam dat loco verae distantiae, parvam differentiam δ non per approximationem, sed per expressionem rigorosam. — Delambre quoque praeferebat inventionem quantitatis δ; ille hanc dat per aequationem indirectam, quae tantum per approximationem resolvi potest, et illa non dat valorem quantitatis δ, sed $\sin\frac{\delta}{2}\sin\left(D+\frac{\delta}{2}\right)$. —

Vid. Astr. theor. et prat. T. III p. 620.

Haec methodus habet quoque illam utilitatem ut illi dare possumus gradum praecisionis, quem volumus, quum possimus quotcunque libuerit ~~volueri~~ ~~mus~~ terminos nostrae aequationis deducere. Ex hac aequatione omnes etiam ceterae methodi facili modo derivari possunt. Si vellemus adhibere nostram formulam ad constructionem tabularum, ponatur $\frac{(p-1)\,tg\, L}{tg\, D} = A$, $\frac{(p-1)\sin S}{\sin D \cos L} = B$, $\frac{s \sin L}{\sin D \cos S} = C$, $\frac{s\, tg\, S}{tg\, D} = E$

hinc erit nostra aequatio

$$\delta'' = A - B + C - E.$$

Si designentur per A', B', C', E' valores quantitatum A, B, C, E si $p-1$ et s sunt aequales $60''$ seu $1'$ et per u, v valores quantitatum $p-1$ et s expressi in minutis eorumque decimalibus, nos habebimus in secundis

$A' = \frac{60\, tg\, L}{tg\, D}$, $B' = \frac{60 \sin S}{\sin D \cos L}$, $C' = \frac{60 \sin L}{\sin D \cos S}$, $E' = \frac{60\, tg\, S}{tg\, D}$. —

$A = uA'$, $B = uB'$, $C = vC'$, $E = vE'$ et hinc

$$\delta'' = v(C'-E') - u(B'-A')$$

Construendae igitur sunt duae tabulae, quarum quaelibet habet haec duo argumenta $D = \varphi$ et L seu $S = \psi$; angulus φ ponitur in

eadem

in extensione a 20° usq ad 90° et Ψ a 4° vel 5° ad 89°. Numeri primae tabulae erunt quoti $\frac{tg\Psi}{tg\Phi}$, numeri secundae tabulae quoti $\frac{\sin\Psi}{\sin\Phi}$ omnis multiplicati per 60. Ex prima habebimus A' assumendo argumentum L et E, assumendo S; ex secunda habebimus C cos S = G, cum argumento L et B cos L = H, cum argumento G.

Quum autem numeri G et H se extendere possunt a 60 Sin 5° = 5" usq ad $\frac{60}{\sin 20°} = 175"$, possumus construere tertiam tabulam pro quolis numerorum, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 20. 30. 40. 50. 60. 70. 80. 90. 100. divisorum per cosinus omnium angulorum inter 5° et 89°; ex qua sumantur B cum argumento H et L, et C cum argumento G et S.

Hac ratione inventae sunt quantitates A'. E'. B'. C'. quarum duae ultimae semper sunt positivae. A' et E' sunt negativae pro D > 90°. Hinc habendo C' ± E' et B' ± A', signum superius pro D > 90° inferius pro D < 90°, multiplicari debet C' ± E' per v; B' ± A' per u quod dat

$$\delta' = v(C' \pm E') - u(B' \pm A').$$

Haec methodus igitur tantummodo exigit tres tabulas. Ubi vidimus, termini secundi ordinis, qui habent factorem M, neglecti sunt; videamus nunc, ad quam magnitudinem possunt ascendere hi termini, quos designabimus per δ", illos autem, qui sunt independentes a quantitate M, per δ'. Ad hunc finem determinare debemus relationem, quae existit inter arcus D, L et S.

Cum D sit latus alicujus trianguli, cujus duo cetera latera sunt 90° − L et 90° − S, et cum in quolibet triangulo, summa duorum laterum multo major sit tertio latere, erit:

$$D + (90° - L) > (90° - S) \quad \text{et} \quad (90° - L) + (90° - S) > D$$

Ex prima conditione sequitur, D semper esse majorem quam L − S vel S − L, et ex secunda, D semper esse minorem quam 180° − (L + S); hinc L − S seu S − L et 180° − (L + S) sunt limites inter quos D semper est contenta.

His positis, quaeramus nunc maximum valorem quantitatis M.
Ad hoc faciendum sit simplicitatis causa
$\frac{D}{2} = Z$, $\frac{L+S}{2} = x$, $\frac{L-S}{2}$ seu $\frac{S-L}{2} = y$ dein habebimus, substituendo in aequatione priori, $\cos a \cos b \sin c \sin d = M$ valores

$$M = \cos(Z+x)\cos(Z-x)\sin(Z+y)\sin(Z-y) = (\cos^2 Z \cos^2 x - \sin^2 Z \sin^2 x)(\sin^2 Z \cos^2 y - \cos^2 Z \sin^2 y)$$
$$= (\cos^2 Z - \sin^2 x)(\sin^2 Z - \sin^2 y) = \cos^2 Z \sin^2 Z - \cos^2 Z \sin^2 y - \sin^2 x(\sin^2 Z - \sin^2 y)$$

Quum nos vidimus, D semper esse majorem quam $L-S$, seu $Z > y$, $\cos^2 Z \sin^2 Z$ erit maximum, seu limes, quem M non attinget, quam si x et y sunt aequales zero; hinc M maximum suum habebit valorem si L et S aequantur zero vel minimo possibili h. e. 5°. Termini δ''' aequationis prioris; quum sint multiplicati per $\frac{\cot D}{\sin^2 D}$ evadunt infiniti, si $D = 0$; ex quo sequitur, illos habere suum maximum valorem, si D habet suum minimum h. e. si $D = 20°$. —
Faciendo igitur $D = 20°$ et $L = S = 5°$ erit

$Z = 10°$, $x = 5°$, $y = 0$ et hinc

$$M = \sin^2 10° \cos 15° \cos 5°$$

et terminus maxime considerabilis quantitatis δ'''

$$\frac{2M(p-l)^2 \cot 20°}{\sin^2 20° \cos^2 5°} = \frac{(p-l)^2 \cot 20° \cos 15°}{2 \cos^2 10° \cos 5°}$$

Sit $L = 5°$, $p-l$ potest ascendere ad 52' quod dat

$$\delta''' = \frac{1566'' \sin 52' \cos 15°}{\tan 20° \cos^2 10° \cos 5°} = 64''.8$$

Dein adhuc addi debent ceteri termini quantitatis δ''' qui sunt multiplicati per s^2 et per $(p-l)s$. Ex hoc dein videre possumus, negligendo quadrata refractionum et parallaxium, uti hoc fieri ~~potest~~ solet in constructione tabularum, comitti posse errorem, qui major est uno minuto primo, qui error producit in longitudinem errorem dimidii gradus. —
Addam hic data alicujus exempli ex Delambre (I. p. 629) quod quilibet resolvet. —
$D = 30°$, $L = 18°$, $S = 6$, $p = 58'$, $l = 3'$, $s = 8' 20''$
$L' = 18° 55'$, $S' = 5° 51' 40''$, $\Im = 12°$, $\theta = 27°$

$b = 3°;\ c = 21°\ \ d = 9°;\ \frac{L' + S}{2} = e = 12° 23' 20''$

Resultatum: $\delta = + 23' 26''.16.$

Formula celeb. Horner deducta e consideratione refractionis, est: $\delta'' = (m-1)\{tg\frac{D}{2} - tg\frac{T}{2} + (1-\cos T)(\operatorname{cosec} T - \operatorname{cosec} D)\} + \frac{(s-l)\sin T}{\sin D}$

ubi $T = L - S$, $L' = L - l$, $S' = S - s$, $m = \frac{\cos L' \cos S}{\cos L \cos S'}$.

Hac formula facile ex nostra derivari potest, ponendo $p = 0$ quia hic tantum agitur de refractione, et $M = 0$, quia Horner negligit quadrata refractionum. — His positis nostra aequatio

$$\delta'' = (p-l)\left(\frac{tg L}{tg D} - \frac{\sin S}{\sin D \cos L}\right) + s\left(\frac{\sin L}{\sin D \cos S} - \frac{tg S}{tg D}\right) \text{ dat}$$

$$\delta'' = \operatorname{cosec} D\left\{ s\left(\frac{\sin L - \cos D \sin S}{\cos S}\right) + l\left(\frac{\sin S - \cos D \sin L}{\cos L}\right)\right\}$$

substituendo pro $\sin L$, $\sin S \cos(L-S) + \cos S \sin(L-S)$

pro $\sin S$, $\sin L \cos(L-S) - \cos L \sin(L-S)$ erit

$$\delta'' = \operatorname{cosec} D\{(\cos T - \cos D)(s\, tg S + l\, tg L) + (s-l)\sin T\}$$

$$= \operatorname{cosec} D\left\{\frac{\cos T - \cos D}{\cos L \cos S}(s \cos L \sin S + l \sin L \cos S) + (s-l)\sin T\right\}$$

Sed, quia $L' = L - l$, $S' = S - s$ erit, negligendo quadrata refractionum

$\cos L' = \cos L + l \sin L$, $\cos S' = \cos S + s \sin S$. hinc

$\cos L' \cos S' = \cos L \cos S + s \cos L \sin S + l \sin L \cos S$,

quod substitutum in ultima aequatione dabit

$$\delta'' = \frac{(\cos T - \cos D)(\cos L' \cos S' - \cos L \cos S) + (s-l)\sin T}{\sin D \cos L \cos S}$$

vel

$$\delta'' = \frac{(m-1)(\cos T - \cos D) + (s-l)\sin T}{\sin D}$$

Per substitutionem $tg\frac{1}{2}T = \operatorname{cosec} T - ctg T$ et $tg\frac{1}{2}D = \operatorname{cosec} D - \cot D$ hae aequatio transibit in aequationem adductam celeb. Horner, qui etiam ad hunc finem construxit tabulas. —

Dibern

Determinatio Azimuthi objectorum terrestrium.

Ex altitudine poli φ, declinatione δ et angulo horario t Solis, invenire altitudinem h et Azimuthum ω.

Uti scimus, est $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$

ex qua aequatione igitur h inveniri potest, quae aequatio autem, introducendo angulum auxiliarem, ad calculum aptior reddi potest; nimirum ponendo $\operatorname{tg} M = \cos t \operatorname{ctg}\varphi$ erit

$$\frac{\sin M}{\cos M} = \frac{\cos t \cos\varphi}{\sin\varphi} \quad \text{hinc} \quad \cos t \cos\varphi = \frac{\sin\varphi \sin M}{\cos M}$$

et substituendo

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \frac{\sin\varphi \sin M \cos\delta}{\cos M}$$
$$= \frac{\sin\varphi \sin\delta \cos M + \sin\varphi \cos\delta \sin M}{\cos M}$$
$$= \frac{\sin\varphi}{\cos M} \sin(M+\delta)$$

et Azimutum invenitur ex nota aequatione

$$\sin\omega = \frac{\sin t \cos\delta}{\cos h}$$

vel

$$\operatorname{tg} N = \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}$$
$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\cos N \operatorname{tg} t}{\sin(\varphi - N)}$$
$$\cos h = \frac{\cos\delta \sin t}{\sin\omega}$$

(ab initio habuimus $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{\sin t}{\sin\varphi \cos t - \operatorname{tg}\delta \cos\varphi}$ dividendo per $\cos t$ erit $\operatorname{tg}\omega = \dfrac{\operatorname{tg} t}{\sin\varphi - \frac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}\cos\varphi}$ et pro $\dfrac{\operatorname{tg}\delta}{\cos t}$ substituendo valorem $\operatorname{tg} N$ fluit aequatio in contextu)

Ex hac calculata vera altitudine Solis h, invenitur apparens per

$$h' = h + \text{Refract.} - \text{Parallaxis altitud.}$$

ubi refractio pro approximata altitudine quaeri debet.

Si dein h'' est observata altitudo objecti terrestris et Δ observata distantia Solis ab hoc objecto, dein invenitur ad Horizontem reducta distantia Δ' Solis ab hoc objecto per sequentem expressionem

$$\sin^2\frac{\Delta'}{2} = \frac{\sin\frac{\Delta + h' - h''}{2} \sin\frac{\Delta - h' + h''}{2}}{\cos h' \cos h''}$$

(nimirum ex triangulo cujus tria latera sunt cognita. — Vid. quoque Puissant traité de Geodésie Vol. 2. p. 152 et Vol. 1. p. 174.)

Si $\frac{\Delta'}{2}$ fere est 90°, melius erit, sumere expressionem similem pro $\cos^2\frac{\Delta'}{2}$, dein est quaesitum Azimuthum ω' objecti terrestris aequale summae aut differentiae quantitatum ω et Δ'. —

Determinatio Azimuthi ω' praecipue dependet a determinatione temporis, quod facile videre possumus, si assumamus alium seu non multum differentem angulum horarium; in nostris latitudinibus error unius minuti secundi in tempore, jam producit 10" in azimutho, hinc Astronomi cura principalis debet esse, ut quam accuratissime determinet suum tempus. — Si desideratur Azimutum magna cum praecisione, loco Sextantium, Theodolita vel circuli multiplicatores adhiberi debent, quae instrumenta ad hunc finem accuratiora resultata praebent, si hi circuli multiplicatores habent majorem circulum horizontalem; dein immediate cum his instrumentis mensuratur distantia azimuthalis Δ' objecti a Sole, et ex dato tempore observationis azimuthum Solis ω per calculum derivatur, ubi dein, uti prius, summa vel differentia quantitatum Δ' et ω, quaesitum Azimuthum dat. — Si autem plures tales distantiae Δ' sunt mensuratae, vel si Theodolitum multiplicat, has observationes simili modo tractare possumus, uti altitudines circummeridionales.

Sit t angulus horarius qui pertinet ad azimuthum ω, dein pertinet ad angulum horarium $t+\vartheta$ azimuthum $\omega+\Delta\omega$, ubi habemus

$$\Delta\omega = \vartheta.\frac{d\omega}{dt} + \frac{\vartheta^2}{1.2}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{\vartheta^3}{1.2.3}\frac{d^3\omega}{dt^3} + \ldots\ldots$$

Si n est numerus observationum, dein medium omnium azimuthorum, quod ad angulos horarios $t+\vartheta$, $t+\vartheta'$, $t+\vartheta''$ .... pertinet, erit aequale

$$\Delta\omega = \frac{\vartheta+\vartheta'+\vartheta''\ldots}{n}\cdot\frac{d\omega}{dt} + \frac{\vartheta^2+\vartheta'^2+\vartheta''^2\ldots}{1.2.n}\cdot\frac{d^2\omega}{dt^2} + \ldots\ldots$$

Si autem assumitur t pro angulo horario, qui pro medio omnium temporum observationum valet, dein $\vartheta+\vartheta'+\vartheta''\ldots\ldots=0$ sive est, si altiores potentiae negligantur. —

$$\Delta\omega = \frac{d^2\omega}{ndt^2}\sum\frac{\vartheta^2}{2}$$

Si retinemus priores significationes, est

$$\cot\omega = \frac{\sin\varphi\cos t - \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\delta}{\sin t}$$

hinc

hinc $$\frac{dw}{dt} = \frac{\sin\varphi - \sin\delta \sin h}{\cos^2 h} \quad \text{et}$$

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \left(\frac{2\sin h(\sin\varphi - \sin\delta\sin h)}{\cos^3 h} - \frac{\sin\delta}{\cos h}\right)\frac{dh}{dt}$$

Sed $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$, hinc quoque

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\cos\varphi \cos\delta \sin t}{\cos h}$$

ergo $$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{\cos\varphi\cos\delta\sin t}{2\cos^2 h}\left\{(\sin\varphi + \sin\delta)\,tg^2 \tfrac{1}{2}z - (\sin\varphi - \sin\delta)\,ctg^2 \tfrac{1}{2}z\right\}$$

ubi $z = 90 - h$

Si nunc nominemus $\frac{d^2w}{dt^2} = M$, erit

$$\Delta w = \frac{M}{n}\sum \frac{2\sin^2 \frac{1}{2} d}{\sin 1''}$$

et quantitates $\frac{2\sin^2\frac{1}{2}d}{\sin 1''}$, $\frac{2\sin^2 d'}{\sin 1''}$ etc. sumi possunt ex tabula, quae quoque est constructa pro altitudinibus circummeridionalibus. Hac ratione calculus azimuthi evadet ita securus, uti simplex, quum hic reductio observatae distantiae ad Horizontem, uti quoque omnis respectus ad refractionem etc. non habet locum. ——

Loco Solis etiam stella polaris vel quaevis stella in vicinia poli adhiberi potest, si objectum terrestre noctis tempore illuminatur. — Si eligantur tempora, quando stella polaris est in suis maximis digressionibus, et designentur per t et w angulus horarius et azimuthum momento hujus maximae digressionis, tum est ex triangulo rectangulo inter stellam, polum et Zenith

$$\sin\varphi = \sin\delta \sin h$$
$$\sin w = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$
$$\sin t = \frac{\cos h}{\cos\varphi}$$

Si hi valores substituantur in prioribus, invenitur

$$\frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dh}{dt} = -\cos\delta, \quad \frac{d^2w}{dt^2} = -\frac{\sin w \sin\delta}{\sin t}$$

si azimuthum a parte boreali Meridiani numeratur; ergo iterum

$$\Delta w = -\frac{\sin w \sin\delta}{n.\sin t}\sum\frac{2\sin^2\frac{1}{2}d}{\sin 1''}$$

ubi w et t inveniuntur ex aequationibus

$$\sin\omega = \frac{\cos\delta}{\cos\varphi}$$

$$\cos t = tg\,\varphi\, ctg\,\delta$$

(Vid. Monatl. Correspond. 1812 Junii. Götting. Comment. XI. Tom. Soldners neue Methode beobachtete Azimuthe zu reduciren München 1813, et Berliner Jahrbuch 1818 p. 125 Zeitschrift für Astronomie III. B. p. 82.)

Si azimuthum alicujus objecti terrestris bene determinatum, ex hoc quoque notus est situs Meridiani pro loco observatoris. Immediate etiam hic situs innotescit per observationes cum Theodolito, si nimirum et ante et post culminationem Solis aut alicujus stellae aequalis altitudines observantur, ubi medium inter ambas observationes, vel medium arcus per tubum in circulo horizontali descripti, hunc situm lineae Meridianae indicat. In observatione Solis vero quoque respicere debemus variationem in declinatione. – Commodissimum autem et securissimum medium autem suppeditat culminationem. — Sed et ope Sextantium, situs lineae meridianae ad plura milliaria accurate determinari potest per methodum quam dedit B. Zach. – Quum applicatio hujus methodi pro praxi magnae est utilitatis, breviter hanc methodum indicabo. —

In distantia aliqua, ad libitum assumta, a loco observationis ponantur in jam fere nota directione Meridiani aliqua signa, et observentur in quolibet horum signorum et ante et post Meridiem aliquae correspondentes distantiae Solis ab his signis. Medium binorum temporum, dat incorrectum meridiem, qui propter variationem declinationis Solis, uti altitudines correspondentes corrigi ~~debent~~ debet. Si φ est altitudo poli, δ declinatio, t semiintervallum temporis $d\delta$ variatio declinationis in tempore t, tandem h altitudo signorum, dum est correctio meridii secundum priora

$$\frac{d\delta}{15}\left(\frac{ctg(h+\delta)}{\sin t} - tg\,\delta\, ctg\,t\right)$$

Eadem

Eodem die observentur quoq correspondentes altitudines Solis, ex quibus obtinetur correctus verus meridies. —

Evidens est, meridiem signi tum coincidere cum hoc vero meridie altitudinum correspondentium, si situs signi revera est in Meridiano, et meridiem illum priorem esse, si signum magis orientem versus respectu meridiani jacet, et vice versa. Ex his differentiis meridierum et ex his notis ~~differentiis~~ distantiis signorum inter se, facile dein punctum determinari potest, ubi signa debent exstrui, ut revera sint in Meridiano. —

Hac ratione invenit B. Zach 7. April. 1801 Seebergi

	incorr. merid.	Correctio	Correct. Meridies
I sign.	11h 55' 34".92	+17".39	11h 55' 52".31
II sign.	11 56 1.25	+17.39	56 18.64
III sign.	56 31.18	+17.39	56 48.57

Ex altitudinibus correspondentibus autem inventus est correctus verus meridies 11h 56' 52".20

Hinc tertium signum 3".63 a Meridiano in ejus parte orientali distat. Primum autem signum distabat a tertio 68.6 poll, et secundum a tertio 36.5 poll. meridies primi et tertii signi differunt inter se 56".26, secundi et tertii 29".93. Si ergo x est distantia tertii signi a Meridiano, dein est ex primo et tertio

$$x = 3.63\left(\frac{68.6}{56.26}\right) = 4.426$$

ex secundo et tertio

$$x = 3.63\left(\frac{36.5}{29.93}\right) = 4.427$$

In medio igitur ex his determinationibus tertium signum 4.4265 poll. distat a Meridiano in parte orientali, et hinc hac quantitate signum magis orientem versus moveri debet ut revera sit in linea Meridiana loci observationis.

(: Vide Monathliche Correspond. 1801 April, May, August et 1803 Junii. :)

Determinatio Ascensionis rectæ siderum, Obliquitatis eclipticæ, et distantiæ corporum coelestium a terra

Observatio et determinatio Ascensionis rectæ alicujus sideris maximi momenti est in Astronomia; quia ex hac tantummodo per differentias ascensionum rectarum, ascensiones rectæ ceterorum siderum facile derivari possunt.

I. Invenire absolutam Ascensionem rectam Solis.

Sit δ observata declinatio Solis observati non longe post æquinoctium vernum, et δ'' declinatio ante æquinoctium autumnale. Si in ambobus diebus differentia Ascensionis rectæ Solis cum eadem fixa, cujus Ascensio recta ipsa incognita est, observatur, residuum harum differentiarum, si respicitur ad Præcessionem, Nutationem et Aberrationem, dabit motum Solis a in recta ascensione in intervallo temporum inter ambas observationes. —

Nominetur nunc incognita Ascensio recta Solis in prima observatione α et in secunda $180-\beta$ dicendum est, si e obliquitatem eclipticæ significat,

$$\sin\alpha \, tg\, e = tg\,\delta$$
$$\sin\beta \, tg\, e = tg\,\delta''$$

tunc

$$\sin\alpha : \sin\beta = tg\,\delta : tg\,\delta'' \quad \text{ex quo sequitur}$$

$$tg\,\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin(\delta-\delta'')}{\sin(\delta+\delta'')}\, ctg\,\frac{a}{2}$$

Si hic inventus arcus $\frac{\alpha-\beta}{2}$ addatur ad $\frac{\alpha+\beta}{2} = 90-\frac{a}{2}$, habetur α seu prima Ascensio recta, et si addatur

$\frac{\alpha-\beta}{2}$ ad $180-\frac{\alpha+\beta}{2} = 90+\frac{a}{2}$ habetur $180-\beta$ seu secunda Ascensio recta Solis, et quum ambobus diebus quoque differentia Solis et illius fixæ observata est, nota est quoque Ascensio recta fixæ. (: Vid. Berlin. Jahrb. 1791. p. 203 et Correspond. ast. Vol. XIII. N. I. :)

Hæc methodus ut videmus dependet ab obliquitate eclipticæ et ita, ut erroneæ suppositionis, notabilem influxum in inveniendum

resul-

resultatum habeant. — Error eclipticæ fere totus evitari potest, si observationes instituuntur in vicinia æquinoctiorum. —

II. Quum determinatio primæ absolutæ Ascensionis rectæ maximi momenti est, et quasi Basin totius Astronomiæ practicæ efficiat, necessarium est, præcipuam methodum ad hunc finem accurate indicare. — Primum officium erit determinatio tantum differentiarum Ascensionum rectarum plurium fixarum. — Ad hunc finem observantur, quoties fieri potest, earum culminationes in culminatorio. — Si dein assumitur una harum fixarum quoad suam Ascensionem rectam (: ex bonis observationibus aliorum Astronomorum :) qua data, per hoc innotescent quoque ascensiones rectæ omnium ceterarum; sed omnes hæ Ascensiones rectæ erunt affectæ communi errore, nimirum illo stellæ fundamentalis; differentiæ autem Ascensionum rectarum, ex observationibus, qua nullis erroribus affectæ supponuntur. — Hic communis error Ascensionum rectarum nostri catalogi fixarum sit dA.

Quilibet dies, quo Sol et una vel plures fixæ in culminatorio observatæ sunt, dat differentiam Ascensionis rectæ Solis et stellæ, et si Ascensio recta stellæ sumitur ex catalogo, Ascensionem rectam Solis, quam nominamus α, et quæ hinc etiam illo communi errore catalogi affecta erit. — Ex hac Ascensione recta et obliquitate eclipticæ apparenti, invenitur declinatio δ'' Solis per

$$\operatorname{tg}\delta'' = \sin\alpha \operatorname{tg} e$$ vel si quoque respicimus latitudinem Solis B.

$$\delta = \delta'' + B \cdot \frac{\cos e}{\cos \delta}$$

Si dein φ est altitudo poli loci observationis, ex determinato δ invenitur vera distantia a Zenit per

$$z = \varphi - \delta$$

Quum autem secundum priora α quantitate dA sit erronea, et quum et altitudo poli et obliquitas eclipticæ quantitatibus $d\varphi$, de erroneæ esse possunt, loco ultimæ æquationis, propriæ habebimus

$$z = \varphi - \delta + d\varphi - de \frac{\sin 2\delta}{\sin 2e} - dA \frac{\sin 2\delta}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

Si

Si autem eodem die etiam distantia a Zenith z' Solis imme-diate est observata, debet esse $z = z'$, h.e.

$$0 = z' - (\varphi - \delta) - d\varphi + de \frac{\sin 2\delta}{\sin 2e} + dA \frac{\sin 2\delta}{2 tg\alpha}$$

Hac ratione obtinemus tot aequationes conditionales formae adductae, quot habemus dies, quibus Sol in circulo multipli-catore et Sol et fixa in culminatorio observatae sunt. —

Si dein hae aequationes tractantur secundum methodum quadra-torum minimorum, maxime probabiles valores quantitatum $d\varphi$, de et dA obtinentur, h.e. determinatur exactitudo suppositae altitudinis poli per $d\varphi$, suppositae obliquitatis eclipticae per de et determinatur quoque error dA ascensionum rectarum, qui omnibus stellis assumti catalogi communis est.

Tota operatio hinc se reducit ad sequentia:

Quolibet die, quo una stellarum hujus catalogi, vel plures simul cum Sole observatae sunt in culminatorio et praeterea Sol cum circulo multiplicatore, derivatur primo ex observationibus in culminatorio Ascensio recta Solis, et ex hac per calculum Solis distantia a Zenith, et haec cum illa per circulum obtenta distantia comparata, dabit quaesitam aequationem conditionalem hujus diei.

Sed etiam inverse ex observationibus cum circulo, Ascensio recta Solis derivari, et ope hujus ex observationibus in culminatorio ascensio rec-ta stellae inveniri potest, et dein, si respiciuntur omnes correctio-nes, ita proceditur:

Ex observata in circulo distantia a Zenith z Solis quaeratur (: cum hy-pothetica altitudine poli φ, refractione r et parallaxi horizonta-li π Solis:) declinatio Solis.

Decli: = Alti: pol. — dist. a Zenith

Ex hac declinatione Solis ejus latitudine et hypothetica obliqui-tate eclipticae e, quaeratur per calculum ascensio recta α Solis. — Est nimirum

$$\sin\alpha = \frac{tg\delta}{tg e} = \frac{tg(\varphi - z)}{tg e} \quad \text{et hinc quoque}$$

$$d\alpha = d(\varphi - z) \cdot \frac{2 tg\alpha}{\sin 2\delta} - de \frac{2 tg\alpha}{\sin 2e}.$$

Ex

Ex hac ascensione recta Solis et ex eadem die observata in culminatorio differentia ascensionum rectarum Solis et unius earum stellarum, quaeratur ascensio recta hujus stellae. Posito hac ratione esse inventam ascensionem rectam hujus stellae aequalem a, dein proprie est vera ascensio recta hujus stellae, uti facile invenitur

$$= a + (d\varphi + d\pi \sin z - dr - dz)\frac{2\,tg\,\alpha}{\sin 2\delta} - de\,\frac{2\,tg\,\alpha}{\sin 2e}$$

ubi dr est error hypotheticae suppositae refractionis
de ------ obliquitatis eclipticae
$d\varphi$ ------ altitudinis poli
$d\pi$ ------ parallaxis horizontalis solis, et
dz ------ (divisionis aut observationis) circuli multiplicatorii.

Secundus similis dies observationis in signo opposito eclipticae sub eadem distantia a Zenith Solis, dat, quum nunc ascensio recta Solis est $180-\alpha$, veram ascensionem rectam illius fixae, si reducatur per praecessionem, nutationem et aberrationem ad primum diem observationis

$$a' - (d\varphi + d\pi \sin z - dr' - dz')\frac{2\,tg\,\alpha}{\sin 2\delta} + de\,\frac{2\,tg\,\alpha}{\sin 2e}$$

Dimidia summa ambarum est

$$\frac{a+a'}{2} + (dr' - dr + dz' - dz)\frac{tg\,\alpha}{\sin 2\delta}$$

Quum in hac ultima expressione correctiones $d\varphi$, $d\pi$ et de evanescant. Si ergo ambobus diebus observationum errores ascensionis rectae et instrumenti sibi sunt aequales, vel si $dr' - dr + dz' - dz = 0$ dein est dimidia summa ambarum prius inventarum ascensionum rectarum $\frac{a+a'}{2}$ quaesita vera ascensio recta stellae.

Hoc igitur supponit, ambobus diebus observatas distantias a Zenith Solis esse ejusdem magnitudinis, vel saltem fere ejusdem magnitudinis, quia alias dr' et dz' non sunt aequales dr et dz.

Si autem supponimus $dr' + dz' = dr + dz$ dein differentia priorum expressionum est

$$0 = (a - a') + (d\varphi + d\pi \sin z - dr - dz)\frac{4\,tg\,\alpha}{\sin 2\delta} - de\,\frac{4\,tg\,\alpha}{\sin 2e}$$

vel

vel $d\varphi - dr - dz = -\frac{(a-a')}{2} \cdot \frac{\sin 2\delta}{2\,tg\,\alpha} + de \cdot \frac{\sin 2\delta}{\sin 2e} - d\pi \sin z$

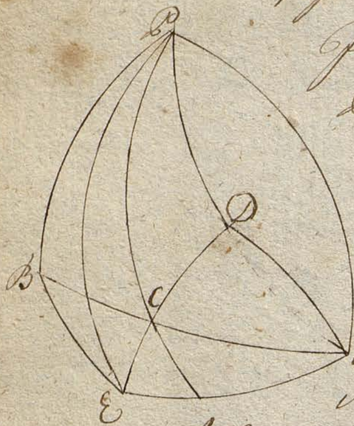
et ope hujus aequationis, in qua $\frac{a-a'}{2}$ semper qua notum et $d\pi = 0$ supponi potest, inveniuntur ex observationibus Solis errores $d\varphi$, de, dr et dz. —

III. Si hac ratione ascensio recta alicujus sideris est inventa, dein facile ex differentiis ascensionum rectarum etiam absolutae ascensiones rectae ceterorum inveniri potest. — Etiam possumus, si plures stellae quoad suam positionem notae sunt, per observatas distantias harum ab aliis, ascensionem rectam et declinationem ultimarum invenire; quae methodus quoque ad cometas applicari potest, si v. c. tantummodo Sextanti sumus instructi, si illarum distantiae a duobus notis stellis fixis observantur. Ex his distantiis et ambobus temporibus observationum invenire Ascensionem rectam et declinationem, tantummodo reducitur ad solutionem similis problematis, quod jam prius habuimus, nimirum ex duabus distantiis a Zenith alicujus quoad suam positionem notae stellae et ex temporibus observationum invenire altitudinem poli et statum horologii.

Aliqua quoque dicere debemus de methodo antiquiorum determinandi positionem cometarum nimirum per sic dictum (Alignement). Necessaria est cognitio hujus methodi, si volumus calculare cometas observatos per Tychonem et alios astronomos sui aevi. Haec methodus potissimum consistit in sequentibus: Tenetur filum ad oculum, et facimus secare hoc filum cometam aut sidus, cujus positionem volumus determinare. Si hoc filum eodem tempore transit per duas stellas cognitas, nos sumus convicti cometam esse in eodem verticali cum his stellis; sed hoc non sufficit, inveniri adhuc debent duae aliae stellae, quas etiam filum tegit, quod transit per centrum cometae, dein cometa erit in intersectione horum duorum arcuum circuli maximi, qui conjungunt has stellas. — Ad calculum harum observationum, sequens methodus adhiberi potest. —

Supponamus per primam positionem (Alignement) cometam esse inventum in C in arcu circuli maximi AB, per secundam in arcu

in arcu DE; A, B, D, E, sunt stellæ cognitæ; P sit polus vel æquatoris vel ecliptieæ quoad volumus determinare vel ascensionem rectam et declinationem vel potius longitudinem et latitudinem. — In triangulo DPA calculentur anguli PDA; PAD, per Analogias Neperi; determinetur quoque AD



In triangulo BPA calculetur angulus PAB. In triangulo PDE calculetur angulus ad D, dum habetur in triangulo DAC, AD, DAC = PAC − PAD, ADC = 360° − PDA − PDC; ex his calculetur CD; dum habetur tandem PD, CD et PDC ex quibus et DPC. — PC erit distantia polaris cometæ, et DPC angulus ad polum inter stellam cognitam D et cometam C. Loco triangulorum ACD, DCA et PDC, possumus sumere triangula ACE et CPE. — Similes conclusiones possumus facere circa punctum B. — (Vide exempl. secundum hanc methodum in Cometograph. de Pingré tom II p. 223.) Sed hæc methodus est admodum complicata, uti videre possumus in exemplo adducto; necessaria sunt quinque triangula et 43 logarithmi. — Sequens methodus non est tam complicata; quæ methodus brevitate et commoditate sese commendat. Nulla figura necessaria est et tantum 33 logarithmi exiguntur. — Sit δ declinatio cometæ, C ejus ascensio recta, A', A'' ascensiones rectæ stellarum primæ positionis (alignement) D' et D'' earum declinationes, A''', A^{IV} ascensiones rectæ stellarum secundæ positionis, D''', D^{IV} earum declinationes.

Ex trigonometria habemus aequationem, quæ exprimit relationem inter tria puncta ejusdem circuli maximi, quæ ergo est pro nostro casu:

$$tg\,\delta = \frac{tg\,D'\sin(A''-C) + tg\,D''\sin(C-A')}{\sin(A''-A')} = \frac{tg\,D'''\sin(A^{IV}-C) + tg\,D^{IV}\sin(C-A''')}{\sin(A^{IV}-A''')}$$

ex quo

$$tg\,D'\sin(A^{IV}-A''')\sin(A''-C) + tg\,D''\sin(A^{IV}-A''')\sin(C-A') = tg\,D'''\sin(A''-A')\sin(A^{IV}-C) + tg\,D^{IV}\sin(A''-A')\sin(C-A''')$$

vel

$$tg\,D'\sin(A^{IV}-A''')\sin A''\cos C - tg\,D'\sin(A^{IV}-A''')\cos A''\sin C + tg\,D''\sin(A^{IV}-A''')\cos A'\sin C - tg\,D''\sin(A^{IV}-A''')\sin A'\cos C =$$
$$= tg\,D'''\sin(A''-A')\sin A^{IV}\cos C - tg\,D'''\sin(A''-A')\cos A^{IV}\sin C + tg\,D^{IV}\sin(A''-A')\cos A'''\sin C - tg\,D^{IV}\sin(A''-A')\sin A'''\cos C;$$

Dividendo per cos C erit

Löst man die zwey Dreyecke $m\iota d$, $m2d'$ auf, so ist

$$tg\,\eta = \frac{tg\,b}{\sin\omega} = \frac{tg\,b'}{\sin(a'-a+\omega)}$$

oder $\frac{tg\,b'}{tg\,b} = \frac{\sin(a'-a+\omega)}{\sin\omega}$ also

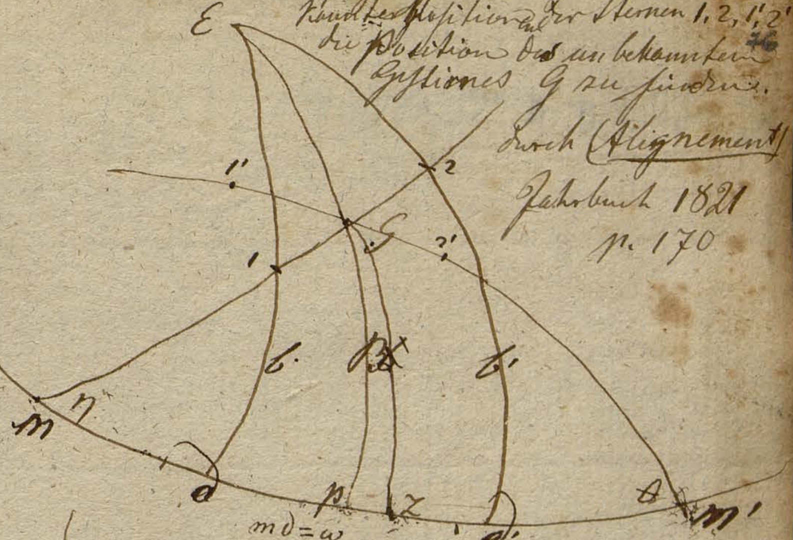
löst man die Tangente in Sin. u. Cos. auf

so bekommen wir

$$\frac{\sin b' \cos b}{\sin b \cos b'} = \frac{\sin(a'-a+\omega)}{\sin\omega} \text{ oder}$$

$$\sin b' \cos b : \sin b \cos b' = \sin(a'-a+\omega) : \sin\omega$$

$$\sin(b'+b) : \sin(b'-b) = \sin(a'-a+\omega) + \sin\omega : \sin(a'-a+\omega) - \sin\omega$$



$\Upsilon m = N$ $\quad \Upsilon d = a \quad \Upsilon m = \Upsilon d - md = a - \omega$

$\Upsilon m' = N'$ $\quad \Upsilon d' = a'$

$md' = a' - N = a' - a + \omega \qquad pz = x$

$mm' = 2E = N' - N$

B ist die Breite des unbekannten Gestirns

Jetz hat man $\sin a + \sin b = 2 \sin\frac{a+b}{2} \cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = 2 \sin\frac{a-b}{2} \cos\frac{a+b}{2}$

$$\text{also } \frac{\sin(b'+b)}{\sin(b'-b)} = \frac{\sin(a'-a+\omega)+\sin\omega}{\sin(a'-a+\omega)-\sin\omega} = \frac{2\sin(\omega+\frac{a'-a}{2})\cos\frac{a'-a}{2}}{2\sin\frac{a'-a}{2}\cos(\omega+\frac{a'-a}{2})} = tg(\omega+\tfrac{a'-a}{2})\, ctg\,\tfrac{a'-a}{2}$$

$$\text{daher } tg(\omega + \tfrac{a'-a}{2}) = tg\,\frac{a'-a}{2}\, \frac{\sin(b'+b)}{\sin(b'-b)}$$

Aus dem Gestirne ziehe man auf den Halbierungspunkt von $mm' = 2E$ den Bogen Gz so wird $pz = x$

denn, wenn man die zwey Dreyecke mGp u. pGm' auflösen wird

so erhält man $tg\,B = tg\,\eta \sin(E-x) = tg\,\theta \sin(E+x)$

$$tg\,\eta : tg\,\theta = \sin(E+x) : \sin(E-x)$$

$$tg\,\eta + tg\,\theta : tg\,\eta - tg\,\theta = \sin(E+x) + \sin(E-x) : \sin(E+x) - \sin(E-x)$$

$$\frac{tg\,\eta + tg\,\theta}{tg\,\eta - tg\,\theta} = \frac{\sin(E+x)+\sin(E-x)}{\sin(E+x)-\sin(E-x)}$$

$$\frac{\sin(\eta+\theta)}{\sin(\theta-\eta)} = \frac{2\sin E \cos x}{2\sin x \cos E} = tg\,E\, ctg\,x$$

$$tg\,x = tg\,E\, \frac{\sin(\theta-\eta)}{\sin(\theta+\eta)}$$

$\mathrm{tg}\,D' \sin(A^{IV}-A^{III}) \sin A'' - \mathrm{tg}\,D'' \sin(A^{IV}-A^{III}) \sin A' - \mathrm{tg}\,D''' \sin(A''-A') \sin A^{IV} + \mathrm{tg}\,D^{IV} \sin(A''-A') \sin A''' =$
$= \mathrm{tg}\,D' \sin(A^{IV}-A^{III}) \cos A''\, \mathrm{tg}\,C - \mathrm{tg}\,D'' \sin(A^{IV}-A^{III}) \cos A'\, \mathrm{tg}\,C - \mathrm{tg}\,D''' \sin(A''-A') \cos A^{IV}\, \mathrm{tg}\,C + \mathrm{tg}\,D^{IV} \sin(A''-A') \cos A'''\, \mathrm{tg}\,C$; et

$$\mathrm{tg}\,C = \frac{\mathrm{tg}\,D' \sin(A^{IV}-A^{III}) \sin A'' - \mathrm{tg}\,D'' \sin(A^{IV}-A^{III}) \sin A' - \mathrm{tg}\,D''' \sin(A''-A') \sin A^{IV} + \mathrm{tg}\,D^{IV} \sin(A''-A') \sin A'''}{\mathrm{tg}\,D' \sin(A^{IV}-A^{III}) \cos A'' - \mathrm{tg}\,D'' \sin(A^{IV}-A^{III}) \cos A' - \mathrm{tg}\,D''' \sin(A''-A') \cos A^{IV} + \mathrm{tg}\,D^{IV} \sin(A''-A') \cos A'''}$$

aequatio cujus symmetria est mirabilis. —
Inventa hac ratione ascensione recta C, invenitur declinatio per unam priorum aequationum pro $\mathrm{tg}\,\delta$. —
Si stellae sunt datae quoad suas longitudines et latitudines, quod in observationibus antiquorum fere semper locum habet, tantummodo omnes D in λ et omnes A in L mutari debent; invenitur hac ratione

$$\mathrm{tg}\,\delta = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda' \sin(L''-C) + \mathrm{tg}\,\lambda'' \sin(C-L')}{\sin(L''-L')} = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda''' \sin(L^{IV}-C) + \mathrm{tg}\,\lambda^{IV} \sin(C-L''')}{\sin(L^{IV}-L''')}.$$

et

$$\mathrm{tg}\,C = \frac{\mathrm{tg}\,\lambda' \sin(L^{IV}-L''') \sin L'' - \mathrm{tg}\,\lambda'' \sin(L^{IV}-L''') \sin L' - \mathrm{tg}\,\lambda''' \sin(L''-L') \sin L^{IV} + \mathrm{tg}\,\lambda^{IV} \sin(L''-L') \sin L'''}{\mathrm{tg}\,\lambda' \sin(L^{IV}-L''') \cos L'' - \mathrm{tg}\,\lambda'' \sin(L^{IV}-L''') \cos L' - \mathrm{tg}\,\lambda''' \sin(L''-L') \cos L^{IV} + \mathrm{tg}\,\lambda^{IV} \sin(L''-L') \cos L'''}$$

(dein est C longitudo et δ latitudo cometae

Bessel reduxit priorem methodum celeb. Delambre ad breviores et simpliciores formulas (Astron. Jahrbuch 1821 p. 170. 171) et Olbers dedit adhuc simpliciorem methodum.

Sint longitudines primarum duarum stellarum a, a' sequentium α, α'; b, b' — β, β' latitudines. Primo quaerantur puncta intersectionis horum duorum circulorum maximorum cum ecliptica ex sequentibus notis formulis

$$\mathrm{tg}\left(\alpha + \frac{a'-a}{2}\right) = \mathrm{tg}\,\frac{a'-a}{2} \cdot \frac{\sin(b'+b)}{\sin(b'-b)}$$
$$\mathrm{tg}\left(\alpha' + \frac{\alpha'-\alpha}{2}\right) = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha'-\alpha}{2} \cdot \frac{\sin(\beta'+\beta)}{\sin(\beta'-\beta)}$$

et longitudines horum punctorum intersectionis N et N' sunt $N = a-\alpha$ $N' = \alpha'-\alpha$. Inclinationes horum circulorum versus eclipticam inveniuntur ex $\mathrm{tg}\,\eta = \frac{\mathrm{tg}\,b}{\sin \alpha}$, $\mathrm{tg}\,\theta = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sin \alpha'}$. Si nunc ponatur $N'-N = 2E$ et facimus $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,E \frac{\sin(\theta+\eta)}{\sin(\theta-\eta)}$ ~~latitudo innotescit ex aequatione~~ dein est $N+E+x = N'-E+x$ longitudo ignoti astri et latitudo innotescit ex aequatione $\mathrm{tg}\,B = \mathrm{tg}\,\eta \sin(E+x) = \mathrm{tg}\,\theta \sin(E-x)$. — Ad has formulas tantum 26 logarithmi sunt necessarii. ———

Aliae non minoris momenti sunt observationes obliquitatis ecclipticae. Si h est altitudo Solis tempore solstitii aestivi, δ ejus maxima declinatio et φ altitudo poli: dein est $h = 90 - \varphi + \delta$ et eadem ratione pro solstitio hiemali $h' = 90 - \varphi - \delta$, hinc dimidia summa $\frac{h+h'}{2}$ ambarum altitudinum est aequalis altitudini Aequatoris, et semidifferentia $\frac{h-h'}{2}$ est aequalis δ h. e. obliquitati ecclipticae.
Ut ista methodus rite applicatur, notandum est, raro coincidere altitudo Solis tempore solstitii cum proxima altitudine ~~meridi~~ meridionali, ergo non sumi potest proxima altitudo meridionalis pro altitudine solstitiali, hinc tempore meridiei instituta observatio, reduci debet ad tempus solstitii. Praeterea haec obliquitas ecclipticae propter suam diminutionem secularem et propter Nutationem variationibus est obnoxia, hinc in conjunctione duorum proximorum solstitiorum respici debet ad has variationes. —
Reductio cognitae declinationis ad declinationem solstitii sumi potest ex sequenti aequatione

$$tg\,\delta = tg\,e\,Sin\,\alpha$$

ubi δ est observata declinatio et α correspondens ascensio recta Solis. Haec aequatio dat quoque pro reductione ad solstitium

$$e - \delta = \vartheta^2 Sin\,2e - \frac{\vartheta^4}{2} Sin\,4e + \frac{\vartheta^6}{3} Sin\,6e$$

vel etiam

$$e - \delta = \vartheta^2 Sin\,2\delta + \frac{\vartheta^4}{2} Sin\,4\delta + \frac{\vartheta^6}{3} Sin\,6\delta$$

ubi $\vartheta = tg\,\frac{90-\alpha}{2}$

Prima harum expressionum multo commodior est quam secunda. Si vellemus facere reductionem $e - \delta$ independentem a vera longitudine λ Solis, habebimus:

$$Sin\,\delta = Sin\,e\,Sin\,\lambda$$

et hinc quoque

$$\frac{Sin\,e - Sin\,\delta}{Cos\,e} = 2\,tg\,e\,Sin^2\,\frac{90-\lambda}{2}$$

Si haec aequatio comparatur cum expressione $\frac{Sin\,a - Sin\,b}{Cos\,a} = z$ (: quam habuimus, quando sermo fuit de altitudinibus circummeridionalibus :)

(ark. 14) erit quoque

$$e - \delta = z - \frac{z^2}{1.2}\,tg\,e + \frac{z^3}{1.2.3}(1 + 3\,tg^2 e) + \cdots$$

ubi $z = 2\,tg\,e\,Sin^2\,\frac{90-\lambda}{2}$

Nunc transibimus ad methodos per quas distantia corporum coelest-um a terra seu eorum parallaxis inveniri potest.—

Simplicissimum medium, quod se offert ad hunc finem, est observatio ejusdem sideris ex duobus quoad suum situm bene determinatis valde a se invicem distantibus locis terrae, qui fere sub eodem jacent Meridiano. — Si supponitur terra qua sphaerois, quae per rotationem ellipseos circa ejus axim minorem orta est, et nominatur pro primo loco observata distantia a Zenith Z, observata altitudo poli φ, et geocentrica altitudo poli $\varphi-\omega$, radius terrae pro hoc puncto r et tandem x angulus lineae visualis cum linea, quae centra sideris et terrae conjungit, et pro altero loco eadem quantitates cum signis, dein invenitur facile distantia R centrorum sideris et terrae per sequentem duplicem expressionem:

$$R = \frac{r \sin(Z-\omega)}{\sin x} = \frac{r' \sin(Z'-\omega')}{\sin x'}$$

et praeterea $x + x' = (Z+Z') - (\varphi+\varphi') = m$

Ex his duabus aequationibus sequitur

$$tg\, x = \frac{r \sin(Z-\omega) \sin m}{r' \sin(Z'-\omega') + r \sin(Z-\omega) \cos m}$$

$$tg\, x' = \frac{r' \sin(Z'-\omega') \sin m}{r \sin(Z-\omega) + r' \sin(Z'-\omega') \cos m}$$

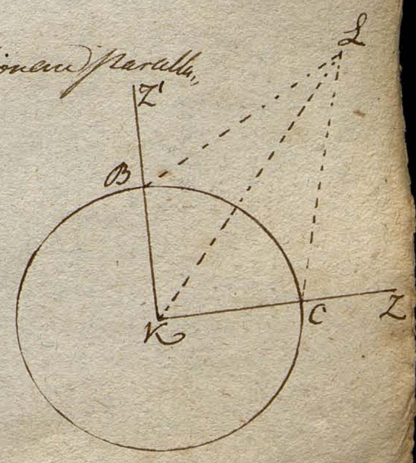
$r' \sin(Z'-\omega') \sin x = r \sin(Z-\omega) \sin x'$
pro $\sin x'$ ponatur valor erit
$r' \sin(Z'-\omega') \sin x = r \sin(Z-\omega) \sin(m-x)$
vel
$r' \sin(Z'-\omega') \sin x = r \sin(Z-\omega) \sin m \cos x - r \sin(Z-\omega) \sin x \cos m$
et hinc
$(r' \sin(Z'-\omega') + r \sin(Z-\omega) \cos m) \sin x = r \sin(Z-\omega) \sin m \cos x$
ergo $tg\, x =$ — — —

Si dein π est parallaxis horizontalis sideris pro Aequatore terrae et A radius Aequatoris, dein est $\sin \pi = \frac{A}{R}$

vel approximative $\pi = \frac{A . m}{r \sin(Z-\omega) + r' \sin(Z'-\omega')}$

La Caille et Lalande usi sunt sequenti methodo ad determinationem parallaxis lunae et Martis. — Sit C promontorium bonae spei, Z ejus Zenith; B. Berolinum, Z' ejus Zenith, L luna. Observator in centro terrae observaret ZKL distantiam lunae a Zenith in promontorio et $Z'KL$ Berolini, summa ZKZ' erit differentia latitudinum seu distantiae revera observatae sunt $ZCL = ZKL + CLK$; $Z'BL = Z'KL + BLK$ quarum summa dat $ZCL + Z'BL = (ZKL + Z'KL) + CLK + BLK =$
$= ZKZ' + \pi \sin ZCL + \pi \sin Z'BL$. — $Z + Z' = A + A' + \pi(\sin Z + \sin Z')$ et hinc

$$\pi = \frac{(Z+Z') - (A+A')}{\sin Z + \sin Z'} = \frac{(Z+Z') - (A+A')}{2 \sin \frac{1}{2}(Z+Z') \cos \frac{1}{2}(Z-Z')}$$



Expressio superior pro π supponit ambos observatores esse in diversis partibus Aequatoris. Si sunt in eadem parte, minor altitudo poli negativa debet assumi uti ejus w. Si sidus est pro ambobus in eadem parte Zenithi, dein minor harum distantiarum a Zenith etiam est negativa. Si tandem loci observationum non accurate jacent sub eodem Meridiano, respici debet ad variationem declinationis in intervallo temporis, quum observationes non amplius sint tautochronae. Hac ratione determinavit Lacaille in promontorio bonae spei et Lalande Berolini parallaxin Lunae et Martis. Aliam methodum calculandi tales observationes, dedit Duséjour in Mémoires de l'Acade. des sciences. année 1782 p. 321 et 1783. p. 263. – (: Delambre 2. Vol. p. 292. p. 42.)

Si sidus autem non valde distat a terra, ex observationibus in uno eodemque loco ejus parallaxis derivari potest. –

Sit α et δ vera ascensio recta et declinatio lunae, α' ejus apparens parallaxi affecta, et A Zenith ascensio recta, φ geocentrica altitudo poli et r distantia observatoris a centro terrae, radio aequatoris pro unitate assumto, dein calculus parallaxeos est

$$\alpha-\alpha' = r.p \sin(A-\alpha')\frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$$

ubi p est parallaxis horizontalis in Aequatore. –

Posito igitur $r \sin(A-\alpha')\frac{\cos\varphi}{\cos\delta} = b$ et $\alpha-\alpha' = d\alpha$, erit

$$d\alpha = bp$$ et eadem ratione pro secunda observatione $$d\alpha_1 = b_1.p$$ hinc

$$p = \frac{d\alpha_1 - d\alpha}{b_1 - b} \text{ ---------- } (I)$$

et in hac ultima aequatione $d\alpha_1 - d\alpha$ seu differentia parallaxium est nota, ergo potest quoque inveniri valor quantitatis p. —

Quaeratur nimirum in ambabus observationibus differentia ascensionis rectae Lunae et alicujus fixae in ejus vicinia, ex qua apparentes ascensiones rectae lunae fluunt, quarum differentia sit m. Ex tabulis lunae vero, invenitur motus lunae in ascensione

ascensione recta, in intervallo temporis, vel differentia m ambarum verarum ascensionum rectarum lunae, et erit

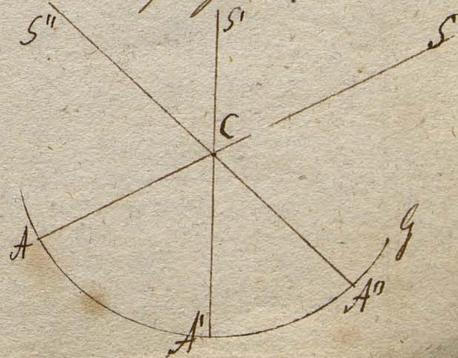
$$d\alpha' - d\alpha = m' - m$$

Ex generali expressione pro b videmus, hanc methodum tum potissimum debere adhiberi, si δ est maximum, et si ambae observationes in diversis partibus Meridiani et quidem in vicinia primi verticalis sunt institutae; hac ratione maximum acquirunt b, et b maximum suum valorem, et unum erit negativum. In observationibus ipsis filum micrometri, quod correspondet circulo parallelo, cum directione stellae non lunae parallelum esse debet, quia declinatio lunae celeriter se mutat et directio sui motus non amplius aequatori parallela assumi potest. (: Eemp. in Lettroa p. 233. Vol. I)

Parallaxis Solis seu ejus distantia a terra, a qua, uti vidibimus, nostra cognitio distantiarum absolutarum ~~omnium~~ planetarum et cometarum a Sole et inter se dependet, propter suam magnam distantiam a terra per priorem methodum non potest determinari, se illa exigit speciales considerationes, ad quas jam redibimus, quando sermo erit de transitu inferiorum planetarum ante discum solis.

Quum praeter praecessionem, nutationem et aberrationem, fere in qualibet fixa adhuc alius etsi parvus motus observatus est, cujus leges non noscimus, cujus directio autem secundum opinionem aliquorum Astronomorum aliquid commune habent, hi crediderunt, ejus causam non esse motum proprium harum stellarum, sed motus Solis ejusque totius systematis planetaris. (Vid. Berl. Ephem. 1787 p. 224)

Si nostrum systema solare, quod in his disquisitionibus quasi punctum consideratur, in uno saeculo arcum AA' suae magnae orbitae circa commune aliquod centrum gravitatis describit, arcum, qui hic spectari potest qua linea recta; et si C est stella, quae in hoc puncto immobilis assumitur, dein haec stella in ambobus sitibus nostri systematis, a terra vel sole videbitur in S et S'



Sit $ACA' = \pi$ parallaxis saecularis nostri systematis, et angulus $CA'G = m$, praeterea $AA' = r$ et $AC = \varrho$, dein est $\sin\pi = \frac{r}{\varrho}\sin m$, hinc $\frac{r}{\varrho}$ erit maximus valor parallaxeos (quia maximus valor $\sin m$ est unitas), si AC perpendiculariter insistit $A'G$. —

Sed r et ϱ sunt quantitates incognitae, et probabiliter etiam manebunt incognitae. Hinc quoque impossibile est, absolutum valorem parallaxeos inveniendi. Sed directio lineae AA' forsitan ex observationibus derivari potest. ——— Ad hunc finem quaerere possumus, an directiones linearum AC, $A'C$, $A''C$..... quae designant apparentes lineas visuales, omnes ab una sola linea AG secentur. —

Sint α, δ, ϱ, ascensio recta, declinatio et distantia stellae a terra vel Sole, et si reducitur hujus stellae positio ad tres perpendiculares coordinatas x, y, z, quarum x est in linea aequinoctiorum et xy in plano Aequatoris, dein est

$$x = \varrho\cos\delta\cos\alpha$$
$$y = \varrho\cos\delta\sin\alpha$$
$$z = \varrho\sin\delta$$

Si observatur v. c. post centum annos iterum eadem stella et nominentur $\alpha', \delta', \varrho'$ ascensio recta, declinatio et distantia hujus stellae hac observatione obtenta, et per praecessionem ad priorem epocham reducta, dein est

$$x' = r'\cos\delta'\cos\alpha'$$
$$y' = r'\cos\delta'\sin\alpha'$$
$$z' = r'\sin\delta'$$

ubi hinc suppositum est, quantitates $\alpha'\ \delta'$ et $\alpha\ \delta$ tantum differre propter motum totius systematis planetarii. —

Sint nunc X, Y, Z analogae coordinatae puncti coeli versus quod motus nostri systematis planetarii directus est, quod punctum brevitatis causa polum nominare volumus, et si per oculum observatoris et per ista loca apparentia stellae imaginatur planum ductum, hoc planum quoque transibit per istum polum. Si aequatio hujus plani est $z = Mx + Ny$, dein aequationes, quae exprimunt conditionem, istud planum transire per haec duo loca stellarum et per polum, erunt

$$z = Mx + Ny$$
$$z' = Mx' + Ny'$$
$$Z = MX + NY$$

Hinc eliminari debent quantitates M et N. ———

M =

$$M = \frac{z - Ny}{x} = \frac{z' - Ny'}{x'} = \frac{Z - NY}{X}.$$

hinc $(z-Ny)x' = (z'-Ny')x$, ex quo

$N(y'x - yx') = xz' - x'z$ et $N = \frac{xz' - x'z}{y'x - yx'}$. ulterius

$(z'-Ny')X = (Z-NY)x'$ et $N = \frac{x'Z - Xz'}{Yx' - y'X}$ hinc

$(x'Z - Xz')(y'x - yx') = (xz' - x'z)(Yx' - y'X)$

$Zxx'y' - z'Xxy' - Zx'^2y + z'Xyx' = Yxx'z' - Yx'^2z - Xxy'z' + Xx'y'z$

$Z(xx'y' - x'^2y) + X(z'x'y - z'y'x + xy'z' - x'y'z) + Y(x'^2z - xx'z') = 0$

$(xy' - x'y) + \frac{X}{Z}(yz' - y'z) + \frac{Y}{Z}(x'z - xz') = 0$

et ponendo $P = \frac{X}{Z}$ et $Q = \frac{Y}{Z}$ erit

$(xy' - x'y) + P(yz' - y'z) + Q(x'z - xz') = 0$ seu

$P(yz' - y'z) + Q(x'z - xz') = x'y - y'x$

Secundum problema deberent omnes stellae dare eundem valorem pro P et Q, et quum duae stellae sufficiant ad determinationem harum quantitatum, omnes ceterae stellae vel comprobabunt hanc hypothesin, necne. — Si in hac aequatione substituantur pro x, y...... eorum valores, et pro δ δ' introducantur distantiae a polo p, p' erit.

(1 terminus) $P(\varrho r' \cos p' \sin p \sin \alpha - \varrho r' \sin p' \cos p \sin \alpha'$ sed ($\varrho r'$ ubicunque se tollunt)

$2 \cos p' \sin p = \sin(p'+p) - \sin(p'-p)$ et $2 \cos p \sin p' = \sin(p'+p) - \sin(p-p')$

(nimirum $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ et ponendo $\frac{\alpha+\beta}{2} = p'$, $\frac{\alpha-\beta}{2} = p$)

hinc $\frac{1}{2}\sin\alpha\{\sin(p'+p) - \sin(p'-p)\} - \frac{1}{2}\sin\alpha'\{\sin(p'+p) - \sin(p-p')\}$

quum autem $p'-p$ est admodum parvum, est

$\frac{1}{2}\sin\alpha(\sin 2p - (p'-p)) - \frac{1}{2}\sin\alpha'(\sin 2p - (p-p'))$ quod dat

$\frac{1}{2}\sin 2p(\sin\alpha - \sin\alpha') + \frac{1}{2}(p-p')(\sin\alpha + \sin\alpha')$, ex quo

$\frac{1}{2}\sin 2p(2\cos\frac{\alpha+\alpha'}{2}\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}) + \frac{1}{2}(p-p')(2\sin\frac{\alpha+\alpha'}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha'}{2})$

et propter parvitatem differentiae $\frac{\alpha-\alpha'}{2}$ est

$\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cdot\sin 2p\cos\alpha + (p-p')\sin\alpha$ et quia $\sin 2p = 2\sin p\cos p$, erit

$(\alpha'-\alpha)\sin p\cos p\cos\alpha + (p-p')\sin\alpha$ quae quantitas adhuc multiplicari debet per P, et dat primam partem nostrae aequationis. Eadem ratione et cum ceteris. —

Hinc

Hinc $P\{(p'-p)\sin\alpha + (\alpha'-\alpha)\sin p\cos p\cos\alpha\} - Q\{(p'-p)\cos\alpha - (\alpha'-\alpha)\sin p\cos p\sin\alpha\} =$

$= (\alpha'-\alpha)\sin^2 p.$

Si nunc nominentur A, D, R, ascensio recta, declinatio et distantia poli, dein est

$X = R\cos D\cos A$
$Y = R\cos D\sin A$
$Z = R\sin D$

hinc quoque $P = \operatorname{tg} D\cos A$, $Q = \operatorname{tg} D\sin A$, et substitutis his omnibus valoribus in priori aequatione, est

$$(p'-p)\operatorname{tg} D\sin(\alpha-A) = (\alpha'-\alpha)(\sin^2 p - \sin p\cos p\operatorname{tg} D\cos(\alpha-A))$$

Et haec aequatio est admodum commoda ad determinationem rationis motuum $\frac{p'-p}{\alpha'-\alpha}$ omnium stellarum, si A et D jam sunt noti. Si igitur ultima aequatio pro pluribus stellis resolvitur, videbimus, an resultata observationum consentiant cum supposita hypothesi, nec ne.

Exemp. Anno 1760 observatum est α Aurigae

$\alpha = 74^\circ\ 44'\ 59''.5 \qquad p = 44^\circ\ 16'\ 27''.5$

Si ad hos numeros applicatur praecessio pro 42 annis

$+46'\ 1''.243$ et $-3'\ 35''.604$

dein habebimus pro anno 1802. $\alpha = 75^\circ\ 31'\ 0''.743$ et $p = 44^\circ\ 12'\ 51''.896$

Sed eodem anno observatum est $\alpha' = 75^\circ\ 31'\ 14''.400$ et $p' = 44^\circ\ 13'\ 12''.40$

hinc est 42 annis $p'-p = +20''.504$ et $\alpha'-\alpha = +13''.657$

Si hi valores in aequatione $P\{(p'-p)\sin\alpha + \ldots\ldots\}$ substituantur et ponatur pro medio $\alpha = 75^\circ\ 8'$ $p = 44^\circ\ 15'$ erit

$20''.085\,P + 1''.732\,Q - 6''.649 = 0$

Eodem modo inventum est ex observationibus sequentibus

Sirius $49''.072\,P + 12''.479\,Q + 16''.139 = 0$
Procyon $40''.478\,P + 12''.774\,Q + 28''.621 = 0$
Arcturus $29''.073\,P + 78''.312\,Q - 43''.222 = 0$
Aldebaran $4''.966\,P + 0''.062\,Q - 7''.250 = 0$
Wega $12''.216\,P - 6''.466\,Q - 1''.000 = 0$
Pollux $5''.177\,P + 12''.213\,Q + 24''.391 = 0$

Ad accuratam determinationem quantitatum P et Q eligi debent istae stellae, quarum motus apparens est maximus. Summa aequationum pro Sirio et Procyone dat $89''.550\,P + 25''.253\,Q = -44''.760$ et si haec aequatio cum illa pro ~~Sirio~~ Arcturo conjungitur, obtinetur

$P = cty D \cos A = -0.''311738$

$Q = cty D \sin A = -0.667604$

hinc quoq. $A = 244^\circ 58'$ $D = 53^\circ 37'$

et valor quantitatis A tantummodo aliquot minutis, ille autem pro D 13 gradibus differt ab illis valoribus quos dedit Herschel pro his duabus stellis. — Sed cum hoc etere aequationes pro aliis stellis non consentiunt ita, ut ex systemate praecedentium aequationum nul„ li valores quantitatum P et Q inveniri possint, qui omnibus tantum„ modo ad partem satisfacerent. Nihil aliud igitur restat, quam istas mutationes locorum stellarum fixarum propriis motibus attribuere, et hos semper observare; forsitan posteritas erit diu tam felix, ut detegat horum motuum causas et leges. —

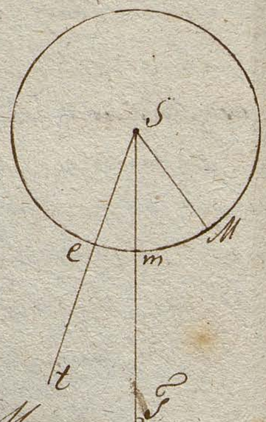
De maculis Solis

Maculae solis sunt partes & puncta diversae magnitudinis nigra et irregularia, quae saepius in superficie Solis apparent. Praeter has maculas dantur quoq. in superficie Solis puncta, quae magis lucent, quam ceterae partes, et quae nominantur Faculae. Quae hic dicitur de maculis, quoq. valet de faculis, quia diversus color nihil mutat nec in observatione, nec in calculo. —

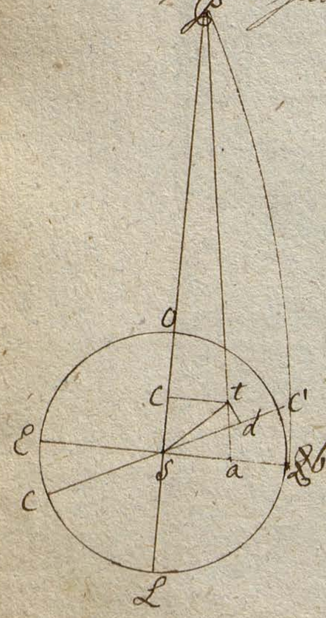
Si macula Solis est in medio disci solaris, videtur in sua forma na„ turali, quia hic est in superficie quae non magnam curvaturam habet, et quae perpendicularis est ad radium visualem. Eadem macula quando venit per rotationem ad unum limborum disci visibilis, ea apparebit admodum obliqua; illa perdit multum a sua magnitu„ dine sine mutatione altitudinis. Igitur, ut bene observetur ma„ cula tempore semirevolutionis visibilis, observari quoq. debent lim„ bus superior, inferior, praecedens et sequens. — Sed hoc forma non tantum(modo) est irregularis, ea quoq. est variabilis. Hae maculae sunt plus vel minus nigrae, limbi non sunt bene terminati et variabiles; saepius debemus centrum figurae observare, et hoc centrum ipsum non semper manet idem. —

Ad determinationem loci alicujus maculæ sumitur differentia in ascensione recta et declinatione cum uno vel ambobus limbis; ex hac concluditur distantia maculæ a centro Solis, et per hoc positio maculæ respectu eclipticæ h. e. longitudo et latitudo. –

Sit S centrum Solis, T terra, M macula in superficie Solis et in ecliptica seu ejus vicinia. Dum terra ex T in t movetur, macula progreditur motu magis rapido ex M ad m; si terra mansisset immobilis, macula adventa in m appareret in conjunctione; sed terra progressa est ad t, ergo angulus ad Solem, qui erat MST, nunc est mSt; ergo imminutus est arcu Mm et auctus arcu me, vel imminutus arcu (Mm – me)



Circulus Mme, quem describit macula, potest considerari qua orbita alicujus planetæ inferioris; sed si maculæ sunt adhærentes superficiei motus iste non est proprius maculæ; iste pertinet ad corpus, cui adhæret macula h. e. ad Solem, et hoc etiam semper supponemus; si autem istæ maculæ non sunt adhærentes, earum revolutiones erunt inæquales, erunt parvi planetæ qui moventur in vicinia Solis, et quorum revolutiones sunt inter se uti potentiæ $\frac{3}{2}$ eorum distantiarum



Sit nunc OEL discus visibilis Solis, EQ Aequator, OL circulus declinationis qui transit per centrum S, t macula – Observatur momentum, quo macula est sub filo instrumenti et quoq momentum, quo limbus præcedens et sequens Solis transit per filum. differentia temporum dabit nobis angulum ad polum P inter maculam et limbum Solis vel angulum aPb et hic angulus est expressus in tempore. Quolibet die noscimus tempus quo indiget radius Solis ad transitum per Meridianum, h. e. angulum SPb, ergo quoq notus est angulus SPa

Differentia distantiarum a Zenith inter limbum Solis et maculam t, dat OC et hinc SC = OS – OC vel at = Pt – Pa = = Pt – PS; hinc habetur Sa = SPa sin PS = 15 (tempus de PSa) cos decl. ☉

$tg\,x = tg\,tSa = \frac{at}{Sa}$, $St = \frac{Sa}{\cos tSa} = \frac{d.\,AR\,\cos D}{\cos tSa}$

Sit nunc SC' ecliptica, nos habebimus
$tg\,y = tg\,C'S\Omega = \cos \odot\, tg\,\omega$ et $SC' = x - y$ ubi ω est obliquitas eclipticae et y angulus circuli latitudinis et declinationis. —

Sit nunc S' centrum verum solis, S medium disci sui visibilis in terra T; determinari debet angulus $TS't$. Habetur
$S't : \sin T = S'T : \sin S't\,a$ — hinc $\sin S't\,u = \sin(S'+T) = \frac{S'T}{S't} \cdot \sin T =$
$= \frac{R \sin T}{R \sin \delta} = \frac{\sin T}{\sin \delta}$ ubi δ est radius apparens et R distantia Solis;
ex quo $S' = (S'+T) - T$

Arcus St potest valere et 90°; et tamen a terra tantummodo intercipitur angulus $16' = 960''$; hinc anguli heliocentrici possunt esse ad angulos geocentricos uti $324000 : 960$ h. e. uti $337.5 : 1$, hinc unum minutum secundum valebit $5' 37''.5$; ergo non sperandum est, cum praecisione nosci posse angulos heliocentricos; facile nimirum potest committi error 10' et saepius etiam major; et hoc explicat quoque cur observationes hujus generis non consentiant. Irradiatio, si existit, potest quoque producere errorem 18' pro aliqua macula, quae existeret in vicinia limbi fere unum minutum primum pro quolibet minuto primo arcus St.

Nunc noscimus arcum St h. e. distantiam heliocentricam angularem maculae et terrae, et nos habemus quoque longitudinem heliocentricam terrae — longitudinem S.

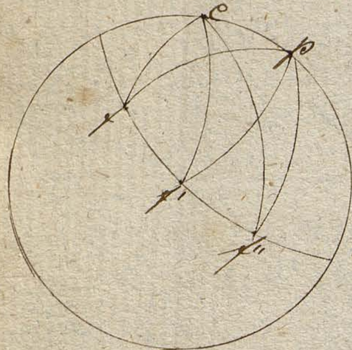
Nos noscimus angulum $x = tS\alpha$ cujus tangens $= \frac{dD}{dR \cos D}$; nos nosci mus angulum y seu $tg\,y = tg\,\omega \cos \odot$ ergo habebimus $tg\,Sd = \cos(x-y)\, tg\,St$, longitudo heliocentrica $= \mathfrak{F} - Sd$. —

$\sin td = \sin St \sin(x-y) = \sin$ latitud. — Attendere autem debemus ad signa pro omnibus his arcubus; Sd debet addi ad $180° \mp \odot$, si macula ante centrum Solis transit per Meridianum. — Per haec igitur determinata est longitudo et latitudo.

His suppositis calculari debet positio poli rotationis, distantia hujus poli ab ecliptica, vel inclinatio Aequatoris Solaris, nodi hujus aequatoris, declinatio maculae, et duratio revolutionis absoluta et relativa seu synodica. —

Ad hunc finem dantur variae methodi, methodus celeb. Pezinas, Bore,

Boscovich Lugnoli etc. Nos hic dabimus illam quae sua simplicitate potissimum se recommendat, et quae similitudinem habet cum aliquo jam enucleato problemate, nimirum ex temporibus quibus tres datae stellae eandem altitudinem assequuntur, altitudinem poli, statum horologii et errorem collimationis invenire. —



Sint f, f', f'' tria puncta sphaerae caelestis, in quibus lineae a centro Solis ad unam ejus maculam in prima, secunda et tertia observatione hanc sphaeram occurrunt, e sit polus septentrionalis eclipticae, p punctum, ubi prolongata axis solis in hac parte septentrionali sphaerae occurrit. — Ducantur circuli maximi ef, ef', ef'', pf, pf', pf''; hi tres ultimi arcus erunt inter se aequales. In triangulis fep, $f'ep$, $f''ep$ notae sunt differentiae longitudinum heliocentricarum $fef' = a$, $fef'' = a'$, et complementa latitudinum heliocentricarum maculae $fe = d$, $f'e = d'$, $f''e = d''$. ponatur nunc $fep = x$, $ep = y$. dein est in triangulis pef, pef', pef''

1.) $\cos pf = \cos y \cos d + \sin y \sin d \cos x$

2) $\cos pf' = \cos y \cos d' + \sin y \sin d' \cos(x-a)$

3) $\cos pf'' = \cos y \cos d'' + \sin y \sin d'' \cos(x-a')$

Quum autem $pf' = pf$, erit

$$\cos y(\cos d - \cos d') = \sin y \sin d' \cos(x-a) - \sin y \sin d \cos x$$

$$\operatorname{ctg} y(\cos d - \cos d') = \sin d' \cos(x-a) - \sin d \cos x$$

$$= \frac{\sin d' + \sin d}{2}(\cos(x-a) - \cos x) + \frac{\sin d' - \sin d}{2}(\cos(x-a) + \cos x)$$

$$2 \sin \frac{d'-d}{2} \sin \frac{d'+d}{2} \operatorname{ctg} y = 2 \sin \frac{d'+d}{2} \cos \frac{d'-d}{2} \sin \tfrac{1}{2}a \sin(x - \tfrac{1}{2}a) +$$
$$+ 2 \sin \frac{d'-d}{2} \cos \frac{d'+d}{2} \cos \tfrac{1}{2}a \cos(x - \tfrac{1}{2}a)$$

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} \frac{d'-d}{2} \sin \tfrac{1}{2}a \sin(x - \tfrac{1}{2}a) + \operatorname{ctg} \frac{d'+d}{2} \cos \tfrac{1}{2}a \cos(x - \tfrac{1}{2}a)$$

$$= A \sin m \sin(x - \tfrac{1}{2}a) + A \cos m \cos(x - \tfrac{1}{2}a)$$ si ponitur

$A \sin m = \operatorname{ctg} \frac{d'-d}{2} \sin \frac{1}{2}a$, $A \cos m = \operatorname{ctg} \frac{d'+d}{2} \cos \frac{1}{2}a$ ubi igitur

$$\operatorname{tg} m = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}a \operatorname{cotg} \frac{d'-d}{2} \operatorname{tg} \frac{d'+d}{2}, \text{ et } A = \frac{\operatorname{cotg} \frac{d'-d}{2} \sin \frac{1}{2}a}{\sin m} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{d'+d}{2} \cos \frac{1}{2}a}{\cos m}$$

Hinc est 4) $\operatorname{ctg} y = A \cos(x - \frac{1}{2}a - m) = A \cos(x - e)$ si $\frac{1}{2}a + m$ ponitur aequale e.

Eadem ratione obtinetur per combinationem aequationum 1 et 3 si ponitur $\sin m' = ctg\,\frac{d''-d}{2} \sin \frac{1}{2}a'$

$A' \cos m' = ctg\,\frac{d''+d}{2} \cos \frac{1}{2}a'$ hinc

$tg\,m' = tg\,\frac{1}{2}a' \cot g\,\frac{d''-d}{2}\, tg\,\frac{d''+d}{2}$ ~~A~~ et $A' = \frac{\cot g\,\frac{d''-d}{2} \sin \frac{1}{2}a'}{\sin m'} = \frac{ctg\,\frac{d''+d}{2} \cos \frac{1}{2}a'}{\cos m'}$

5) $ctg\,y = A' \cos(x-e')$ si $\frac{1}{2}a' + m' = e'$

hinc est $\cos(x-e) : \cos(x-e') = A' : A = 1 : \frac{A}{A'} = 1 : tg\,z$ si ponitur $tg\,z = \frac{A}{A'}$

$\cos(x-e) + \cos(x-e') : \cos(x-e) - \cos(x-e') = 1 + tg\,z : 1 - tg\,z$ vel

6) $ctg\,\frac{e-e'}{2} : tg\left(x - \frac{e+e'}{2}\right) = 1 : tg(45^\circ - z)$

Quum anguli m et m' per suas tangentes dati sint, dum sumere possumus primum vel tertium quadrantem, si hae tangentes sunt positivae, vel secundum vel quartum, si sunt negativae. Generatim determinantur hi anguli ita, ut $\sin m$ ~~cum~~ $ctg\,\frac{d'-d}{2} \sin \frac{1}{2}a$ et $\cos m$ cum $ctg\,\frac{d'+d}{2} \cos \frac{1}{2}a$ acquirant eadem signa. Eadem ratione cum m'. In determinatione quantitatis A, solet adhiberi expressio quae continet $\sin m$ si $m > 45^\circ$, altera expressio autem, si $m < 45^\circ$. Tandem in calculatione anguli $x - \frac{e+e'}{2}$ semper sumitur pro tangenti correspondens angulus acutus positivus autem negativus, quo ut tangens est positiva vel negativa. — Invento x prodit y ex n. 4. vel 5. — Distantiam pf maculae a polo solis invenire possumus per n. 1. 2. vel 3. Tandem est in triangulo fep $\sin pf : \sin ef = \sin fep : \sin fpe$

ex quo fluit angulus fpe, et eadem ratione inveniuntur anguli $f'pe$ et $f''pe$, hinc quoque nati sunt fpf', fpf''; et quum intervalla temporum observationum data sunt invenitur tempus revolutionis ex proportione

$$\left.\begin{matrix} fpf' : t \\ fpf'' : t' \end{matrix}\right\} = 360 : \text{tempus revolutionis}$$

Si macula solis fere totam fecit revolutionem, vel plus, anguli ad polum solis serviunt ad determinationem, quantum deficiat ab una revolutione, vel quantum jam plus confectum est. — Si nunc nominetur in intervallo temporis observationum T descriptus angulus $360^\circ \mp n$ dum est $360^\circ \mp n : 360 = T$: tempus totius revolutionis. —

Exempl. Secundum Lalande (Astron. III edit. n. 3260.) erant Jun. 1775 heliocentricae longitudines et latitudines alicujus maculae Solis sequentes:

14 Jun.	7^s	8°	$34'$	$21''$	0°	$36'$	$6''$	austr.
18 —	9	5	48	51	7	30	8	
21 —	10	19	0	14	11	35	16	

hinc $\frac{1}{2}a = 28^\circ\ 37'\ 15''$ $\quad d = 90^\circ\ 36'\ 6''$

$\frac{1}{2}a' = 30\ 12\ 56.5$ $\quad d' = 97\ 30\ 8$

$d'' = 101\ 35\ 16$

ex quo

$\log tg\, m = 12.1067424$

$\log tg\, m' = 12.068~~11~~33$

Quum nunc $ctg \frac{d+d'}{2} \cos \frac{1}{2}a$ sit quantitas negativa et

$ctg \frac{d'-d}{2} \sin \frac{1}{2}a$ - - - - - - positiva,

m cadit in secundum quadrantem, et est

$m = 90^\circ\ 26'\ 53''.14$

$m' = 90\ 29\ 23.08$

hinc

$e = 119\ 4\ 8.14$

$e' = 140\ 42\ 19.58$

$\frac{e-e'}{2} = -10\ 49\ 5.72$

$\frac{e+e'}{2} = 129\ 53\ 13.86$

$\log tg\, Z = 9.9982706$ $\quad Z = 44^\circ\ 53'\ 9''.31$

$\log tg (x - \frac{e+e'}{2}) = 8.0171606$, $\quad x - \frac{e+e'}{2} = -0^\circ\ 35'\ 45''.7$

$x = 129^\circ\ 17'\ 28''.2 = 4^s\ 9^\circ\ 17'\ 28''.2$

prima longitudo maculae $= 7\ 8\ 34\ 21$

Longitudo poli septentr. Solis $= 11^s\ 17^\circ\ 51'\ 49''.2$

Tandem ex n. 4 et 5. $y = \begin{cases} 7^\circ\ 15'\ 11''.7 \\ 7\ 15\ 11.5 \end{cases}$ angulus, sub quo Aequator Solis eclipticam secat.

Tres completæ observationes igitur sufficiunt ad solutionem hujus problematis; quum autem parvi errores observationum macularum, magnos errores in resultatis h. e. in situ aequatoris solaris et in tempore revolutionis producunt, majori numero observationum superstrui debent hæ determinationes, ut imminuantur probabiles errores observationum. Si autem sumuntur plures observationes, quam revera sunt necessariæ, obtinentur plures aequationes, quam occurrunt incognitæ, et problema evadit plus quam determinatum. — Quum talia problemata in astronomica praxi sæpius occurrunt, præcipua de resolutione problematum hujus generis adferam. —

Methodus, quam prius Astronomi adhibuerunt, resolvendi tales aequationes, quarum numerus superat numerum incognitarum, consistit in eo, ut omnes aequationes datæ combinentur inter se ad determinationem alicujus incognitæ ita, ut factor hujus determinandæ quantitatis tam magnus, uti fieri potest, et e contrario factores omnium reliquarum tam parvi, uti fieri potest evadant. Dein nimirum parvi errores, qui forsitan in determinatione reliquarum incognitarum adhuc contenti sunt, ad determinationem hujus incognitæ parvum exserunt influxum; quia reliquarum factor est admodum parvus, et factor incognitæ qua divisor reliquarum est admodum magnus. — Ad obtinendam hanc combinationem, mutantur omnia signa omnium aequationum ita, ut factor primæ incognitæ in omnibus aequationibus habeat idem signum. — Summa omnium hac ratione mutatarum aequationum dabit quæsitam combinationem. — Hac ratione proceditur etiam cum ceteris aequationibus, et ita habentur tot aequationes, quot sunt incognitæ, ex quibus dein facile valores omnium incognitarum derivari possunt. —

Sint e. g. sequentes aequationes datæ

$$0 = 3 - x + y - 2z$$
$$0 = 5 - 3x - 2y + 5z$$
$$0 = 21 - 4x - y - 4z$$
$$0 = 14 + x - 3y - 3z$$

Ad obtinendam aequationem pro x, in ultima aequatione mutantur signa, et dein dat summa omnium aequationum

$$0 = 15 - 9x + y + 2z$$

Eadem ratione pro y

$$0 = 37 - 5x - 7y$$

et tandem pro z

$$0 = 33 - x - y - 14z$$

eliminando ex his tribus aequationibus x, y, z erit $x = 2.486$, $y = 3.517$ $z = 1.928$ et hi valores assumuntur pro maxime probabilibus quantitatibus x, y, z. Hi valores autem dant sequentes errores praecedentium aequationum:

pro prima	0.175	loco 0
secunda	0.148	
tertia	− 0.173	
quarta	0.151	

Novissimis temporibus excogitarunt astronomi magis exactam methodum resolvendi hoc problema, de qua notabilia adferam. –

Sint plures datae aequationes formae

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= m + ax + by + cz + \ldots\ldots \\ \Delta' &= m' + a'x + b'y + c'z + \ldots\ldots \\ \Delta'' &= m'' + a''x + b''y + c''z + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots (A)$$

in quibus numerus incognitarum $x, y, z \ldots$ minor est, quam numerus aequationum. Determinandi sunt maxime probabiles valores harum incognitarum. Sic est v. c. longitudo penduli quod in uno minuto secundo unam facit revolutionem, pro latitudine geographica φ

$$440.39 - 1.25 \cos 2\varphi \quad \text{(hic Paris)}$$

Quum autem hi duo numeri adhuc aliquam incertitudinem continere possunt, assumere possumus $440.39 = x$ $\quad 1.25 = y$ $\quad \cos 2\varphi = b$ et hinc esse pro qualibet latitudine calculata longitudo penduli $m' = x - by$. – Si autem in eodem loco observata longitudo est m, deberet esse $m - m' = 0$, si x et y accurati sunt assumptae h. e. deberet esse

$$0 = m - x + by.$$

Si autem praesuppositi valores quantitatum x, y vel ipsa observatio erroribus sunt affecti, dein haec ultima aequatio non accurate locum habebit, sed obtinebitur aequatio formae $\Delta = m - x + by$ et quaelibet alia observatio dabit similem aequationem $\Delta' = m' - x + b'y$, ex quibus omnibus aequationibus dein valores maxime probabiles quantitatum x, y derivari debent.

Posito igitur pro expressione primae nostrarum aequationum $m + ax + by + cz + \ldots$ per calculum inveniendum esse valorem V, per observationem autem M, dein est $\Delta = V - M$ error hujus aequationis. – Eadem ratione obtinetur pro errore secundae aequationis $\Delta' = V' - M'$ pro tertia $\Delta'' = V'' - M''$ etc.

Supponemus primo, eum rerum statum fuisse in omnibus observationibus, ut nulla ratio adsit, cur aliam alia minus exactam esse suspicemur, sive ut errores aeque magnos in singulis pro aeque probabilibus habere oporteat. — Probabilitas itaq cuilibet errori Δ tribuenda, exprimetur per functionem ipsius Δ, quam per $\varphi\Delta$ denotabimus. Jam etiamsi hanc functionem prorsus assignare non liceat, saltem affirmare possumus, ejus valorem fieri debere maximum pro $\Delta=0$, plerumque aequalem esse pro valoribus aequalibus oppositis ipsius Δ, deniq evanescere, si pro Δ accipiatur error maximus vel major valor. — Porro probabilitas, errorem jacere inter limites Δ et $\Delta+d\Delta$ differentia infinite parva $d\Delta$ ab invicem distantes, exprimenda erit per $\varphi\Delta d\Delta$, proin generaliter probabilitas, errorem jacere inter D et D', exhibebitur per integrale $\int\varphi\Delta . d\Delta$ a $\Delta=D$ usq ad $\Delta=D'$ extensum. Hoc integrale a valore maximo negativo ipsius Δ usq ad valorem maximum positivum sive generalius a $\Delta=-\infty$ usque ad $\Delta=+\infty$ sumtum necessario fieri debet $=1$. —

Supponendo igitur systema aliquod determinatum valorum quantitatum $x. y, z$--- locum habere, probabilitas pro V ex observatione proditurum esse valorem M, exprimetur per $\varphi(M-V)$ substitutis in V pro $x. y. z.$ etc valoribus suis; perinde $\varphi(M'-V')$, $\varphi(M''-V'')$ etc exprimunt probabilitates, ex observationibus resultaturos esse functionum $V'. V''$ etc valores $M'. M''$ etc. Quamobrem quandoquidem observationes tanquam eventus ab invicem independentes spectare licet, productum

$$\varphi(M-V).\varphi(M'-V').\varphi(M''-V'') = W$$

exprimet expectationem seu probabilitatem, omnes istos valores simul ex observationibus prodituros esse. —

Maxime probabiles valores quantitatum $x. y. z.$ etc seu valores harum quantitatum, qui errores $\Delta . \Delta' . \Delta''$ etc revera producunt, naturaliter erunt ii, pro quibus probabilitas, illos errores revera locum habere, evadit Maximum, h.e. pro quibus quantitas W ipsa est Maximum. — Quum autem quantitas W sit functio quantitatum $x. y. z$---, maxime probabiles valores quantitatum $x. y. z$ in aequationibus $\left(\frac{dW}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dW}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dW}{dz}\right)=0$ --- erunt contenti. — Ad resolvendas has aequationes primo functio $\varphi\Delta$ debet esse nota. —

Sit $\frac{d\varphi\Delta}{\varphi\Delta} = \varphi'\Delta . d\Delta$ quaeratur $\varphi'\Delta$. —

Si genere

Si generatim aliqua quantitas ex pluribus aeque bonis observationibus eruenda est, sic dictum medium arithmeticum ex summa resultatorum cujuslibet observationis maxime probabilem valorem pro hac quantitate dabit. —

Ex assumtione hujus noti axiomatis sequitur, si $V = V' = V'' \ldots = \Psi$ et si μ est numerus observationum et $\Psi = \frac{1}{\mu}(M + M' + M'' + \ldots)$

$$0 = \varphi'(M - \Psi) + \varphi'(M' - \Psi) + \varphi'(M'' - \Psi) + \ldots\ldots$$

si dein praeterea supponitur $M' = M'' = M''' = \ldots\ldots M - \mu N$ erit generaliter i.e. pro quovis valore integro positivo ejusus μ, $\Psi = M - (\mu - 1)N$ per quid erit prior aequatio

$$0 = \varphi'(M - M + (\mu-1)N) + \varphi'(M - \mu N - M + (\mu-1)N) + $$
$$+ \varphi'(M - \mu N - M + (\mu-1)N) + \text{etc}$$

vel

$$0 = \varphi'(\mu-1)N + \varphi'(-N) + \varphi'(-N) + \varphi'(-N) + \ldots\ldots$$

h.e. $\quad 0 = \varphi'(\mu-1)N + (\mu-1)\varphi'(-N)$

Uti ex hac aequatione sequitur, quantitas φ' ita est comparata ut habeamus $\quad 0 = \varphi'(\Delta) + \varphi'(-\Delta), \quad 0 = \varphi'(2\Delta) + 2\varphi'(-\Delta), \quad 0 = \varphi'(3\Delta) + 3\varphi'(-\Delta)$ etc

ex quo sequitur, $\varphi'(\Delta)$ esse aequalem producto alicujus quantitatis constantis K in quantitatem Δ, vel $\varphi'(\Delta) = K\Delta$.

Prius autem erat $\varphi'\Delta = \frac{d.\varphi\Delta}{\varphi\Delta.d\Delta}$ hinc est

$$\frac{d\varphi\Delta}{\varphi\Delta} = K\Delta.d\Delta \quad \text{vel} \quad \log\varphi\Delta = \tfrac{1}{2}K\Delta^2 + \log\kappa \qquad (\kappa\alpha\pi\pi\alpha)$$

ubi κ designat constantem integrationis. — Si designatur per e basis logarithmorum hyperbolicorum, vel log natur $e = 1$ erit

$$\varphi\Delta = \kappa.e^{\frac{1}{2}K\Delta^2}$$

Ut autem W revera evadat Maximum, quantitas K debet esse negativa, hinc poni potest $\frac{1}{2}K = -h^2$, et erit

$$\int\varphi\Delta.d\Delta = \kappa\int e^{-h^2\Delta^2}.d\Delta$$

Ad determinationem quantitatis κ, notari debet, secundum priora $\int\varphi\Delta d\Delta$ a $\Delta = -\infty$ usque ad $\Delta = +\infty$, esse aequale unitati, et integrale $\int e^{-h^2\Delta^2}.d\Delta$ etiam a $\Delta = -\infty$ ad $\Delta = +\infty$ esse aequale secundum Laplace $\frac{\sqrt{\pi}}{h}$ ubi π designat semiperipheriam circuli cujus radius est unitas. — Ex hoc sequitur $\kappa = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$, hinc est prior aequatio

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}$$

Prius data expressio pro W hinc in sequentem transibit

$$W = \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{\mu} \cdot e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\dots)}$$

Sponte patet, ut hoc productum W fiat maximum, $\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\dots$ minimum fieri debere.

Systema itaq. maxime probabile valorum incognitarum $x, y, z \dots$ id erit, in quo quadrata differentiarum inter functionum V, V', V'' etc valores observatos et computatos, summam minimam efficiunt, siquidem in omnibus observationibus idem praecisionis gradus praesumendus est.

Hocce principium quod in omnibus applicationibus Matheseos ad Philosophiam naturalem usum frequentissimum offert, ubiq. axiomatis loco eodem jure valere debet, quo medium Arithmeticum inter plures valores observatos ejusdem quantitatis tanquam valor maxime probabilis adoptatur.

Si igitur secundum priora differentiale hujus valoris W respectu quantitatis x aequale ponitur zero, habebimus $\left(\frac{dW}{dx}\right)=0$ seu $\Delta\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)+\Delta'\left(\frac{d\Delta'}{dx}\right)+\Delta''\left(\frac{d\Delta''}{dx}\right)+\dots=0$ et quum $\left(\frac{d\Delta}{dx}\right)=a$, $\left(\frac{d\Delta'}{dx}\right)=a'$ $\left(\frac{d\Delta''}{dx}\right)=a''$ etc sit, haec aequatio etiam erit $\Delta a+\Delta' a'+\Delta'' a''+\dots=0$ ------ (1)

Eadem ratione dat $\left(\frac{dW}{dy}\right)=0$

$\Delta b+\Delta' b'+\Delta'' b''+\dots=0$ ------ (2)

et $\left(\frac{dW}{dz}\right)=0$

$\Delta c+\Delta' c'+\Delta'' c''+\dots=0$ ------ (3)

etc

et quum talium aequationum (1), (2), (3)... tot, quot incognitae $x, y, z\dots$ sint, hae ultimae per eliminationem ex his aequationibus determinantur, et quantitates hac ratione obtentae, erunt valores maxime probabiles harum quantitatum, quia illae pro summa quadratorum errorum $\Delta, \Delta', \Delta''$ etc. dant Minimum.

Si brevitatis causa ponitur

$\int am = am+a'm'+a''m''+$ etc

$\int a^2 = a^2+a'^2+a''^2+$ etc

$\int ab = ab+a'b'+a''b''+$ etc

etc

aequationibus (1), (2), (3) ... etiam sequentem formam dare possumus:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \int am + x\int aa' + y\int ab + z\int ac + \ldots \\ 0 &= \int bm + x\int ba + y\int bb' + z\int bc + \ldots \\ 0 &= \int cm + x\int ca + y\int cb + z\int cc' + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (B)$$

et ex his dein quaesiti valores maxime probabiles per eliminationem derivantur. —

Pro nostro exemplo est $m=3$, $a=-1$, $b=1$, $c=-2$ ....
hinc $\int am=-88$, $\int aa'=27$, $\int ab=6$, $\int ac=0$ etc
ergo erunt aequationes (B)

$$\begin{aligned} 0 &= -88+27x+6y \\ 0 &= -70+6x-15y+z \\ 0 &= 107+y+54z \end{aligned}$$

ex quibus invenitur $x=2.470$, $y=3.551$, $z=1.916$. —

Ceterum principium, quod quadratum differentiarum inter quantitates observatas et computatas summam quam minimam producere debeant, etiam independenter a calculo probabilitatis sequenti modo considerari poterit. — Quoties multitudo incognitarum multitudini quantitatum observatarum independentium aequalis est, illas ita determinare licet ut his exacte satisfiat. Quoties autem multitudo illa hac minor est, consensus absolute exactus obtineri nequit quatenus observationes praecisione absoluta non gaudent. In hoc itaq. casu operam dare oportet, ut consensus quam optimus stabiliatur, sive ut differentiae, quantum fieri potest extenuentur. Haec vero notio natura sua aliquid vagi involvit. Etiamsi enim systema valorum pro incognitis quod omnes differentias respective minores reddit, quam aliud procul dubio huic praeferendum sit, nihilominus optio inter duo systemata, quorum alterum in aliis observationibus consensum meliorem offert, alterum in aliis, arbitrio nostro quodammodo relinquitur, manifestoq. innumera principia diversa proponi possunt, per quae conditio prior impletur. Designando differentias inter observationes et calculum per $\Delta, \Delta', \Delta''$ etc conditioni priori non modo satisfiet, si $\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\ldots$ fit minimum, sed etiam si $\Delta^4+\Delta'^4+\Delta''^4+$ etc vel $\Delta^6+\Delta'^6+\Delta''^6+\ldots$ vel generaliter summa potestatum exponentis

nentis

exponentis cujuscunque paris in minimum abit, sed ex omnibus principiis primum simplicissimum est, dum reliquis ad calculos complicatissimos deferremur. Ceterum hoc principium et a celeb. Legendre in opere „Nouvelles methodes pour la détermination des orbites des Cometes, Paris 1806, prolatum est et a celeb. Gauss. in opere „Theoria motus corporum coelestium. — Illustr. Laplace ad solutionem aequationum linearium quarum multitudo major est quam multitudo quantitatum incognitarum, principio alio utitur quod olim jam a celeb. Boscovich propositum erat scilicet ut differentiae ipsae sed omnes positive sumtae summam minimam efficiant. Facile ostendi potest, systema valorum incognitarum, quod ex hoc solo principio erutum sit, necessario, casibus specialibus exceptis, ubi solutio quodammodo indeterminata manet, tot aequationibus e propositarum numero exacte satisfacere debere, quot sint incognitae, ita ut reliquae aequationes dumtaxat tantum in considerationem veniant, quatenus ad optionem decidendam conferunt. Itaq. e.g. aequatio $V=M$ est ex earum numero, quibus non satisfit systema valorum secundum illud principium inventorum nihil mutaretur etiamsi loco ipsius M valor quicunq. alius N observatus esset, si modo designante per n valorem computatum differentiae $M-n$ et $N-n$ eodem signo affectae sint. Ceterum Illustr. Laplace principium istud per adjectionem conditionis novae quodammodo temperat: postulat scilicet, ut summa differentiarum ipsa, signis non mutatis, fiat aequalis 0 (zero). Hinc efficitur, ut multitudo aequationum exacte repraesentatarum unitate minor fiat quam multitudo quantitatum incognitarum, verumtamen quod ante observavimus etiamnum locum habebit, siquidem duae saltem incognitae affuerint. —

Afferam hic quoq. breviter aliqua problemata, quae huc pertinent. —

Datus est aliquis numerus punctorum; quaerendum est aliud punctum tale, ut summa quadratorum distantiarum hujus puncti a ceteris datis punctis sit aequalis quadrato λ^2 dato.

Sint α, β coordinatae primi dati puncti, α', β' secundi, α'', β'' tertii etc x, y quaesiti puncti, dein erit pro quadratis linearum quae punctum quaesitum cum primo, secundo, tertio etc puncto conjungunt

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$$
$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2$$
$$(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2$$
etc

Si hæc quadrata addantur, et brevitatis causa ponitur

$$\Sigma\alpha = \alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots$$
$$\Sigma\beta = \beta + \beta' + \beta'' + \dots$$
$$\Sigma\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots$$
$$\Sigma\beta^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 + \dots$$

habetur, si n est numerus punctorum datorum:

$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{n}\cdot\Sigma\alpha - \frac{2y}{n}\cdot\Sigma\beta = \frac{\mathfrak{L}^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2}{n}$$

(quæ æquatio est aequatio pro circulo;) – ex quo sequitur, infinita multa puncta satisfacere problemati, quia hoc problema est indeterminatum, et omnia hæc puncta jacere in peripheria alicujus circuli. Sint nimirum A, B, coordinatæ centri circuli, cujus radius est R, dein est aequatio circuli $(x-A)^2 + (y-B)^2 = R^2$ vel $x^2 + y^2 - 2xA - 2yB = R^2 - A^2 \dots$ si comparatur nunc hæc expressio cum præcedenti aequatione, pro circulo, inveniuntur, cujus peripheria omnia nostra puncta continet, coordinatæ centri $A = \frac{1}{n}\Sigma\alpha$, $B = \frac{1}{n}\Sigma\beta$ et radium

$$R = \frac{1}{n}\sqrt{n(\mathfrak{L}^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2) + (\Sigma\alpha)^2 + (\Sigma\beta)^2}.$$

— Sed in hoc problemate tantummodo duæ coordinatæ pro quolibet puncto assumtæ sunt; si autem ista puncta assumuntur non in plano, sed in spatio, accedere debent quoq tertiæ coordinatæ γ, γ', γ'', et solutio erit priori similis; habebimus nimirum pro quæsito puncto

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2x}{n}\cdot\Sigma\alpha - \frac{2y}{n}\cdot\Sigma\beta - \frac{2z}{n}\Sigma\gamma = \frac{\mathfrak{L}^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2 - \Sigma\gamma^2}{n}$$

quæ expressio est aequatio sphæræ, ex quo sequitur omnia puncta jacere in superficie alicujus sphæræ. Sit R radius sphæræ, A, B, C, coordinatæ centri ubi x, y, z coordinatæ alicujus puncti superficiei sphæræ, dein est $R^2 = (x-A)^2 + (y-B)^2 + (z-C)^2$ aequatio sphæræ. — Si cum hac aequatione comparatur prior expressio inveniuntur coordinatæ centri quæsitæ sphæræ

$$A = \frac{1}{n}\Sigma\alpha,\quad B = \frac{1}{n}\Sigma\beta,\quad C = \frac{1}{n}\Sigma\gamma$$

et radius $R = \frac{1}{n}\sqrt{n(\mathfrak{L}^2 - \Sigma\alpha^2 - \Sigma\beta^2 - \Sigma\gamma^2) + (\Sigma\alpha)^2 + (\Sigma\beta)^2 + (\Sigma\gamma)^2}$

Linea quantitas $\mathfrak{L}$ semper ita determinari posset ut radius R illius sphæræ datum valorem acquirat, summa quadratorum omnium linearum, quæ data puncta cum aliquo puncto peripheriæ

sphæ-

sphaerae conjungant, quae ex centro invento, cum radio ad libitum assumto descripta est, semper ejusdem erit magnitudinis.

Si ergo ad determinationem situs alicujus puncti in spatio per observationes, per primam observationem coordinatae α, β, γ, per secundam α', β', γ' per tertiam $\alpha'', \beta'', \gamma''$ inventae essent, ubi omnes hae quantitates certis erroribus observationum subjectae sunt, et si assumitur, veras sed ignotas coordinatas hujus puncti esse $x. y. z$, distantia puncti, cujus coordinatae sunt α, β, γ, a vero puncto $x. y. z$, qua error primae observationis, considerari potest, quae distantia est

$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$, — Eodem modo erit distantia puncti $\alpha' \beta' \gamma'$ a puncto x, y, z, vel error secundae observationis $\sqrt{(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2}$ et error tertiae observationis $\sqrt{(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2+(z-\gamma'')^2}$. —

Assumamus nunc, summam quadratorum omnium horum errorum, quam designare volumus per U vel expressionem

$$U=(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+(z-\gamma')^2+(x-\alpha'')^2+(y-\beta'')^2+(z-\gamma'')^2$$ esse

Minimum, dein est $\left(\frac{dU}{dx}\right)=0$ $\left(\frac{dU}{dy}\right)=0$ $\left(\frac{dU}{dz}\right)=0$

Si revera deducantur ista differentialia, primum dat

$(x-\alpha)+(x-\alpha')+(x-\alpha'')+\ldots\ldots=0$ vel $x=\frac{1}{n}\cdot\sum\alpha$

eodem modo pro ulteris — $y=\frac{1}{n}\sum\beta$

$z=\frac{1}{n}\sum\gamma$

quae quantitates sunt iidem valores qui superius pro coordinatis centri A, B, C, sphaerae inventi sunt. —

Hi valores quantitatum $x. y. z$ sunt autem sic dicta media arithmetica omnium per observationes datarum coordinatarum. v. c.

$\frac{1}{n}\sum\alpha=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''+\ldots}{n}$ ut notum est media arithmetica revera generaliter esse maxime probabiles valores observationum. Inveniuntur igitur maxime probabiles valores quantitatum quae sunt datae per plures aeque bonas observationes, si summa quadratorum cujuslibet erroris observationis, est Minimum. —

Omnia priora continent fundamenta methodi minimorum quadratorum

cleb. Gauss. (Vide Theoriam motus corporum coelestium p. 206. Monatl. Correspond. Vol XXIV. Zeitschrift für Astronomie I Vol. p. 185. Laplace Theorie analytique des probab. Götting. gelehrte Anzeige Jahr 1821 etc.)

Prius enucleata methodus tantummodo ad tales aequationes est applicabilis, in quibus quantitates x, y, z etc in prima potentia occurrunt, sed facile etiam extendi potest ad tales aequationes, in quibus x, y, z.... altiores exponentes habent. Sint nimirum X, Y, Z... approximati valores quantitatum x, y, z..... qui jam per aliam methodum, v. c. illam quae prius in usu erat, inventi sunt, dein pro incognitis x, y, z.... in datis aequationibus (A) valores $x = X+\xi$, $y = Y+v$, $z = Z+\zeta$ substituuntur, et quum quantitates X, Y, Z jam notae, et incognitae ξ, v, ζ admodum parvae sint, quadrata altioresq potentiis ultimarum negligi, et hac ratione quaesitae aequationes inter ξ, v, ζ... inveniri possunt, quae dabunt incognitas ipsas ξ, v, ζ....

Haec methodus supponit, uti jam prius dictum est probabilitatem omnes observationes esse aeque bonas. Si autem observationes ~~sint~~ ipsae inter se sint diversi valoris, et si est v. c. earum valor h, h', h'', dein hoc idem est, ac si per observationes aeque bonas inventi essent errores $h\Delta$, $h'\Delta'$, $h''\Delta''$ etc; hinc valores quantitatum incognitarum determinabuntur ex suppositione $h^2\Delta^2 + h'^2\Delta'^2 + h''^2\Delta''^2 + \ldots\ldots$ esse Minimum.

Si v. c. in nostro exemplo valor, seu praecisio secundae observationis esset duplo major, quam illa primae observationis, pro

$0 = 5 - 3x - 2y + 5z$ poni deberet

$0 = 10 - 6x - 4y + 10z$ et ita cum caeteris

Generatim quantitas h spectari potest qua mensura praecisionis cujuslibet observationis. Si nimirum probabilitas erroris Δ in aliqua serie observationum, uti prius, est $\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2}$ dein est probabilitas in aliqua alia serie observationum $\frac{h'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h'^2\Delta^2}$ et probabilitas, errorem pro una priorum observationum jacere inter $-\delta$ et $+\delta$ erit

$$\int \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2\Delta^2} d\Delta$$

uti et probabilitas, errorem alicujus observationis in secunda serie, jacere inter $-\delta'$ et $+\delta'$

$$\int \frac{h'}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h'^2\Delta^2} d\Delta$$

primum integrale sumtum a $\Delta = -\delta$ usque ad $+\delta$, secundum a $\Delta = -\delta'$

usque

usque ad $+\delta''$. Haec integralia autem erunt aequalia, si $h\delta = h'\delta'$.
Si ergo v.c. $h' = 2h$, in secunda serie tam faciliter duplex, uti in prima serie simplex error committi potest, vel, uti hoc potest exprimi observationes primae seriei habent duplicem valorem, duplex pondus, observationum secundae seriei.

Valores quantitatum x, y, z hac ratione inventi quoque inter se habebunt diversum gradum praecisionis, diversum gradum probabilitatis, vel aliis verbis, quaelibet quantitas non aequaliter exacte erit determinata. Saepius autem occurrit casus, ut cuperemus scire gradum probabilitatis pro qualibet observatione; facile erimus convicti secundum primam de sequentibus.

Si quaerantur ex aequationibus (A) uti prius quantitates

$$\left.\begin{array}{l} X = \int a\Delta = a\Delta + a'\Delta' + a''\Delta'' + \text{etc} \\ Y = \int b\Delta = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + \text{etc} \\ Z = \int c\Delta = c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + \text{etc} \end{array}\right\} \cdots (I)$$

dein quaelibet harum aequationum (I) erit functio quantitatum $x, y, z \ldots$ et quum harum aequationum tot sint, quot incognitae, facile ex iis per eliminationem valores quantitatum $x, y, z \ldots$ in X, Y, Z quaeri possunt per quod obtinentur aliae aequationes sequentis formae:

$$\left.\begin{array}{l} x = L + AX + BY + CZ + \text{etc} \\ y = L' + A'X + B'Y + C'Z + \text{etc} \\ z = L'' + A''X + B''Y + C''Z + \text{etc} \end{array}\right\} \cdots (II)$$

Deductis his aequationibus (II), sunt uti prius, maxime probabiles valores quantitatum $x, y, z \ldots$ $x = L$, $y = L'$, $z = L''$ et gradus respectivae probabilitatis horum ultimorum valorum quantitatum $x, y, z, \ldots$ posita probabilitate observationum aequali unitati, pro $x = \frac{1}{\sqrt{A}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{B'}}$, $z = \frac{1}{\sqrt{C''}}$

In nostro exemplo $a = 1$, $a' = 3$, $a'' = 4$, $a''' = 1$
$b = 1$, $b' = 2$ etc
hinc

$$\begin{array}{l|l} a\Delta = -3 + x - y + 2z & a''\Delta'' = -84 + 16x + 4y + 16z \\ a'\Delta' = -15 + 9x + 6y - 15z & a'''\Delta''' = 14 + x - 3y - 3z \end{array}$$

ex quo sequitur

$$\left.\begin{aligned} X &= -88 + 27x + 6y \\ Y &= -70 + 6x + 15y + z \\ Z &= -107 + y + 54z \end{aligned}\right\} \cdots \mathrm{I}$$

Ex his aequationibus invenitur per eliminationem

$$x = \frac{49154 + 809X - 324Y + 6Z}{19899}$$

$$y = \frac{2617 - 12X + 54Y - Z}{737}$$

$$z = \frac{12707 + 2X - 9Y + 123Z}{6633}$$

Hinc sunt maxime probabiles valores quantitatum $x. y. z$ ... uti prius

$$x = \frac{49154}{19899} = 2.470$$

$$y = \frac{2617}{737} = 3.551$$

$$z = \frac{12707}{6633} = 1.916$$

et gradus probabilitatis harum determinationum, illa observationum posita $= 1$,

$$\text{pro } x \quad \sqrt{\frac{19899}{809}} = 4.96 = \xi$$

$$y \quad \sqrt{\frac{737}{54}} = 3.69 = v$$

$$z \quad \sqrt{\frac{6633}{123}} = 7.34 = \zeta$$

Hinc z est quam maxime accurate determinatum, dein venit x et tandem y.

Sit nunc $\psi\Delta = \int \frac{2e^{-\Delta^2}d\Delta}{\sqrt{\pi}}$ (: hoc Integrale a $\Delta = 0$ sumtum:)

Si Δ respectu unitatis non est admodum magnum, dein est sequens simplex series:

$$\psi\Delta = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\Delta - \tfrac{1}{3}\Delta^3 + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{\Delta^5}{1.2} - \tfrac{1}{7}\cdot\frac{\Delta^7}{1.2.3} + \cdots\right)$$

Ex hac expressione facile invenitur $\psi\Delta = \frac{1}{2}$ si est $\Delta = 0.476936$; eadem ratione invenitur $\psi\Delta' = 6.8427$ pro $\Delta' = 1 = 2.0967\Delta$

$$\psi\Delta'' = 0.9960 \text{ pro } \Delta'' = 1.82139 = 3.81893\Delta' \text{ etc}$$

ita ut $\psi\Delta$ cum Δ crescat. —

Prius autem vidimus, probabilitatem, errorem alicujus observationis jacere inter limitibus D et D', expressam esse per $\int\varphi\Delta d\Delta = \int\frac{h}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-h^2\Delta^2}d\Delta$, sumto hoc integrali a $\Delta = D$ usque ad $\Delta = D'$, hinc duplo majus est, quam integrale sumtum a $\Delta = 0$ usque ad $\Delta = D'$, h. e. probabilitas, errorem observationis jacere inter 0 et Δ erit $\psi h\Delta$. —

Sic est v. c. probabilitas, errorem non esse infra $\frac{\Delta}{h} = \frac{0.476936}{h}$ aequalis $\frac{1}{2}$ vel haec probabilitas simul est probabilitas contrarii. Nominemus hinc

hanc quantitatem $A = \frac{\Delta}{h} = \frac{0.4769363}{h}$ errorem probabilem.

Assumamus nunc, errores commissos esse in singulis observationibus, quarum numerus sit N, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ et inquiramus, quid ex hoc concludi possit respectu valorum quantitatum h et A. Facile inveniri potest, probabilitatem cujuslibet valoris quantitatis h proportionalem esse sequenti expressioni

$$z = h^N \cdot e^{-h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}$$ (: ex prioribus, nimirum ex aequatione $W = \ldots$)

hinc quoque maxime probabilis valor quantitatis h ille erit, pro quo haec quantitas z evadit <u>Maximum</u>.

(Differentiando hanc expressionem respectu h et z, et ponendo dein $dz = 0$, erit $Nh^{N-1} - 2h^{N+1}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots) = 0$ vel $N - 2h^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots) = 0$ vel $h = \sqrt{\frac{N}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}}$) hinc est maxime probabilis valor quantitatis A seu maxime probabilis error $A = \frac{\Delta}{h} = \frac{\Delta}{\sqrt{N}}\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)} =$

$$= 0.6744897\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots}{N}}$$

<u>Designemus</u> nunc inventum maxime probabilem valorem h seu $\sqrt{\frac{N}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}}$ per H et notemus probabilitatem, H esse verum valorem quantitatis h, se habere ad probabilitatem, verum valorem esse $H+\lambda$, uti $H^N e^{-\frac{N}{2}} : (H+\lambda)^N \cdot e^{-\frac{N(H+\lambda)^2}{2H^2}}$ seu uti

$$1 : e^{-\frac{\lambda^2 N}{H^2}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H} + \frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2} - \frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3} + \ldots\right)}$$

Secundum membrum tunc respectu primi erit insensibile, si $\frac{\lambda}{H}$ est fractio parva; hinc possumus loco adductae rationis ponere $1 : e^{-\frac{\lambda^2 N}{H^2}}$ hoc significat proprie, probabilitatem, ~~valorem~~ verum valorem quantitatis h, jacere inter limites $H+\lambda$ et $H+\lambda+d\lambda$, esse approximative $= K e^{-\frac{\lambda^2 N}{H^2}} d\lambda$. ubi K est quantitas constans, quae ita determinari debet, ut integrale $\int K e^{-\frac{\lambda^2 N}{H^2}} d\lambda$ inter limites quantitatis λ sumtum, evadat aequale unitati. — Loco horum limitum sic, ubi propter quantitatem N quantitas $e^{-\frac{\lambda^2}{H^2}}$ evadit insensibilis, quando $\frac{\lambda}{H}$ desinit esse parva fractio, licitum est, assumere limites $-\infty$ et $+\infty$ ex quo oritur $K = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{N}{\pi}}$. —— Hinc est probabilitas, verum valorem quantitatis h jacere inter $H-\lambda$ et $H+\lambda$, $= \psi \frac{\lambda}{H}\sqrt{N}$ ergo est haec probabilitas aequalis $\frac{1}{2}$, si $\frac{\lambda}{H}\sqrt{N} = \Delta = 0.4769363$ est vel si $\lambda = \frac{H\Delta}{\sqrt{N}}$. — Hinc unum contra unum ponere possumus, verum valorem quantitatis h jacere inter limites $H(1-\frac{\Delta}{\sqrt{N}})$ et $H(1+\frac{\Delta}{\sqrt{N}})$, ergo quoque verum

valorem

valorem quantitatis A inter limites $\frac{\Delta}{A(1-\frac{\Delta}{\sqrt{N}})}$ et $\frac{\Delta}{A(1+\frac{\Delta}{\sqrt{N}})}$ vel approximative etiam ponere possumus $A(1-\frac{\Delta}{\sqrt{N}})$ et $A(1+\frac{\Delta}{\sqrt{N}})$. — Si dein brevitatis causa ponitur $S=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots$, $B=0.4769363.\frac{A}{\sqrt{N}}$ dein est maxime probabilis valor erroris cujusque observationis

$$A=0.67449\sqrt{\frac{S}{N}} \ldots\ldots (I)$$

et probabilis limes hujus erroris observationis

$$A\pm B=A\left(1\pm\frac{0.47694}{\sqrt{N}}\right) \ldots\ldots (II)$$

(Quantitas B nihil aliud est quam incertitudo quantitatis A)

Exempl. Pro altitudine poli speculæ astronomicæ Budæ celeb. Littrow invenit sequentia resultata

47° 29'	11."5
	12.2
	12.8
	11.2
	11.7
	12.3
	11.5
	11.9
	12.4
	12.5
Media 47° 29'	12."0

Qua errores $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ cujuslibet observationis assumi possunt differentiæ cujuslibet observationis ab ipso medio. Sic est

pro prima $\alpha=12.0-11.5=(0.5)$

secunda $\beta=12.0-12.2=(-0.2)$ etc

hinc $S=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots=2.42$, $N=10$ et hinc error probabilis cujuslibet observationis $A=0.67449\sqrt{\frac{2.42}{10}}=0''33$ probabilis incertitudo quantitatis A sive $B=0.47694\frac{A}{\sqrt{10}}=0.04977$ et hinc probabilis error resultatis finalis 47° 29' 12."00 aequalis $\frac{A}{\sqrt{N}}=\frac{0.33}{\sqrt{10}}=0''104$. —

Si generatim est error unius observationis f, et F error resultati p observationum, vel si g est praecisio unius observationis et G praecisio resultati p observationum, dein est

$$F=\frac{f}{\sqrt{p}} \text{ et } G=g.\sqrt{p}. —$$

Ad applicationem praecedentium ad aequationes formae

$$0=m+ax+by$$
$$0=m'+a'x+b'y$$
$$0=m''+a''x+b''y$$
etc

quae tantummodo unam continent incognitam, dein est supposito

omnes observationis esse ejusdem valoris, maxime probabilis valor quantitatis x seu $X = -\frac{\int ma}{\int a^2} = -\frac{(ma + m'a' + m''a'' + \dots)}{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$
et praecisio ξ hujus ultimi valoris X quantitatis x, si praecisio immediatae observationis ponitur aequalis unitati, $\xi = \sqrt{\int a^2} = \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots}$ atque et maxime probabilis error hujus valoris X est aequalis $\frac{0.67449\sqrt{\frac{S}{N}}}{\sqrt{\int a^2}}$
ubi S et N priorem significationem habent. —
Si haberemus aequationes pro duabus incognitis seu

$$0 = m + ax + by$$
$$0 = m' + a'x + b'y$$
$$0 = m'' + a''x + b''y$$

dein est maxime probabilis valor quantitatis x seu $X = -\left(\frac{\int ma\int b^2 - \int mb\int ba}{\int a^2\int b^2 - \int ba\int ba}\right)$
y seu $Y = -\left(\frac{\int mb\int a^2 - \int ma\int ba}{\int a^2\int b^2 - \int ba\int ba}\right)$
et praecisio hujus valoris quantitatis X est $\xi = \sqrt{\frac{\int a^2\int b^2 - \int ba\int ba}{\int b^2}}$
atque praecisio hujus valoris quantitatis Y — $v = \sqrt{\frac{\int a^2\int b^2 - \int ba\int ba}{\int a^2}}$
et sic de aliis ubi plures occurrunt incognitae. —
Caeterea, uti jam dictum est, clarum est, omnes has determinationes eo magis ad veritatem accedere, quo major est numerus N observationum seu aequationum. Si autem numerus harum observationum est admodum magnus, simplificatur calculus, si istae aequationes distribuuntur in classes, assumendo v. c. summam decem talium aequationum quasi unam, cui dein tribuitur valor 10. Sit

$$0 = m + ax \quad \text{medium ex } p \text{ observationibus}$$
$$0 = m' + a'x \quad \dots\dots\dots \quad p'$$
$$0 = m'' + a''x \quad \dots\dots\dots \quad p''$$

dein invenitur facile uti prius, maxime probabilis valor quantitatis x seu $X = -\frac{\int map}{\int a^2p}$ et praecisio hujus determinationis

$$\xi = \sqrt{\int a^2p} = \sqrt{a^2p + a'^2p' + a''^2p'' + \dots}$$

Eadem ratione est ex sequentibus aequationibus

$$0 = m + ax + by \quad \text{medium ex } p \text{ observationibus}$$
$$0 = m' + a'x + b'y \quad \dots\dots\dots \quad p'$$
$$0 = m'' + a''x + b''y \quad \dots\dots\dots \quad p''$$

maxime probabilis valor quantitatum x et y seu

$$X = -\frac{\int map \int b^2p - \int mbp \int bap}{\int a^2p \int b^2p - \int bap \int bap}$$

$$Y = -\frac{\int mbp \int a^2p - \int map \int bap}{\int a^2p \int b^2p - \int bap \int bap}$$

et precisio harum determinationum quantitatis X et Y

$$\xi = \sqrt{\frac{\int a^2p \int b^2p - \int bap \int bap}{\int b^2p}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\int a^2p \int b^2p - \int bap \int bap}{\int a^2p}}$$

et sic porro pro similibus casibus.

Hac ratione igitur corrigi possunt errores observationum qui a casu dependent, sed non constantes errores vel tales, qui omnibus observationibus communes sunt.

Secunda pars
De Planetis

Phaenomena generalia Planetarum

Planetae se distinguunt a stellis fixis per suam magis tranquillam lucem, per suas diametros sensibiles et ante omnia per suum motum proprium.

Orbitae omnium Planetarum exceptis illis, qui temporibus novissimis sunt detecti, nunquam se extendunt ultra 8° vel 9° plani orbitae terrae, ita, ut planetae sint semper in zona, quae circumdat eclipticam ex utraque parte in distantia 9° et quae zona vocatur Zodiacus. Quum terra ipsa sit in motu, naturaliter motus apparens Planetarum valde differt ab illorum motu vero; quum autem iste motus modificatus per verum motum terrae et Planetarum, per problema inversum verus motus planetae inveniri potest, datis suo motu apparente et motu terrae vero. Primo determinanda est dispositio orbitae generaliter, centrum versus quod jacet concavitas orbitae, et ordo successionis qui locum habet inter plures orbitas, quae habent centrum aliquod commune. Et in hoc consistit sic dictum Systema mundi.

Uti quilibet facile sibi imaginari potest, est iste motus apparens planetarum, quam compositus ex motibus veris terrae et planetae, quarum ultimus adhuc est ignotus, admodum irregularis. Interea omnes Planetae, quoad maximam partem suarum orbitarum, progrediuntur ita ut terra vel Sol a dextra sinistram versus, h.e. ab occidente ortum versus, et hoc est, quod nominant motum directum. Iste motus autem semper et semper retardatur, donec evadit nullus, et dein vocantur planetae stationarii. Post aliquot tempus directio hujus dicti motus est priori opposita, vel motus est Retrogradus. Haec phaenomena singularia quae antiquiores nominarant secundam inaequalitatem, revertuntur semper in eodem ordine et

suff

sufficiunt, nos convincendi, terram non posse esse centrum eorum orbitarum, nam difficile esset invenire aliud punctum ubi eorum motus apparerent magis irregulares. —
Haec phaenomena sunt communia omnibus planetis, sed dantur quoq alia, quae planetas inter se ita distinguunt, ut possimus eos dividere in duas classes. Mercurius et Venus semper sunt in vicinia solis vel in parte orientali vel occidentali, usq ad certos limites, qui sunt horum planetarum maximae digressiones, quae digressiones nec aequales sunt in qualibet revolutione, maxima digressio Mercurii est variabilis a 17°36' ad 28°20', illa Veneris a 44°57' ad 47°48'. Post hanc digressionem approquinquant se ad solem, donec sint cum illo in conjunctione, et in his conjunctionibus solet saepius fieri, ut transire videantur inter solem et terram. Observando hos planetas continuo in hac epocha, in qua approquinquantur soli, donec disparent, exacte determinari potest directio et celeritas planetae in hac epocha, et facile videri potest, an directio transeat per solem, vel supra vel infra, h. e. an latitudo in conjunctione est plus vel minus major quam semidiameter solis. In casu, si directio transit per discum solarem, celeritas observata serviet ad calculandum tempus quando planeta debet esse ante vel post solem; et in hac epocha videbitur transitus planetae infra discum solis et in disco solis sub forma maculae nigrae ejusdem fere magnitudinis uti erat mensuratus, et secundum directionem, et cum eadem celeritate, quae erat calculata. Post aliquod tempus dein iterum apparet in prolongatione directionis praecedentis, continuans suum motum cum eadem celeritate, quam habuit ante disparitionem, et quo dein certum est, istam visam in disco solari maculam fuisse ipsum planetam. —
Hi transitus Veneris et Mercurii per discum Solis, pro Astronomia sunt maximi momenti; transitus Mercurii saepius locum habent, illi autem Veneris sunt admodum rari, ita ut in uno saeculo tantummodo duo accidere soleant, qui se sequuntur in octo annis. — Praecedentes observationes dant locum ad plures conclusiones notabiles:
1º Isti planetae sunt corpora opaca, quae habent suam lucem a Sole. —
2º Centrum eorum orbitarum non est terra sed Sol, et eorum orbitae sunt contentae inter illam terrae et Solem. ———

Deductio formulae $tg\,\varphi = A\cos(C-K)$ ex aequationibus

$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta' + \cos\varphi\cos\delta'\cos(p-K)$$
$$\sin h = \sin\varphi\sin\delta'' + \cos\varphi\cos\delta''\cos(p'-K) \quad \text{----} (\alpha)$$

Primum, si prima aequationum datarum subtrahitur a secunda, oritur aequatio sequens: $tg\,\varphi = \dfrac{\cos\delta'\cos(p-K) - \cos\delta''\cos(p'-K)}{\sin\delta'' - \sin\delta'}$

Dein si sumus $\cos(p-K) = \cos p\cos K + \sin p\sin K =$ ~~$\frac{1}{2}\cos(p+K)$~~ $+ \frac{1}{2}\cos(p-K) + \frac{1}{2}\cos(p-K)$ ~~$- \frac{1}{2}\cos(p+K)$~~

$\cos(p'-K) = \cos p'\cos K + \sin p'\sin K =$ ~~$\frac{1}{2}\cos(p'+K)$~~ $+ \frac{1}{2}\cos(p'-K) + \frac{1}{2}\cos(p'-K)$ ~~$- \frac{1}{2}\cos(p'+K)$~~

ergo $\cos\delta'\cos(p-K) - \cos\delta''\cos(p'-K) = \frac{1}{2}\cos\delta'\cos(p-K) + \frac{1}{2}\cos\delta'\cos(p-K) - \frac{1}{2}\cos\delta''\cos(p'-K) - \frac{1}{2}\cos\delta''\cos(p'-K)$

Secundum membrum hujus aequationis potest et ita scribi

$$\left\{\tfrac{1}{2}\cos\delta'\cos(p-K) - \tfrac{1}{2}\cos\delta''\cos(p'-K)\right\} - \left\{\tfrac{1}{2}\cos\delta''\cos(p'-K) - \tfrac{1}{2}\cos\delta'\cos(p-K)\right\}$$

hi duo termini decomponuntur in sequentes factores (addendo et subtrahendo $\frac{1}{2}\cos\delta''\cos(p-K)$, $\frac{1}{2}\cos\delta'\cos(p'-K)$)

$$(\cos\delta' - \cos\delta'')\left\{\tfrac{1}{2}\cos(p-K) + \tfrac{1}{2}\cos(p'-K)\right\} - (\cos\delta' + \cos\delta'')\left\{\tfrac{1}{2}\cos(p'-K) - \tfrac{1}{2}\cos(p-K)\right\}$$

ergo $$tg\,\varphi = \frac{(\cos\delta' - \cos\delta'')\left\{\frac{1}{2}\cos(p-K) + \frac{1}{2}\cos(p'-K)\right\} - (\cos\delta' + \cos\delta'')\left\{\frac{1}{2}\cos(p'-K) - \frac{1}{2}\cos(p-K)\right\}}{\sin\delta'' - \sin\delta'}$$

nunc
$$\cos\delta' - \cos\delta'' = 2\sin\tfrac{\delta''+\delta'}{2}\sin\tfrac{\delta''-\delta'}{2}$$
$$\cos\delta' + \cos\delta'' = 2\cos\tfrac{\delta''+\delta'}{2}\cos\tfrac{\delta''-\delta'}{2}$$
$$\cos(p-K) + \cos(p'-K) = 2\cos\left(\tfrac{p+p'}{2} - K\right)\cos\tfrac{p'-p}{2}$$
$$-\cos(p'-K) + \cos(p-K) = 2\sin\left(\tfrac{p+p'}{2} - K\right)\sin\tfrac{p'-p}{2}$$
$$\sin\delta'' - \sin\delta' = 2\cos\tfrac{\delta''+\delta'}{2}\sin\tfrac{\delta''-\delta'}{2}$$

(dividendo ambo membra harum expressionum per 2, ex altera parte evanescit et prima erit $\frac{1}{2}\cos(p-K)$ etc.)

Positis his valoribus in ultima aequatione erit

$$tg\,\varphi = \frac{2\sin\frac{\delta''+\delta'}{2}\sin\frac{\delta''-\delta'}{2}\cos\left(\frac{p+p'}{2}-K\right)\cos\left(\frac{p'-p}{2}\right) + 2\cos\frac{\delta''+\delta'}{2}\cos\frac{\delta''-\delta'}{2}\sin\left(\frac{p+p'}{2}-K\right)\sin\frac{p'-p}{2}}{2\cos\frac{\delta''+\delta'}{2}\sin\frac{\delta''-\delta'}{2}}$$

2 in numeratore et denominatore se tollit, et postea dividendo ambos terminos fractionis per denominatorem erit:

$$tg\,\varphi = tg\,\tfrac{\delta'+\delta}{2}\cos\left(\tfrac{p'+p}{2}-K\right)\cos\left(\tfrac{p'-p}{2}\right) + ctg\,\tfrac{\delta'-\delta}{2}\sin\left(\tfrac{p'+p}{2}-K\right)\sin\left(\tfrac{p'-p}{2}\right).$$

Positis
$$A\sin B = \sin\left(\tfrac{p'-p}{2}\right) ctg\,\tfrac{\delta'-\delta}{2}$$
$$A\cos B = \cos\left(\tfrac{p'-p}{2}\right) tg\,\tfrac{\delta'+\delta}{2} \quad \ldots\ldots (\beta)$$
$$C = \tfrac{p'+p}{2} - B \quad \text{erit}$$

$\frac{p'+p}{2} = B + C$ ergo et $\frac{p'+p}{2} - K = B + (C-K)$

itaque
$$\sin\left(\tfrac{p'+p}{2}-K\right) = \sin\left(B+(C-K)\right) = \sin B\cos(C-K) + \cos B\sin(C-K)$$
$$\cos\left(\tfrac{p'+p}{2}-K\right) = \cos\left(B+(C-K)\right) = \cos B\cos(C-K) - \sin B\sin(C-K)$$

ponendo hos et superiores valores (β) in expressione pro $tg\,\varphi$ erit

$$tg\,\varphi = A\cos B\{\cos B\cos(C-K) - \sin B\sin(C-K)\} + A\sin B\{\sin B\cos(C-K) + \cos B\sin(C-K)\}$$

si revera multiplicemus erit

$$= A\cos^2 B\cos(C-K) - A\cos B\sin B\sin(C-K) + A\sin^2 B\cos(C-K) + A\sin B\cos B\sin(C-K)$$

$$= A\cos(C-K)\{\cos^2 B + \sin^2 B\} = A\cos(C-K)$$ quia summa quadratorum sinus et cosinus aequatur unitati

hinc $$tg\,\varphi = A\cos(C-K) \quad \text{quaesita formula.}$$

Si ad aequationes (α) assumeremus aequationem $\sin h = \sin\delta''\sin\varphi + \cos\varphi\cos\delta''\cos(p''-K)$ id est: si observaremus tertiam stellam in eadem altitudine in qua priores erant, tunc, aequatione hac a prima aequationum (α) subtracta, et simili modo aequatione resultanti tractata, habebimus

$$tg\,\varphi = A'\cos(C'-K)$$

Hae duae determinationes altitudinis poli dant, si subtrahentur

$$0 = A\cos(C-K) - A'\cos(C'-K)$$ vel, per decompositionem in factores et substitutiones oritur aequatio

$0 = (A'-A)\left\{\cos\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)\cos\frac{C'-C}{2}\right\} - (A'+A)\sin\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)\sin\frac{C'-C}{2}$ .... (5)

ponatur $\frac{A}{A'} = tg\,x$ subtrahendo ambo membra ab unitate et postea addendo ad unitatem erunt duae aequationes, quarum primam dividendo per alteram erit $\frac{A'-A}{A'+A} = \frac{1-tg\,x}{1+tg\,x} = tg(45^\circ - x)$ quia $tg\,45^\circ = 1$

dividendo aequationem (5) per $A'+A$ erit } et per $\cos\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)$

$0 = \frac{A'-A}{A'+A}\cos\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)\cos\frac{C'-C}{2} - \sin\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)\sin\frac{C'-C}{2}$

ponamus $tg\,y = tg(45^\circ - x)\,ctg\,\frac{C'-C}{2}$ tunc aequatio ultima divisa per $\sin\frac{C'-C}{2}$, et per substitutionem valorum pro $\frac{A'-A}{A'+A}$ et pro $tg(45^\circ - x)\,ctg\,\frac{C'-C}{2}$

dabit $0 = tg\,y - tg\left(\frac{C+C'}{2}-K\right)$ ~~$tg\,x$~~

~~$C = y + \frac{C+C'}{2} + K$~~

~~$K = \frac{1}{2}(C+C') - y$~~

et hinc $tg\left(\frac{C+C'}{2}-K\right) = tg\,y$

sed tangentes horum angulorum aequales sunt zero ergo et anguli sunt aequales zero si a se subtrahentur ergo $\frac{C+C'}{2} - K = y$ et inde

$K = \frac{1}{2}(C+C') - y$

Ex hac ratione quoq nominantur Planetæ inferiores; quando transeunt inter Solem et terram, est conjunctio inferior, si autem Sol est inter planetam et terram, est conjunctio superior. —

3º Modus dispositionis harum duarum orbitarum est determinatus per maximas digressiones. —

Quum quilibet horum Planetarum in sua conjunctione sit in linea recta, quæ jungit terram et Solem, ille nobis apparebit in eodem loco, in quo videtur ex Sole, centro suæ orbitæ. Observationes conjunctionis dant arcum quem planeta describit ab una conjunctione ad alteram, quod probet medium comparandi eorum celeritates et eorum revolutiones. Hac ratione invenitur, celeritatem Mercurii esse fere tribus vicibus majorem illa Veneris, quoe nullum dubium relinquit, illum esse propiorem Soli: occultationes unius horum planetarum per alterum, hoc quoque comprobant. Sic 17 Mai 1737 Mercurius occultatus est per Venerem, cum erat in sua inferiori conjunctione; ex quo sequitur, Venerem esse propiorem terræ, et hinc magis distantem a Sole quam Mercurium. — Hæc veritas antiquioribus jam erat nota sub nomine Systematis Aegyptiorum.

Ceteri planetæ sunt et in oppositione cum Sole, hinc magis distantes ab eo quam terra. — In suis conjunctionibus nunquam videntur transire per discum solarem, uti hoc in planetis inferioribus locum habet, etsi directio motus transit per Solem: ex hoc sequitur, eorum orbitas includere illam terræ et ex hac causa quoq nominantur planetæ superiores. —

Sed ex hoc nondum sequitur, solem, non terram centrum esse eorum orbitarum, etsi non verisimile sit, eorum motum esse revera ita irregularem, uti apparet ex terra, seu aliis verbis, terram esse centrum eorum orbitarum. Facile autem nos convincere possumus, mensurando eorum diametros apparentes, vel observando eorum parallaxes, eos esse propiores nobis in oppositione quam in conjunctione; invenitur quoq, differentiam harum distantiarum esse æqualem diametro orbitæ terrestris. In hoc consistit comprobatio

quoq

geometrica, illos moveri circa Solem, et eorum orbitas includere illam terræ. Si terra esset centrum eorum orbitarum, illi deberent necessarie comitari terram in sua revolutione circa Solem, ita ut locum haberent duo, loco unius motus. Simplicitatis causa igitur jam supponere debemus, Solem esse centrum commune circa quod terra, cujus orbita illas Mercurii et Veneris includit, et dein ceteri planetæ moventur, quorum orbitæ iterum illam terræ includunt. Hoc systema ~~jam~~ comprobabitur quoq[3] prius alia ratione. —
Ordo, quo orbitæ superiorum planetarum includunt Solem et terram concluditur eadem ratione, uti prius de planetis superioribus. Si planetæ sunt oppositi soli, eorum celeritas apparens, conjuncta cum vera seu heliocentrica celeritate terræ, quæ est nota, dabit eorum celeritatem heliocentricam in ratione illius terræ, ex quo dein fluit relatio, quæ existit inter celeritates heliocentricas omnium planetarum. — Observationes oppositionum, ubi planeta est in eadem linea cum sole et terra, dant quoq[3] angulum ad Solem quem planeta percurrebat ab una oppositione ad alteram, et hinc tempus necessarium ad unam revolutionem. — Prœterea nullum dubium est, planetam, qui describit majorem orbitam, debere habere minorem celeritatem angularem, quam planetam inferiorem: quod quoq[3] prius jam de orbitas Mercurii, et Veneris et Terræ inventum est. — Observationes hinc præbent hoc resultatum, planetas moveri circa Solem hoc ordine: Terra, Mars, Jupiter, Saturnus, Uranus; periodi eorum revolutionum circa Solem sunt fere ~~at~~ in ratione uti 1, 2, 12, 29, 83
Idem ordo est ex eorum apparenti magnitudine, ita v. c. Mars citius illam variat in oppositione quam Jupiter, et sic de ceteris; ex quo est clarum, variationem distantiæ Martis à terra esse majorem respectu hujus distantiæ, vel Martem esse viciniorem terræ quam Jovem. Diametri apparentes in conjunctionibus et oppositionibus sunt fere in sequenti ratione: quoad Saturnum uti 10 ad $12\frac{1}{3}$, quoad Jovem uti 10 ad 15, quoad Martem uti 10 ad 48; ex quo se-

quitur

et quo sequitur, diametrum orbitæ terrestris esse ad diametros orbitarum Saturni, Jovis et Martis, uti differentiæ priorum numerorum ad eorum summam, h. e. uti $2\frac{1}{3}$ ad $22\frac{1}{3}$, uti 5 ad 25, uti 38 ad 58, vel uti quilibet ad numeros $9\frac{1}{2}$, 5 et $1\frac{1}{2}$.

Nunc afferam principales circumstantias motus apparentis seu geocentrici planetarum, quæ dein servient ad verificationem omnium systematum, quæ nihil aliud sunt quam explicatio præcedentium phænomenorum. — Quum planetæ inferiores pervenerunt ad suam maximam digressionem occidentalem, approximantur conjunctioni superiori, celeritate crescente et motu directo. — In momento ipso conjunctionis, celeritas motus directi est in suo Maximo, et incipit decrescere magis et magis, donec pervenerit planeta ad suam maximam digressionem orientalem. Post aliquod tempus, planeta evadit stationarius; post aliquot dies quibus mutavit suum locum insensibiliter, ille ocidit ad suam conjunctionem inferiorem, cum motu retrogrado et celeritate crescente. Post hanc conjunctionem, hic motus retrogradus imminuitur magis et magis, et aliquot hebdomadas ante suam maximam occidentalem digressionem, planeta est iterum stationarius secunda vice. Post aliquot dies, motus iterum evadit directus; sed quum iste motus est lentior illo Solis, planeta adhuc dimovetur a Sole et non pervenit ad suam maximam digressionem occidentalem, donec suus motus directus, evadit celerior illo Solis. Dein omnia hæc phænomena revenient eodem ordine, et observatur quod sequitur:

1° Maximum celeritatis directæ in superiori conjunctione est fere duabus vicibus magis quam Maximum celeritatis retrogradæ in conjunctione inferiori.

2° Motus retrogradus Mercurii durat fere 23 dies et continetur in arcu 9° usque ad 16°; ille Veneris durat fere 42 dies, in arcu 14° — 17°. Dein intervallum temporis inter duas conjunctiones superiores et inferiores, est fere pro Mercurio 116 dies

et

et 584 dies pro Venere; durationes motus retrogradi et directi sunt fere uti 1 ad 5 pro Mercurio, et uti 1 ad 14 pro Venere.

Phænomena, quæ repræsentant planetæ superiores, sunt eadem, substituendo tantum oppositionem pro conjunctione inferiori; nam, uti quilibet facile videbit, in oppositione planetæ superior videbit terram in sua conjunctione superiori. — Motus planetarum superiorum, quando sunt in conjunctione, est directus et celeritas maxima; sed imminuitur semper, si Sol removetur a planeta versus orientem, propter suam maximam celeritatem, ita ut planeta semper magis et magis dimovetur occidentem versus. Quando pervenit ad suam occidentalem quadraturam (90° a Sole), evadit ille stationarius, et dein retrogradus. Hic motus retrogradus semper acceleratur ratione, qua appropinquatur oppositioni, ubi ille est in suo maximo. Dein planeta iterum admovetur Soli, motus retrogradus imminuitur et devenit zerus. Postquam erat diu per plures dies stationarius, planeta accedit ad suam conjunctionem motu directo et celeritate crescente, ita ut sua distantia a Sole orientalis imminuatur; Sol vadit orientem versus celerius quam planeta. Post hanc conjunctionem eadem phænomena reveniunt, et observantur sequentia:

1° Maximum celeritatis directæ in conjunctione, est fere duabus vicibus majus quam celeritas retrograda in oppositione. —

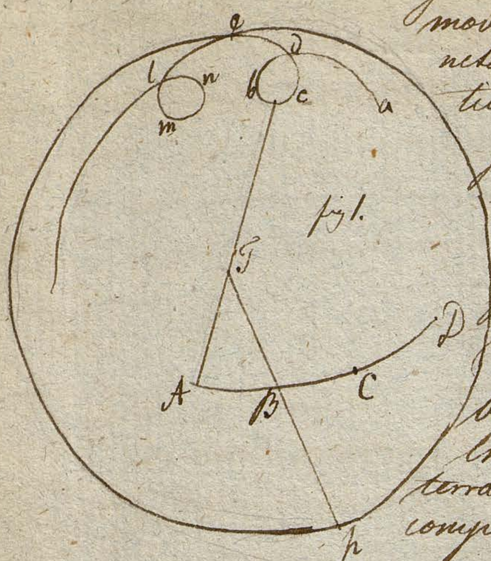
2° Periodus inter unam et sequentem conjunctionem, est fere 780 dies pro Marte, 399 pro Jove, 378 pro Saturno et 370 pro Urano. Motus retrogradus horum quatuor planetarum durat 61 — 81, 117 — 122, 135 — 139, 150 — 153 dies, et includit arcus 10° — 20°, 10°, 7° et $3\frac{3}{4}$°. — Durationes motuum retrogradorum et directorum Martis, Jovis, Saturni et Urani sunt igitur inter se uti 1: 10, 1: $2\frac{1}{3}$, 1: $1\frac{3}{4}$, 1: $1\frac{2}{5}$.

Diversa Systemata planetaria

Jam primi Astronomi observarunt, totum coelum stellatum rotari inter 24 horas circa terram a sinistra dextram versus; praeterea animadverterunt, Solem, Lunam et quinque alia astra mutare suas distantias respectu stellarum fixarum, hinc eorum motum non esse parallelum illi caeterorum astrorum seu Aequatori, ex quo concluderunt, eorum motum apparentem esse in linea spirali. Sed mox viderunt hunc motum simplificari, illum resolvendo in duos alios et attribuendo hos motus planetis, nimirum unum, qui proprius est omnibus astris, et alterum proprium planetis, qui alium polum, quam polum aequatoris haberet. Unus est perfecte regularis, secundus vero pluribus irregularitatibus est obnoxius, quas jam vidimus in praecedentibus. Istae irregularitates non dependent a longitudine planetarum (: puncta nimirum conjunctionis et oppositionis, semper aliis punctis eclipticae correspondent:) sed ab eorum situatione relative ad Solem; et probabiliter iste motus e Sole visus, magis erit regularis, uti hoc ex uniformitate retrogradationis etc uti et oppositiones, sola loca heliocentrica, quae immediate observari possunt, concludi potest. Et in hoc quoque consistit comprobatio evidens veritatis, Solem esse centrum ~~omnium~~ orbitarum planetarium. —

Observationes retrogradationis, oppositionis etc praebent nobis novas irregularitates, etsi minus considerabiles. — Arcus intercepti et temporis intervalla inter duas stationes, vel oppositiones, et praecipue quoad Martem, non inveniuntur ejusdem magnitudinis. Hae irregularitates dependent a planetarum longitudine, quod ergo contrarium est prioris irregularitatis. Haec irregularitas apparet esse ejusdem generis, uti irregularitas Solis, cognita sub nomine aequationis centri, nominatur prima irregularitas; secunda est illa, quae solum dependet a situatione apparenti planetarum respectu Solis. —

Assumamus in T terram esse in quiete, et Solem moveri ab A per BCD, et superiorem aliquem planetam per abcd; dum est planeta a dusq b stationarius, per bc retrogradus et in c el iterum stationarius. Nunc evadit directus et dimovetur per def.... a terra donec sit in h in conjunctione cum Sole, et in maxima distantia a terra. Dein appropinquatur terrae, venit in oppositionem cum Sole, evadit stationarius, retrogradus etc et describit in qualibet oppositione similem nodum lmn. Tota orbita planetae, in suppositione terram esse in quiete, evadit igitur admodum complicata, ex innumeris nodis composita linea curva, quae nunquam in se ipsam redit. —



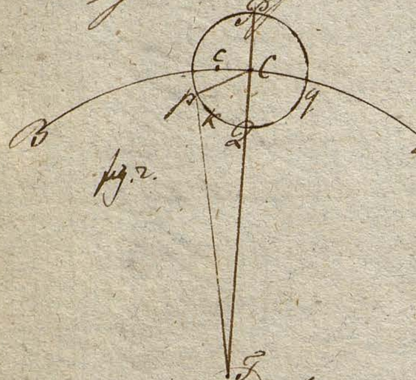
Kepler relativam orbitam Martis circa terram ex observationibus per 16 annos institutis accurate determinavit (De stella Martis c. I. p. 4.) et tantummodo adscriptam figuram adspicere debemus, ut statim videamus, hanc orbitam non posse esse veram orbitam; talis confusio, talis dispersio spatii nullibi occurrit in natura. Et haec confusio adhuc major erit, si respicitur latitudo planetarum. — Quum eorum maxima geocentrica latitudo vel inclinatio versus eclipticam, modo major modo minor est, eorum orbita, vel non in eodem plano jacet, hinc duplicem curvitatem habet, vel intersectio eorum plani cum ecliptica, non transit per oculum, h. e. planeta non revolvitur circa terram, quae extra planum suae orbitae jacet, sed oculus in terra videt ejus orbitam a latere. Possumus quidem per varias hypotheses hunc complicatum motum planetarum, in plures simplices decomponere, sed absolutus et omnibus compositus motus, semper manet idem, quamdiu terra assumitur quiescens. —

Praecipuum problema Astronomiae „pro quolibet tempore, locum apparentem, seu relativum corporum coelestium respectu terrae invenire„ redit ad hoc, determinare punctum in

relat

in relativa ~~ellipsica~~ orbita abcdef--- in quo determinato tempore planeta est. Ad resolutionem hujus problematis, debemus noscere naturam lineæ curvæ abcdef et legem secundum quam planeta hanc lineam describit, vel saltem ex observationibus debent regulæ derivari, secundum quas per constructionem vel per calculum, relativus motus planetæ h. e. sua distantia Th et angulus ATh inveniri potest. Jam solus aspectus lineæ abcdef--- ostendit ejus magnam similitudinem cum epicycloide: saltem nullus simplicior modus imaginari potest, quam assumendo, planetam moveri in peripheria circuli seu <u>epicycli</u> cujus centrum simul describit circulum circa terram. — Illis temporibus, ubi ad resolutionem problematum geometricorum tantummodo circulum et lineam rectam adhibere solebant, debebant Astronomi tentare, an hæc hypothesis non ita accomodari possit ut satisfaciat observationibus. Calculus dein evaserat admodum ~~simplex~~ facilis, et non erat necessarium, iterum construere hypotheses et incipere novas disquisitiones quoad <u>veram</u> orbitam ~~apparentem~~ planetarum; manserunt Astronomi apud orbitam apparentem, et hypotheses tantum serviebant ad simplificationem calculi. — Ordo orbitarum planetarum inter se debebat dein quoq ita manere, uti hoc postulabant eorum motus apparentes circa terram. Hac ratione ortum est <u>systema Ptolomæicum</u> quod suum nomen accepit a celeberrimo Astronomico autore antiquioris ævi <u>Ptolomæo</u>, digno successore <u>Hipparchi</u> in museo Alexandrinico, versus medium secundi seculi, qui proposuit hoc systema in suo <u>Almagisto</u>. Secundum hoc systema, terra est quiescens in centro orbitarum lunæ, Solis et planetarum. Luna quæ in eclipsibus Solis ante Solem transit, et brevissimam periodum habet, terræ debebat esse vicinissima; ceteri planetæ distribuebantur

secundum longiorem periodum sequenti ordine: ☿ Mercurius, ♀ Venus, ☉ Sol, ♂ Mars, ♃ Jupiter, ♄ Saturnus. Aliqui Graeci philosophi v. c. Plato, posuerunt statim post orbitam lunae orbitam Solis, et ex altera parte Solis Mercurium et Venerem, quia nunquam viderant hos planetas ante Solem. Ceterum facile videri potest, secundum hoc systema Ptolemaicum idem esse, ac si ponantur hi duo planetae vel ex hac vel ex altera parte Solis, quia revera diversis temporibus ex utraq. parte Solis exstant. — Et hoc est certa objectio maximi momenti contra hoc systema, quae Astronomos priores aevi attentos facere debuisset, Solem esse centrum saltem horum inferiorum planetarum, si tum uti hodie notae fuissent distantiae planetarum. Si Planeta circulum Sp2q ab una



oppositione cum sole usq. ad sequentem describit, et interea centrum C hujus epicycli circa terram T circulum ACB describit tempore quo planeta unam revolutionem in ecliptica facit, ex hoc facile omnia adducta phaenomena explicari possunt. In S ille est in oppositione maxime distans a terra [illegible] et a S ad p directus. In p sua via coincidit cum tangenti pT; quum autem totus epicyclus se movet secundum ordinem signorum, planeta manet tamdiu directus, donec ejus motus retrogradus pk aequalis sit directo Cc epicycli ex T visi. In conjunctione ☌ seu inferiori oppositione 2 planeta est in maxima vicinia terrae, et quam maxime celeriter retrogradus; in q iterum est stationarius, et dein directus, uti hoc observationes postulant. —

Continua vicinia duorum inferiorum planetarum apud Solem, a quo nunquam separantur, est quoq. comprobatio illos esse satellites Solis et non terrae. Et in hoc consistit systema Aegyptiacum. Secundum hoc, luna, Sol, Mars, Jupiter et Saturnus rotantur circa terram, sed Mercurius et Venus circa Solem, et cum Sole conjunctim circa terram uti in systemate Tychonico.

Illi describunt circa Solem in centro C epicyclum Pp2q et interea Sol ipse rotetur in circulo ALKB circa terram, Hoc systema hinc differt a Ptolomaico in hoc, ut secundum hoc systema centrum epicycli C quoad inferiores planetas Sol ipse sit, qui secundum Ptolomaicum etiam semper in linea recta TC est, quia planeta in superiori et inferiori conjunctione 2 et 2' etiam in hac linea existit. Tota differentia igitur revenit, uti vidimus, ad magnitudinem lineæ TC, vel potius ad rationem hujus lineæ ad radium orbitæ Solis; et nos videbimus, etiam secundum Ptolomæum punctum C nihil alind quam locum solis fuisse, quod autem ille non scire potuit, quia tum diversæ distantiæ planetarum adhuc ignotæ erant. —

Tycho Brache certe unus celeberrimorum Astronomorum sed non satis philosophus, perfecte perspexit et intellexit pulchritudinem systematis Copernicani, quod suo tempore jam a pluribus applausu magno acceptum erat. Quæcunque sit ratio, vel cupido acquirendi nomen immortale, vel timor ne Theologis displaceret, satis est hoc, ille non se potuit resolvere ad assumtionem motus terræ. Sua argumenta jam suis temporibus tantum paucos convincebant; nostris temporibus nulla refutatio suorum argumentorum est necessaria. Immensa distantia stellarum fixarum, quæ assumi debeat, quia non habent parallaxin, dein nulla probabilitas, talem gravem pigram massam, uti terra habet, habere talem celeritatem in suo motu, præterea aliquæ expressiones in biblia sacra, quæ videntur supponere motum Solis non terræ; hæc erant notabilia argumenta, quæ Tychonem incitabant assumere terram immobilem in centro orbitarum lunæ et Solis, simul quoq rotationem planetarum circa Solem qua commune centrum; et hac quidem differentia

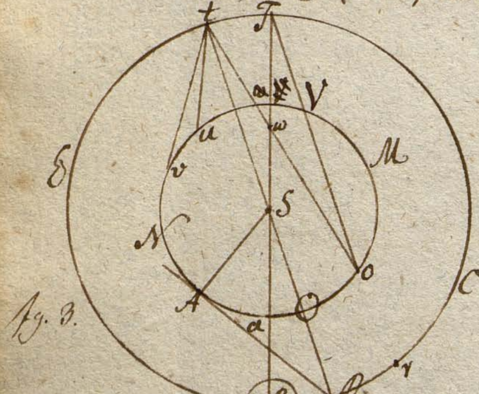
orbitas inferiorum planetarum minores, superiorum autem majores esse orbita Solis, ut illi veniant in oppositionem quando hi sunt in inferiori conjunctione. Quum autem apparens motus Solis eadem ratione progreditur, vel assumendo motum Solis circa terram, vel motum terrae circa Solem sine mutatione phenomenorum apparentium, in systemate Tychonico pro orbita Solis, motum terrae circa Solem ponere possumus, dein coincidit hoc systema cum systemate Copernicano. Omnes motus igitur et inaequalitates planetarum in ambobus systematibus eadem ratione explicantur. Ex his praemissis quilibet facile derivare poterit argumenta pro systemate Copernicano. Secundum Ptolomeum revolvuntur planetae revera non circa terram, sed in epicyclo, qui terram non includit, et tantummodo mediate, et ~~tantummodo~~ revolvuntur circa terram, quum comitantur centrum epicycli. Quale hoc punctum sit, an tantummodo punctum mathematicum, vel sedes alicujus vis motricis, vel aliquod corpus, hoc manebat in systemate Ptolomaeico indeterminatum. Quum neq cogitari possit motus in circulo circa aliquod punctum in quo nulla esset vis, nullum corpus, neq quaestio potuit esse quale corpus sit in centro. Secunda inaequalitas planetarum, vel eorum motus in epicyclo dependet accurate ab eorum situ versus Solem et non ab eorum motu circa terram; Ptolomeus igitur assumere debebat Solem semper esse cum terra et centro epicycli in linea recta. Hac circumstantia in magno gradu probabilitatem deberet dare, Solem revera esse centrum commune omnium epicyclorum; certitudo autem tum potuit adesse, quando accurate per observationes determinata fuerit ratio radii π respectu radii orbitae Solis, et quando dein inventa fuerit inter ambas quantitates aequalitas. Per talia argumenta fere coacti sunt Astronomi ad assumtionem Solis qua centrum orbitarum planetarum; et hac ratione ortum est Syste-

systema Aegypticum, et si hoc extenditur ab inferioribus ad superiores planetas, systema Tychonicum. Et nunc deerat tantum unus passus ad certitudinem, nimirum cognitio motus terrę, cujus argumenta physica quidem tardius sunt detecta, qui autem talem internam probabilitatem habet, ut jam antiquissimis temporibus inveniuntur vestigia hujus systematis. — Opinio motus diurni terrę ab occasu ortum versus, jam antiquissimis temporibus omnibus communis erat, quod quoque elucet ex refutatione quam tentavit Ptolomeus (: Almag. L. I. Cap. 7. :). Vera orbita planetarum in quolibet systemate, in quo terrę non conceditur motus annuus, est admodum complicata epicyclois, in qua nullus ordo, nullę leges physicę etc animadvertuntur; si autem motus annuus terrę circa Solem assumitur, statim regnat ubicunque ordo, phenomena facile explicari possunt, et ista assumtio evadit dein fons pulcherrimarum legum naturę, quas hac ratione Newton et Kepler detexerunt. Neque antiquioribus philosophis hoc omnia penitus occultata fuerunt, et nos scimus, Nicetam, Philolaum et Aristarchum hoc systema saltem ex parte assumsisse. Nicetas Syracusius qui vixit 400 annis ante Christum natum, inter Pythagoreos erat primus, qui hoc systema, saltem quoad motum diurnum, maxime clare docuit. Cicero in suis Academicis quaestionibus IV. 39. editio Ernesti, ita se explicat: „Nicetas Syracusius, ut ait Theophrastus, coelum, Solem, lunam, stellas, supera denique omnia, stare censet: neque praeter terram rem ullam in mundo moveri: quę quum circum axem se summa celeritate convertat et torqueat, eadem effici omnia, quasi stante terra coelum moveretur„ Videtur igitur fuisse hoc systema universaliter assumtum systema priscorum temporum, et forsitan residuum alicujus adhuc priscioris Astronomię, cujus argumenta jam perdita, theoremata autem retenta fuerint usque ad scholam Alexandrinam, quum Hipparchus reformationem totius Astronomię suscepit. Hic celeberrimus Astronomus omnes doctrinas subjecit novo examini, et rejecit omnia, quę non per observationes ipsas demonstrata fuerunt, hinc quoque motum terrę cujus argumenta

tum

tum adhuc durant, vel forsitan perdita fuerunt. — Copernicus (Thorunensis) invenit igitur in scriptis priscorum Astronomorum per totum suum systema dispersum; collegit igitur omnes has singulas ideas in systema et cum suo philosophico intuitu, circumspexit statim simplicem ordinem et istas maximi momenti consequentias sue hypothesis, et bono animo instructus erat proponendi veritates inventas contra omnia præjudicia. — Harmonia theorie cum observationibus, absolutam præbet comprobationem sui systematis. Secundum hoc systema igitur Sol est centrum commune omnium orbitarum planetarum, qui secundum sequentem ordinem circa solem revolvuntur: ☿, ♀, ♁, ♂, ♃, ♄, ♅. — Aliqua de explicatione motuum apparentium planetarum secundum hoc systema, afferemus.

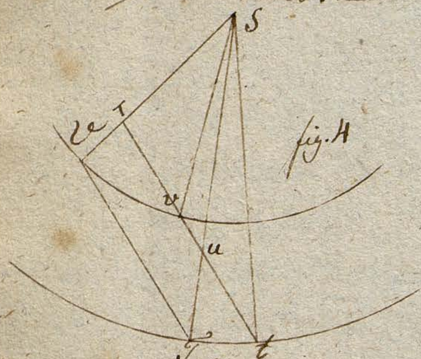
Sit in S. Sol, circa quem aliquis inferior planeta v. c. ♀ secundum VNOM et terra ♁ in eadem directione TE circulos concentricos uniformi celeritate describunt, quod hic, ubi tantum de generali explicatione sermo est, assumi licet. Si ♁ est in T. et ♀ in O in superiori conjunctione (☌), dein movetur ortum versus directione Oo, movetur igitur directe circa terram per angulum OTo, si illa in T esset in quiete; quum autem interea terra etiam ortum versus per arcum Tt progressa est, Venus terre apparet nunc in linea to. Hæc linea divergit a linea syzigiarum TO angulo Owo = Oto + Tot. — In superiori conjunctione igitur geocentrica, directa celeritas Veneris æquatur absolutæ geocentricæ celeritati Veneris, et absolutæ Veneris heliocentricæ celeritati terre h. e. summæ celeritatum angularium, quam quilibet horum planetarum haberet, si solus circa alium moveretur, et hic quiesceret. Si conjunguntur puncta S et t, deinde est hæc celeritas etiam = Twt = TSt + Sto, vel æqualis summæ celeritatum terre vel Solis et elongationis Veneris a Sole. Fere 220 diebus post superiorem conjugationem Venus est in sua maxima digressione a Sole: quum hoc 37 diebus plus sit quam dimidius annus, terra jam descripsit semicirculum TEB et est v.c. in R



Si dein ducatur tangens orbitæ Veneris Rt, dum Venus est in A, et maxima digressio ARS est secundum observationes $= 46°$. Quum nunc in A sit angulus rectus, erit $AS = RS \sin 46°$, vel radius orbitæ Veneris est 0.72 radii orbitæ terræ, quod ab accuratissima determinatione 0.72332, parum differt. Angulus ASR est 44° et BSR qua medius motus terræ in 37 diebus est 36°28' hinc $ASB = 7\frac{1}{2}°$. Venus igitur descripsit in 220 diebus $360° - 7\frac{1}{2} = 352\frac{1}{2}°$ circa Solem, nam ☌ est superior conjunctio a qua incepimus, necessarii igitur sunt secundum hanc rationem quatuor dies 16 horæ 19 min. pr. ad describendos gradus $7\frac{1}{2}°$ qui conjuncti cum jam elapsis 220 diebus, dabunt tempus totius revolutionis Veneris circa Solem, nimirum 224 dies 16 horas, 19 min. p., tempus quod tantum modo fere 22' a vera revolutione differt. Hac ratione secundum systema Copernicanum facile nos pedetentim de veris orbitis planetarum convincere possumus. ——

Quilibet videt motum Veneris per totum hoc tempus fuisse directum. Nam in initio attingebat linea TO Venerem in superiori parte suæ orbitæ, et hæc linea Venerem non prius attingere potest in inferiori parte, quam quum veniat in contactum, et superiori conjunctione O usque ad maximam digressionem A, ista linea igitur semper attingit Venerem in superiori parte suæ orbitæ in aliquo puncto N, vel Venus magis distat a terra quam Sol, dein progreditur Venus a puncto N sinistram versus, terra autem a B dextram versus, hinc Venus eo plus sinistram versus, h.e. secundum ordinem signorum progredi videri debet. Hic casus adhuc quoque erit in A; nam quum Venus in tangenti puncti A versus a progreditur, terra describit arcum Rr, et linea ra divergit orientem versus a linea Rt.

Sed mox dabitur tempus, quo lineae ex terra ad planetam ductae, in duobus subsequentibus momentis, evadunt parallelae, hinc apparebit planeta in caelo stationarius. In suppositione, ambos planetas describere circulos concentricos uniformiter, facile inveniri potest digressio inferioris planetae a Sole in momento, quo est stationarius. — Sit S, Sol, circa quem inferior planeta in aliquo



parvusculo tempore describit arcum Vv, superior planeta autem arcum Tt, et sit tempore stationis TV parallelum tv, nominentur tempora revolutionum amborum planetarum T et t, radii eorum orbitarum $ST = R$, $SV = r$ digressio $STV = \varphi$ et angulus $SVT = \psi$, dein est propter uniformitatem motus $T : t = VSv : TSt$, et propter parallelismum linearum TV et tv: $\varphi = Suv = Stv + TSt = \varphi + d\varphi + TSt$, hinc $d\varphi = -TSt$. — Eadem ratione habemus $\psi = Svt = Svt - VSv = \psi + d\psi - VSv$, hinc $d\psi = VSv$ et hoc dat $d\psi : d\varphi = T : t$. Ex triangulo STV est $\sin\psi = \frac{R}{r}\sin\varphi$ hinc $d\psi\cos\psi = \frac{R}{r}d\varphi\cos\varphi$ vel $d\psi : d\varphi = R\cos\varphi : r\cos\psi$, quod cum priori proportione dat $r^2\cos^2\psi = \frac{t^2}{T^2}R^2\cos^2\varphi$; si huic aequationi addatur sequens $r^2\sin^2\psi = R^2\sin^2\varphi$ dein est

$$r^2T^2 = R^2(t^2\cos^2\varphi + T^2\sin^2\varphi) \text{ hinc}$$

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(r^2T^2 - R^2t^2)}}{R\sqrt{T^2 - t^2}}$$ vel si ponatur $\frac{r}{R} = \varrho$, $\frac{t}{T} = \tau$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(\varrho+\tau)(\varrho-\tau)}{(1+\tau)(1-\tau)}}$$

Pro Venere, uti diximus, erat $\varrho = 0.72$, $\tau = \frac{224.67}{365.25} = 0.615$ hinc $\sin\varphi = \sqrt{\frac{1.335 \times 0.105}{1.615 \times 0.385}} = 0.47481$ et $\varphi = 28^\circ 21'$ quod bene concordat cum observationibus.

Cum planeta fuerit in sua statione, φ decrescit, planeta evadit retrogradus, et appropinquatur inferiori conjunctioni V (praeced. figura)

Dein progreditur Venus in Vv, terra in Tt, et quum prior motus major sit quam secundus, Venus directione Vv h.e. retrograde moveri videbitur. Si nimirum ducatur tu parallela TV, Venus retromovetur angulo $xt*$ $utv = Vtv -$ $- Vtu = Vtv - TVt$ h.e. differentia amborum motuum apparentium, si quod ambos motus oculus quiesceret; et facile videmus, hanc differentiam esse maximam, si tV vel tv perpendiculariter insistit orbitae Veneris, uti TV. Motus retrogradus igitur in inferiori conjunctione est maximus, et evanescit post conjunctionem quando φ iterum est aequale $28°21'$. Dein iterum evadit directus cum celeritate crescente, quo magis appropinquatur planeta superiori conjunctioni, nam anguli OTo uti et Tot, hinc quoq eorum summa (Vid. praeced.) evadit eo major, quo vicinior linea TO est directioni perpendiculari ad ambas orbitas in syzygiis. Interea videmus possibilem esse talem situm duarum orbitarum, in quo nullus motus retrogradus locum haberet. Si nimirum φ pro puncto stationis evanescit, dein cadit istum punctum et in inferiorem conjunctionem ipsam et nullus erit motus retrogradus, quia φ non non amplius minor evadere potest. Hoc locum habet $rT = Rt$ vel $r : R = t : T$ h.e. si distantiae planetarum a Sole se habent uti tempora revolutionum. Rt evaderet $> rT$ seu $\frac{R}{r} < \frac{T}{t}$, φ evaderet imaginaria quantitas et etiam nullus motus retrogradus esset. Quum autem observationes doceant, omnes planetas habere motum retrogradum, concludere debemus

dari legem universalem pro omnibus planetis, nimirum esse $\frac{T}{t} > \frac{R}{r}$ vel, rationem temporum periodicorum debere esse majorem quam rationem distantiarum a Sole. Apud Venerem et terram est $\frac{T}{t} = \frac{1}{0.615} = 1.626$ et $\frac{R}{r} = \frac{1}{0.72} = 1.39$ et nos videbimus in decursu, inter has rationes valere legem universalem $\frac{T}{t} = \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$. —

Phaenomena superiorum planetarum eodem facili modo explicantur si tantummodo terram in orbitam VdAM et superiorem planetam (v. c. ♃) in orbitam TEB transferamus: dum coincidunt superior conjunctio terrae in O cum conjunctione Jovis in J, et inferior conjunctio terrae in V cum oppositione Jovis in J. Terra dum apparet Jovi directa in conjunctione stationaria, si ex Jove visa digressio terrae a Sole aequalis φ, et retrograda in oppositione; facile autem videtur, Jovem apparere debere terrae directum, stationarium vel retrogradum, si terra Jovi hac ratione apparet. Geocentrica distantia superioris planetae a Sole momento stationis, vel angulus $SVJ = \psi$ (in ultima figura) invenitur ex aequatione $\sin\psi = \frac{R}{r}\sin\varphi$, ex qua, uti prius sequitur $\sin\psi = \sqrt{\frac{(T'+\rho')(T-\rho')}{(T'+1)(T-1)}}$ ubi r et t distantia et periodus pro terra et $\rho' = \frac{R}{r}$, $T' = \frac{T}{t}$ est. — Aliud phaenomenon quod praecipue apud Venerem notabile est, per systema Copernicanum eodem modo facile explicatur, et praebet novam demonstrationem pro hoc systemate. Si Venus est in superiori conjunctione O terrae T obvertit eandem partem, quae a Sole illustrata est, apparet terrae in plena luce; in inferiori conjunctione autem obvertit terrae non illustratam partem et hinc apparet terrae, uti hoc in transitibus ante discum Solis videmus, opaca. A superiori usque ad inferiorem conjunctionem decrescit semper lux, quia terra semper et semper minorem partem illustrati disci videt; Venus igitur uti Luna habet suas phases. Ptolomaicum systema se distinguit a Copernicano et Tychonico tantum in eo, ut Sol quidem semper

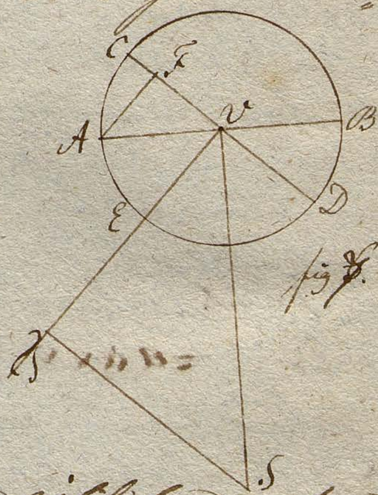
in linea TB sed non ex interne in a planeta descripto epicyclo sit, sed vel ex parte puncti Q vel ex parte puncti B. Dum autem deberent phases Veneris, positis digressionibus a Sole aequalibus, in superiori et inferiori parte suae orbitae v. c. in π et κ, esse aequales, et ejus lux non possit a B usque ad Q decrescere. Si Sol esset ultra B vel cis Q, Venus et in B et in Q vel tota opaca vel tota clara. Observationes igitur tantummodo explicari possunt, assumendo Solem esse intra epicyclum, vel planetam rotari circa Solem. Haec ratione igitur Copernicanum seu Tychonicum systema confirmatum est. Accuratior determinatio diversarum phasium supponit aliqua theoremata perspectivae, quae notabilia hic enucleabimus, quum saepius sint necessaria.

fig 5

Si oculus ab aliquo objecto ita distat, ut non possit distinguere varias distantias ejus partium, judicabit, omnes partes habere aequales distantias, vel totum objectum jacere in plano perpendiculari respectu oculi vel aliis verbis; oculus figurant unam hac aequalem fingit, quae ex intersectionibus linearum ad quodlibet punctum objecti ductarum visualium cum plano, oritur, quod ad lineam ex oculo ad centrum figurae ductum perpendiculare est. Si igitur DAE circulus circa centrum C cum radio CA ~~= a~~ descriptus est et oculus est in O, ducatur OC = c, et ad planum circuli perpendiculum OF tandem FC quae occurrit circulo in A et diameter DE ad hanc lineam perpendicularis. Dum est OCF = ACB = φ inclinatio lineae visualis OC versus planum circuli, et DE est ad planum OCF perpendicularis; hinc sunt OCD, OCE uti et ∠ACD, ∠ACE anguli recti. Si dein ducantur ad omnia puncta circuli lineae OA, OY etc et imaginetur per DE planum

fig 6.

ad OC perpendicularem, quae a lineis OA, OY in a et y interse-
catur; dein apparet circulus oculo valde distanti uti linea DyaE
et si YX est perpendicularis ad DE dein sunt OCa, OXy anguli
recti. Coordinatae circuli igitur sunt CX = X, XY = Y et
projectiones CX = x, Xy = y, et nos habebimus pro circulo aequa-
tionem $Y^2 = a^2 - X^2$. Linea nunc CA, XY et propter magnam
distantiam etiam OC et OX sint parallelae, est OXY = OCA = 180° - φ
hinc in triangulo XYy, $Y = \frac{y}{\sin φ}$, et si hic valor in priori aequa-
tione substituitur, erit pro projectione $y^2 = (a^2 - x^2) \sin^2 φ$,
quae equatio designat ellipsin, cujus axis major 2a = DE et
minor = 2Ca = 2a sin φ est. Admodum distans ex parte tantum
visus circulus apparet igitur ut ellipsis, cujus axis major se
habet ad minorem uti radius ad sinum anguli φ, sub quo li-
nea ab oculo ad centrum circuli se inclinat versus ejus pla-
num; et axis minor hujus ellipseos Ca jacet semper in
plano OCA, quod per lineam visualem OC ad planum cir-
culi perpendiculare est. Si nunc



V est centrum alicujus planetae ABD
in S sol in T terra, AB, CD duo cir-
culi maximi perplanetam ad SV, TV
perpendiculares; ADB representat a
Sole illuminatam, CAD autem ex terra
visam semisphaeram planetae; in terra
igitur opaca pars AC non erit visibilis,
ita semicirculus VA terminet in terra visibilem partem
planetae, et apparebit hic limes sub forma dimidiae ellipseos
cujus axis minor ad majorem seu ad apparentem diametrum
planetae AB se habet uti sin AVT : 1. Oculus in T videbit
igitur dimidiam aream circularem DVE cum dimidia ~~el~~
elliptica area EVA, quae secundum naturam ellipseos, se ha-
bet ad priorem uti axis minor ad majorem h.e. uti

sin AVF : 1 vel si VF ducatur ad CD perpendicularis, uti VF : VC.
Totus visibilis discus se habet igitur ad totum discum planetae uti DF : DC = 1 + sin AVE : 2 vel uti 1 + cos φ : 2 si ex planeta visa distantia terrae a Sole TVS ponitur = φ. Si vellemus adhibere geocentricam elongationem planetae a Sole VTS = ψ, nota esse debet ratio distantiarum TS = r et VS = R: dein est $\sin\varphi = \frac{r}{R} \cdot \sin\psi$ et

$$DF : DC = 1 + \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\sin^2\psi\right)} : 2$$

In superiori conjunctione O (vid. fig. 3.) φ = TOS = 0 et 1 + cos φ = 2, ergo ex ellipsi evadit circulus, et oculo aparebit totus discus planetae illuminatus. In inferiori conjunctione V, est φ = TVS = 180° et 1 + cos φ = 0, h. e. planeta evanescit. —

Si terra in A et superior planeta in R est, dein φ non major evadere potest quam maxima digressio terrae a Sole SRA: dein est:
$\sin\varphi = \frac{SA}{SR} = \frac{r}{R}$, hinc apud Martem ubi $\frac{R}{r} = 1.5237$ est maximum $\sin\varphi = 0.6563$. Hoc dat φ = 41° 1' et $\cos\varphi = 0.7545 = \frac{3}{4}$: hinc se habet apud Martem discus visibilis, si est minimus, ad totum discum uti 7 : 8 et haec ratio tamen est tam magna, ut revera decrementum lucis et phases ♂ animadverti possint. ——

Apud Jovem et eo magis apud Saturnum, hae phases non sunt notabiles, quia $\frac{R}{r}$ est admodum magna quantitas: apud Jovem e.g. $\frac{R}{r} = 5.2$, φ = 11° 5' et cos φ = 0.9813; hinc se habet minimus visibilis discus Jovis ad totum uti 198 : 200, quod ab aequalitate non multum differt. — Apud nullum planetam ipsae phases sunt ita notabiles, uti apud Venerem. Nos videmus Venerem in superiori conjunctione penitus rotundam, quum prius in parte occidentali Solis erat, et quum ergo luxisset ante ortum Solis qua Phosphorus seu Lucifer. Post superiorem conjunctionem est ex orientali parte Solis, et lucet post occasum Solis qua Hesperus. Quum nunc appropinquatur inferiori

conjunc-

conjunctioni, jam lucidus discus habet formam falcis, dein apparet sti incurvatam filum, donec tandem in inferiori conjunctione penitus evanescat. Pars Veneris, quae terrae suam lucem mittit, evadit quidem semper minor, sed quoque lucidior, quia Venus appropinquabit terrae. Clarissime lucebit igitur in aliqua digressione a Sole, quae facile sequenti modo inveniri potest, si assumuntur orbitae quasi circuli concentrici. ——— Ex Photometria praesupponere possumus, illustrationem quam acquirit objectum aliquod a sphaera se habere inverse uti quadrata distantiarum hujus sphaerae. Quum autem hic terra non a tota superficie sphaerica illuminatur, sed tantummodo ab aliqua parte, quae se habet ad circulum maximum sphaerae uti $1+\cos TVS$*$:2$, ratio illuminationis quam accipit terra a Venere in quolibet situ, erit $\frac{1+\cos TVS}{TV^2}$, quod debet esse maximum. Ponatur $ST=R$, $SV=r$, $TV=x$, dein est $\cos TVS = \frac{r^2+x^2-R^2}{2rx}$ et $1+\cos TVS = \frac{(r+x)^2-R^2}{2rx}$ hinc illuminatio est in ratione $\frac{(r+x)^2-R^2}{2rx^3}$*

Si haec expressio differentiatur respectu quantitatis x ponendo R et r constantes, casus hic maximi dabit aequationem

$$0 = x^2+4rx-3(R^2-r^2)$$ ex qua dein

$$x = -2r+\sqrt{(3R^2+r^2)}$$

Ponendo nunc $r = R.0,72333$ erit

$$x = R.0.43$$

Sed quum sit $\cos VTS = \frac{x^2+R^2-r^2}{2Rx}$ erit $= 0.76913$ et $VTS = 39° 43'$ qui arcus est digressio Veneris a Sole, si ejus lux maxime splendet. Quum autem Venus in qualibet parte Solis hanc digressionem bis acquirat, ante et post maximam digressionem 46°, notare debemus, maximam illuminationem esse in illa digressione 39° 43', quae inter maximam digressionem et inferiorem conjunctionem cadit quia $x < R$ est. —

Orbitae planetarum, quae se ex utraque parte ab ecliptica removent, non potest jacere in plano eclipticae, sed illam secat sub angulo, qui vocatur inclinatio orbitae planetariae, et qui angulus coincidit cum maxima latitudine planetae. —

Si planum orbitæ planetæ per terram transit, maxima geocentrica latitudo in ambabus partibus eclipticæ ejusdem debet esse magnitudinis; si autem hoc ultimum non locum habet, sequitur: terram non semper esse in plano orbitæ planetæ. Quum nunc observationes ostendebant, maximam apparentem latitudinem planetarum in qualibet revolutione admodum diversam esse, et v. c. apud Venerem ab 1° — 8° crescere; quum praeterea haec mutatio maximæ latitudinis non a longitudine planetarum, sed ab eorum situ versus Solem dependeat, ex hoc sequebatur vere mathematicum, et generatim argumentum maximi momenti contra systema Ptolomæicum, et naturaliter Astronomi excogitari debebant methodum planetam comparandi cum Sole non cum terra. Conabantur igitur Astronomi derivare ex observatis latitudinibus, quæ propter suam irregularem mutationem non potuerunt esse veræ, illas, quas haberet planeta a Sole visus, et invenerunt hac ratione, maximas rationes heliocentricas omnium planetarum ex utraque parte eclipticæ semper esse aequales, et generatim se mutare, si comparantur cum heliocentricis longitudinibus, secundum legem, quæ locum habet secundum doctrinas Geometriæ pro duobus se secantibus planis. Concludere igitur debuerunt, plana omnium orbitarum planetarum per Solem et non per terram transire, vel planetas revolvi non circa terram sed circa Solem. Haec disquisitio autem praesupponit problema, ex geocentrica longitudine et latitudine alicujus planetæ, heliocentricam et inverse invenire; et facile videmus, quamlibet observationem tantum modo dare aliquem angulum. —

Ut autem innotescant ceteri anguli trianguli, ratio laterum debet esse nota: hinc dependet tota theoria Planetarum a problemate, Invenire eorum distantiam a terra vel Sole in ratione distantiæ terræ a Sole. Keppler excogitavit primus methodos resolvendi hoc problema.

Motus Ellipticus.

Observationes Ascensionis rectæ et Declinationis Solis dant, uti vidimus in prioribus situm plani, in quo Sol, vel potius terra movetur. Si est α et δ observata ascensio recta et declinatio, ex Sole visa ascensio recta et declinatio A. et D terræ, facile derivari potest, si ascensio recta Solis 180° augetur, et ejus declinatio, mutato signo summatur, vel erit $A = \alpha + 180°$ et $D = -\delta$. Quomodo autem invenitur nunc linea curva in hoc plano, in quo revera centrum terræ movetur? ad hoc inveniendum, uti in præcedentibus diximus, debent esse notæ diversæ distantiæ diversis temporibus horum astrorum. — Simplicissimum medium nobis suppeditat observatio diametri Solis.

Si apparentes diametri Solis et etiam ejus celeritates (: h.e. ejus diurni motus in longitudine :) quolibet die anni essent aequales, sequeretur, orbitam Solis esse circulum in cujus centro quiesceret terra vel proprie, orbitam terræ esse circulum, in cujus centro quiesceret Sol. Sed observationes ostendunt et diametros et celeritates mutari, et acquirere in duobus sibi oppositis punctis maximum et minimum valorem. Initio Januarii nimirum, maxima diameter $D = 1955''6$ et maxima celeritas seu diurnus motus in longitudine $dV = 3672''4$. Ad finem Junii autem sunt minimi valores, horum quantitatum $d = 1891''6$ et $dv = 3433''6$.

Possibile esset, has variationes celeritatum terræ tantum esse

esse apparentes, vel terram tamen moveri in circulo, h. e. uniformi celeritate, Solem autem non esse in centro hujus circuli. Si autem observata variatio celeritatis terræ tantummodo hanc causam habet, et vera celeritas terræ in sua orbita constans est, ejus apparentes celeritates debent se habere uti diametri apparentes Solis, vel nos haberemus $\frac{dV}{dv} = \frac{D}{d}$. Est autem $\frac{dV}{dv} = 1.0695$ et $\frac{D}{d} = 1.0342$. Hinc non est $\frac{dV}{dv} : \frac{D}{d} = 1$ uti hoc deberet esse secundum hanc hypothesin. Quum autem $\frac{D^2}{d^2} = 1.0695$ quoque est $\frac{dV}{dv} : \frac{D^2}{d^2} = 1$ vel $\frac{dV}{dv} = \frac{D^2}{d^2}$ vel celeritates crescunt et decrescunt in duplo majori ratione, quam diametri. Igitur ad motum terræ si a Sole removetur, locum habet vera diminutio celeritatis, et hinc orbita terræ non est circulus. —

Si autem est r maxima distantia Solis a terra, ad quam celeritas dv et diameter Solis d pertinet, et R minima distantia, dein est $\frac{r}{R} = \frac{D}{d}$, hinc quoque $\frac{r^2}{R^2} = \frac{dV}{dv}$, et quum secundum priora uti hoc ostendunt observationes, quantitates D, R, dV secundum eamdem legem per totam orbitam variant, ultima æquatio quoque valebit, si dv est celeritas cujusvis puncti orbitæ ad quod pertinet distantia r, et quum R et dV sint quantitates constantes, erit generatim $r^2 dv = A$ ubi A est quant. const. Qualiscunque igitur sit hæc linea curva, quæ a terra describitur, in quolibet puncto hujus lineæ productum ex quadrato distantiæ Solis a terra et celeritate terræ est quantitas constans. — Omnes mensurationes apparentium diametrorum hujus astri comprobabant hoc resultatum. Uti autem scimus $\frac{1}{2} r^2 dv$ est expressio areæ quolibet die descripti sectoris orbitæ seu area per distantiam r in uno die circa terram descripta. Hæc area igitur est constans, et tota per distantiam r descripta area, si ab aliquo immobili distantia prima incipimus, crescit uti numerus elapsorum dierum a momento, quum terra erat in prima distantia, vel aliis verbis:

Areæ per distantias terræ a Sole descriptæ temporibus sunt pro-
portionales. —

Ad inveniendas rationes harum diversarum distantiarum inter se sit r' distantia in qua celeritas terræ suum medium valorem $dv' = \frac{dV + dv}{2} = 3553.''0$ habet, dein est: $R = r'\sqrt{\frac{dv'}{dV}}$ et $r = r'\sqrt{\frac{dv'}{dv}}$ vel si hæc distantia assumitur pro unitate erit

$$R = 0.9836, \quad r = 1.0172 \quad \text{et} \quad \frac{r-R}{2} = 0.0168$$

per quod maxima et minima distantia Solis in partibus ejus mediæ distantiæ data est. —

Si nunc quotidie longitudo Solis ejusque celeritas observatur, quod primum dat situm, et secundum magnitudinem distantiæ r, et si per extrema puncta omnium harum distantiarum ducitur linea curva, videmus, hanc lineam curvam non accurate esse circularem. Statim quilibet videbit similitudinem hujus lineæ cum ellipsi, et ex hac ratione fuit hæc linea comparata cum ellipsi, et dein ex inventa concordantia conclusum est:

Orbitam terræ esse ellipsin, in cujus foco centrum Solis est.

Ast duæ fundamentales leges motus, alia via etsi minus commoda sunt inventæ, cujus enunciatio autem pertinet ad historiam Astronomiæ. Tantummodo notare possumus, jam Astronomi prioribus temporibus potuissent hanc viam persequi, etiamsi tam imperfecta instrumenta habuerunt, si fecissent applicationem illius quod modo dictum est, ad lunam, apud quam mutationes diametri et celeritatis magis notabiliores sunt, quam apud Solem, ut videbimus inferius. — Si ergo notus est secundum præcedentia situs orbitæ terræ et forma lineæ curvæ in qua movetur, vel excentricitas ellipseos, quæ prius aequalis 0.0168 partibus mediæ distantiæ Solis a terra inventa est, facile, si unus locus Solis vel terræ in orbita pro aliquo tempore notus est, ejus locus pro quolibet alio tempore determinari poterit. — Ad hunc finem nobis imaginari volumus punctum quod uniformiter in circulo movetur; ejus

centrum est illud terræ et ejus radius est aliqua distantia Solis a terra v. c. minima harum distantiarum. Nominare volumus hoc punctum Solem medium. Quum Sol secundum observationes semper in iisdem intervallis ad punctum minimæ distantiæ reveniat, quæ periodus vocatur ejus <u>revolutio</u>, assumere volumus, medium Solem habere eandem revolutionem cum vero, et cum hoc simul exire ex illo puncto minimæ distantiæ. Quare ~~ergo~~ quum radius medii Solis uniformiter movetur circa terram radius veri Solis difformiter movetur, quum semper cum primo distantia sectores ellipticos describat, qui temporibus sunt proportionalis. Ambo radii interea nunquam a se invicem erunt admodum distantes, quia excentricitas ellipseos secundum priora respectu ejus semiaxis est parva. —

Simplex additio dabit pro quolibet tempore locum medii Solis, cujus motus tempori proportionalis est, et si huic loco medii Solis addatur angulus, quem ambo radii medii et veri Solis in centro terræ formant, habebimus locum veri Solis. Determinatio hujus anguli autem, est problema maximi momenti, de quo nunc agere volumus. —

Per T volumus designare revolutionem amborum Solium, et eam incipere volumus in ~~illo~~ puncto orbitæ, ubi celeritas Solis est maxima, vel ejus distantia a terra minima. Post aliquod tempus t dierum a transitu ~~utriusq~~ Solis per hoc punctum, angulus radii medii Solis cum primo radio erit æqualis $366\frac{t}{T} = m$. — Sit eadem ratione v angulus radii veri Solis tempore t cum primo radio et r distantia veri Solis in hoc tempore a centro terræ. Nominetur a media distantia seu semi axis major a Sole descriptæ ellipseos, uti et $a\varepsilon$ ejus excentricitas, deinde est, uti satis notum;

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} \quad \text{æquatio ellipseos}$$

Si autem $\frac{1}{2}f$ est area, quam radius r tempore t, $\frac{1}{2}F$ area, quam radius tempore T describit, hinc $\frac{1}{2}F$ tota area ellipseos, deinde habemus

habemus, quum secundum praecedentia hae areae se habeant uti tempora

$$T : t = \tfrac{1}{2}F : \tfrac{1}{2}f \text{ vel}$$

$$f = \frac{F}{T} \cdot t$$

Est autem $\tfrac{1}{2}F = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$, ubi π est ratio semi peripheriae ad radium circuli, hinc quoque

$$df = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}}{T} \cdot dt$$

et quum $df = r^2 dv$, erit, si hi ambo valores quantitatis df sibi aequales ponantur, et pro r prior valor, ubi pro dt suus valor $\frac{T}{2\pi} \cdot dm$ substituitur,

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1+\varepsilon \cos v)^2}$$

Ut autem haec expressio facilius integrari possit, ei possumus dare sequentem formam:

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{dv}{\left[(1+\varepsilon)\cos^2 \tfrac{1}{2}v + (1-\varepsilon)\sin^2 \tfrac{1}{2}v\right]^2}$$

$$= \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2 \cos^4 \tfrac{1}{2}v \left\{1 + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}v\right\}^2}$$

Ut quoque haec expressio simplicior evadat, fit

$\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}u = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}v$ dein est

$dm = du(1-\varepsilon \cos u)$ et integrale hujus aequationis est

$m = u - \varepsilon \sin u$, supposito t vel m simul cum u et v evanescere.

Inventa igitur quantitate m ex $m = 360 \frac{t}{T}$, quaeratur u ex aequatione $m = u - \varepsilon \sin u$ et v ex $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}u$ et tandem r ex $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos v}$, et per quantitates v, r, locus veri Solis erit determinatus, si situs puncti initialis quantitatum m, u, v ... datus est. Vocatur m media anomalia, u excentrica, et v vera anomalia, et r radius vector solis.

Easdem expressiones quoque alia via, immediate ex primis legibus motus derivare possumus.

Si situs terrae versus centrum Solis per coordinatas rectangulares x et y datus est, ubi x jacet in linea quae per puncta maximae et minimae celeritatis transit, dein est, si S designet

Data est formula $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dv}{(1+\varepsilon)^2\cos^4\frac{1}{2}v\left\{1+\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}v\right\}^2}$ et hinc deducenda est simplex formula $dm = du(1-\varepsilon\cos u)$ si ponatur $tg^2\frac{1}{2}u = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}v$

1° Differentiatur aequatio $tg^2\frac{1}{2}u = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}v$. Differentiale hujus aequationis est $tg\frac{1}{2}u\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}tg\frac{1}{2}v\frac{dv}{\cos^2\frac{1}{2}v}$ et inde $dv = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{\cos^2\frac{1}{2}v}{tg\frac{1}{2}v}\cdot tg\frac{1}{2}u\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{\cos^3\frac{1}{2}v}{\sin\frac{1}{2}v}\cdot tg\frac{1}{2}u\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}$

posito hoc valore in aequatione data erit $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot\frac{\cos^3\frac{1}{2}v}{\sin\frac{1}{2}v}\cdot tg\frac{1}{2}u\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{(1+\varepsilon)^2\cos^4\frac{1}{2}v\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2} =$

$= \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg\frac{1}{2}u\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{(1+\varepsilon)^2\cos\frac{1}{2}v\sin\frac{1}{2}v\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2}$.

Quum autem ex trigonometria scimus $\sin\frac{1}{2}v = \frac{tg\frac{1}{2}v}{\sqrt{1+tg^2\frac{1}{2}v}}$ et $\cos\frac{1}{2}v = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\frac{1}{2}v}}$ ergo $\cos\frac{1}{2}v\cdot\sin\frac{1}{2}v = \frac{tg\frac{1}{2}v}{1+tg^2\frac{1}{2}v}$ positis valoribus ex aequatione assumpta pro angulo auxiliario habebimus $\cos\frac{1}{2}v\sin\frac{1}{2}v = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot tg\frac{1}{2}u}{1+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u}$ ponatur hic valor in ultima aequatione pro $\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}$ habebimus

$$\frac{dm}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg\frac{1}{2}u\cdot\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{(1+\varepsilon)^2\frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot tg\frac{1}{2}u}{1+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u}\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u}\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2}$$

ergo $dm = \frac{\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\cdot\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}\cdot(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{(1+\varepsilon)^2}{1+\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}tg^2\frac{1}{2}u}\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2} = \frac{\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\cdot(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{\frac{(1+\varepsilon)^2}{\frac{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)tg^2\frac{1}{2}u}{(1-\varepsilon)}}\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2} = \frac{(1-\varepsilon)\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{\frac{1}{\frac{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)tg^2\frac{1}{2}u}{1-\varepsilon}}\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2} =$

$$= \frac{(1-\varepsilon)\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+(1+\varepsilon)tg^2\frac{1}{2}u}\left\{1+tg^2\frac{1}{2}u\right\}^2} = \frac{\frac{du}{\cos^2\frac{1}{2}u}\left(1-\varepsilon+tg^2\frac{1}{2}u+\varepsilon tg^2\frac{1}{2}u\right)}{\left(1+tg^2\frac{1}{2}u\right)^2} = \frac{du\left(1-\varepsilon+tg^2\frac{1}{2}u+\varepsilon tg^2\frac{1}{2}u\right)}{\cos^2\frac{1}{2}u\left(\frac{\cos^2\frac{1}{2}u+\sin^2\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right)^2} =$$

$$= \frac{du\left(1-\varepsilon+tg^2\frac{1}{2}u+\varepsilon tg^2\frac{1}{2}u\right)}{\cos^2\frac{1}{2}u\left(\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right)^2} = \cos^2\frac{1}{2}u\,du\left(1-\varepsilon+tg^2\frac{1}{2}u+\varepsilon tg^2\frac{1}{2}u\right) = du\left(\cos^2\frac{1}{2}u-\varepsilon\cos^2\frac{1}{2}u+\sin^2\frac{1}{2}u+\varepsilon\sin^2\frac{1}{2}u\right) =$$

$= du\left(1-\varepsilon\left(\cos^2\frac{1}{2}u-\sin^2\frac{1}{2}u\right)\right) = du(1-\varepsilon\cos u)$ ergo $dm = du(1-\varepsilon\cos u)$

designat vim Solis, et $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est distantia Solis a terra, $S\frac{x}{r}$ est haec vis parallela cum axi x, $S\frac{y}{r}$ eadem vis parallela cum axi y decomposita. Si dein designat dt constans elementum temporis, dein habemus pro motu terrae sequentes simplices aequationes:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + S\frac{x}{r} = 0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} + S\frac{y}{r} = 0$$

ex quibus aequationibus facile invenitur

$$\frac{dx^2+dy^2}{dt^2} = A - 2\int S dr \quad \text{et} \quad x dy - y dx = B dt$$ ubi A et B sunt constantes Integrationis. —

Ut his expressionibus simpliciorem demus formam, sit v angulus radii r cum axi x, dein est $x = r\cos v$ et $y = r\sin v$, per quae priores aequationes transeunt in sequentes:

$$\frac{r^2dv^2 + dr^2}{dt^2} = A - 2\int S dr \quad \text{et} \quad r^2 dv = B dt$$

et haec ultima expressio continet, uti quilibet videt, legem prius jam inventam, spatia a radio descripta esse temporibus proportionalia. —

Si ex his duabus aequationibus eliminatur quantitas dt, erit

$$\frac{B^2}{r^2} + \frac{B^2 dr^2}{r^4 dv^2} = A - 2\int S dr$$

et haec aequatio dabit vim S, si linea curva est nota, in qua terra movetur. Haec linea autem est secundum observationes ellipsis, in cujus foco centrum Solis est. Aequatio ellipseos autem est: $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v}$ hinc erit $\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos v}{a(1-\varepsilon^2)}$ et $\frac{dr}{r^2} = \frac{\varepsilon dv \sin v}{a(1-\varepsilon^2)}$ et $\frac{1}{r^2} = \frac{(1+\varepsilon\cos v)^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}$ et $\frac{dr^2}{dv^2 r^4} = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}$ praeterea $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{\varepsilon r}$

hinc $\frac{B^2(1+\varepsilon\cos v)^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2\varepsilon^2\sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = A - 2\int S dr$ vel

$$\frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{2B^2\varepsilon\cos v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2\varepsilon^2\cos^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2\varepsilon^2\sin^2 v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = A - 2\int S dr$$

$$\frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{2B^2\varepsilon\cos v}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{B^2\varepsilon^2}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} = A - 2\int S dr$$ et substituendo pro $\cos v$ suo valore et abbreviatione facta

$$\frac{2B^2}{ar(1-\varepsilon^2)} - \frac{B^2}{a^2(1-\varepsilon^2)} = A - 2\int S dr,$$

cujus differentiale est $S=\frac{B^2}{a(1-\varepsilon^2)}\cdot\frac{1}{r^2}=\frac{B^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}$ ubi $p=a(1-\varepsilon^2)$ est semiparameter ellipseos. Actio Solis igitur in aliquod circa illum motum corpus se habet inverse ubi quadratum distantiae Solis ab hoc corpore. Quantitas $\frac{B^2}{p}$ quam brevitatis causa μ^2 nominare volumus, est naturaliter intensitas vis in distantia $=1$. — Praeterea erat $r^2dv=Bdt$ vel $\int r^2dv=Bt$. Si autem $\frac{1}{2}f$ est area sectoris, dein est $f=\int r^2dv$, hinc $f=Bt$ vel $f=t\mu\sqrt{p}$. Ut ex hac expressione inveniatur μ, est pro terra, si semiaxis ejus orbitae assumitur pro unitate, area totius ellipseos $\frac{1}{2}F=\pi\sqrt{p}$, et secundum observationes ejus revolutio circa Solem $T=365.256384$, hinc

$$\mu=\frac{F}{T\sqrt{p}}=\frac{2\pi}{T}=0.0172021$$

et μ est distantia in radiis terrae a centro Solis, in quo ejus actio est aequalis unitati vel aequalis gravitati in superficie nostrae terrae. Haec distantia in radio terrae ipso expressa, erit igitur $\frac{\mu}{\sin\omega}$ ubi ω est parallaxis Solis. —

Si hac ratione vis seu actio data est, inverse etiam lineam curvam invenire possumus, quam corpus, in quod haec vis agit, describit. Si nimirum in aequationibus fundamentalibus pro S ejus valor $\frac{\mu^2}{r^2}$ substituitur, erit:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu^2x}{r^3}=0,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu^2y}{r^3}=0$$ ex quibus sequitur

$$\frac{dx\,d^2x}{dt^2}+\frac{\mu^2x\,dx}{r^3}=0,\qquad \frac{dy\,d^2y}{dt^2}+\frac{\mu^2y\,dy}{r^3}=0$$ vel

$$\frac{dx\,d^2x}{dt^2}+\frac{dy\,d^2y}{dt^2}+\frac{\mu^2}{r^3}(x\,dx+y\,dy)=0 \quad\text{vel}\quad \frac{dx^2+dy^2}{dt^2}-\frac{2\mu^2}{r}+\frac{\mu^2}{a}=0$$

$$x\,dy-y\,dx=\mu\,dt.\sqrt{p}$$ ubi a et p sunt constantes integrationis.

Si etiam hic ponitur $x=r\cos v$, $y=r\sin v$, priores aequationes transibunt in has: $\frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}-\frac{2\mu^2}{r}+\frac{\mu^2}{a}=0$, et $r^2dv=\mu\,dt\sqrt{p}$

Si ex his aequationibus eliminatur quantitas dt et ponitur simplicitatis causa $r=\frac{1}{z}$, erit: $dt=\frac{r^2dv}{\mu\sqrt{p}}$, $dt^2=\frac{r^4dv^2}{\mu^2p}$, $\frac{1}{r}=z$, $\frac{dr}{r^2}=dz$

ergo $\frac{\mu^2p(r^2dv^2+dr^2)}{r^4dv^2}-\frac{2\mu^2}{r}+\frac{\mu^2}{a}=0$, vel $\frac{\mu^2p}{r^2}+\frac{\mu^2p\,dr^2}{r^4dv^2}-\frac{2\mu^2}{r}+\frac{\mu^2}{a}=0$

vel

vel $\mu^2 pz^2 + \frac{\mu^2 p dz^2}{dv^2} - 2\mu^2 z + \frac{\mu^2}{a} = 0$ multiplicando per p

$$p^2z^2 + \frac{p^2dz^2}{dv^2} - 2pz + \frac{p}{a} = 0$$

$$dv^2\left(-p^2z^2 + 2pz - \frac{p}{a}\right) = p^2dz^2 \text{ ex quo}$$

$$dv = \frac{pdz}{\sqrt{1-\frac{p}{a}-(1-pz)^2}} \text{ vel } dv = \frac{\frac{pdz}{\sqrt{1-\frac{p}{a}}}}{\sqrt{1-\frac{(1-pz)^2}{1-\frac{p}{a}}}}$$

et Integrale $v = \text{Arc}\cos\frac{1-pz}{\sqrt{1-\frac{p}{a}}}$ et $\cos v = \frac{1-pz}{\sqrt{1-\frac{p}{a}}}$ ex quo

$$pz = 1 - \sqrt{1-\frac{p}{a}}\cos v$$

si $r = p$ pro $v = 90°$ est. Si nunc iterum ponitur $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}$ et $1 - \frac{p}{a} = \varepsilon^2$ erit $\frac{p}{r} = 1 - \varepsilon\cos v$ et $r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos v} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v}$ pro aequatione quaesita lineae curvae, quae ergo est sectio conica, cujus semiaxis major a, semiparameter p et excentricitas $a\varepsilon$ est. — Haec linea igitur est ellipsis, hyperbola aut parabola, si a est quantitas positiva, negativa aut imaginaria, vel etiam si ε minor, major, vel aequalis unitati est. —

Si ex aequationibus $\frac{dr^2+r^2dv^2}{dt^2}$ - - - - - - - - eliminetur dv erit

$$dt = \frac{\sqrt{\frac{a}{\mu^2}}\cdot rdr}{\sqrt{a^2\varepsilon^2-(a-r)^2}}$$

(Ad simplificationem hujus expressionis ponetur

$$r = a(1-\varepsilon\cos u) \text{ dein erit}$$

$$\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}}\cdot dt = (1-\varepsilon\cos u)du \text{ et Integrale}$$

$$\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}} t = u - \varepsilon\sin u \text{ si } u \text{ cum } t \text{ evanescit. —}$$

Haec ultima aequatio dat u, si t est notum, et ex hoc dein quantitas r ex $r = a(1-\varepsilon\cos u)$ et v ex $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{r\varepsilon}$. —

Si nunc comparantur ambo valores quantitatis r, erit

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} = a(1-\varepsilon\cos u) \text{ ex quo}$$

$$1-\varepsilon\cos u = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos v} \text{ vel } tg\tfrac{1}{2}v = tg\tfrac{1}{2}u\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

Sit nunc T revolutio alicujus planetae, et a semiaxis ejus orbitae, prior aequatio $\frac{\mu}{a^{\frac{3}{2}}}t = u - \varepsilon\sin u$ transibit in hanc simpliciorem

$T = \frac{2\pi . a^{\frac{3}{2}}}{\mu}$ vel $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu^2}$ (: $m = u - \varepsilon\sin u$:) ubi π est ratio periph.

peripheriæ ad diametrum circuli. Si negligitur massa planetarum respectu illius admodum majoris massæ Solis, μ est quantitas, quæ pro omnibus planetis et cometis nostri systematis solaris est constans, hinc sub hac suppositione, quadrata revolutionum se habent uti cubi axium majorum. —

Secundum observationes est:

pro terra $T = 365.256384$ et $a = 1$

pro Marte $T = 686.979579$ et $a = 1.523693$

Si hi valores Martis et terræ in ultima aequatione substituantur, erit:

$\log \frac{4\pi^2}{\mu^2} = 5.125195$ vel quum $\log 4\pi^2 = 1.596360$

$\log \mu = 8.235582$ et $\mu = 0.0172021$ uti prius. —

Est igitur pro omnibus corporibus nostri systematis

$$T^{dies} = (365.2564)a^{\frac{3}{2}}$$

Aequationes fundamentalis hujus disquisitionis supponunt, orbitam esse lineam curvam planam. Etsi hæc suppositio propter naturam rei concessa est, quamdiu tantummodo duo ad se invicem agentia corpora considerantur, tamen independenter ab illa suppositione hoc problema resolvere possumus. —

Si nimirum et tertia coordinata z respicitur, primæ fundamentalis leges motus dant sequentes aequationes:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \mu^2\frac{x}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \mu^2\frac{y}{r^3} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \mu^2\frac{z}{r^3} = 0 \end{aligned}\right\} \text{- - - - (A)}$$

Si prima multiplicetur per y secunda per x, earum differentia dat

$$\left.\begin{aligned} x\,dy - y\,dx &= c\,dt \\ x\,dz - z\,dx &= c'\,dt \\ y\,dz - z\,dy &= c''\,dt \end{aligned}\right\} \text{- - - (1)}$$

eadem ratione dant ceteræ

ubi c, c', c'' sunt constantes integrationis. —

Si priores aequationes respective multiplicantur per $2dx$, $2dy$, $2dz$, earum summa dat integrata, quum

$$\int \frac{xdx+ydy+zdz}{r^3} = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r} \text{ est,}$$

$$0 = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \frac{2\mu^2}{r} + \frac{\mu^2}{a} \quad \text{- - - - - -} (2)$$

ubi a est constans. —

Si autem eadem aequationes multiplicantur per x, y, z et si addatur summa horum trium productorum ad aequationem (2) et notatur, esse

$$dx^2+dy^2+dz^2+xd^2x+yd^2y+zd^2z = d^2\frac{(r^2)}{2} = dr^2+rd^2r \text{, erit}$$

$$0 = \frac{d^2(r^2)dx}{2dt^2} + \mu^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)dx$$

Si porro prima aequationum (A) per rdr multiplicatur, eique addatur haec ultima aequatio, erit

$$0 = \mu^2\left\{dx\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)+\frac{xdr}{r^2}\right\}+\frac{1}{2}d^2(r^2).\frac{dx}{dt^2}+\frac{rdr.d^2x}{dt^2}$$

~~ad at~~ cujus integrale

$$0 = f+\mu^2x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)+\frac{rdr.dx}{dt^2}$$

ubi f est quantitas constans.

Aequatio (2) autem dat $\mu^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right) = \frac{\mu^2}{r} - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ praeterea est $rdr.\frac{dx}{dt^2} = (xdx+ydy+zdz).\frac{dx}{dt^2}$ hinc ultima expressio transibit in

$$\left.\begin{aligned} 0 &= f+x\left(\frac{\mu^2}{r}-\frac{dy^2+dz^2}{dt^2}\right)+(ydy+zdz).\frac{dx}{dt^2} \\ 0 &= f'+y\left(\frac{\mu^2}{r}-\frac{dx^2+dz^2}{dt^2}\right)+(xdx+zdz)\frac{dy}{dt^2} \\ 0 &= f''+z\left(\frac{\mu^2}{r}-\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)+(xdx+ydy).\frac{dz}{dt^2} \end{aligned}\right\} \text{- - - -} (3)$$

et eadem ratione

Hae septem aequationes (1), (2), (3), continent septem quantitates constantes c, c', c'', f, f', f'' et a, quae autem ad quinque reduci possunt. —— Si nimirum prima aequationum (3) per $\frac{zdy-ydz}{dt}$ et secunda per $\frac{xdz-zdx}{dt}$ multiplicatur, eorum summa dabit

$$0 = \frac{fc'-f'c''}{c} + z\left(\frac{\mu^2}{r}-\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}\right)+\left(\frac{xdx+ydy}{dt^2}\right).dz$$

Si haec aequatio comparatur cum ultima aequationum (3) est

$$0 = fc''+f''c+f'c',$$

quae aequatio est prima aequatio conditionalis inter has constantes. Si brevitatis causa ponatur $f^2+f'^2+f''^2 = F^2$ et $c^2+c'^2+c''^2 = C^2$, dein dant aequationes (3) si elevantur ad quadratum et dein addantur:

$$F^2-\mu^4 = \left(\frac{2\mu^2}{r}-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right).\left(\frac{r^2dr^2}{dt^2}-\frac{r^2}{dt^2}(dx^2+dy^2+dz^2)\right) \text{- -} (a)$$

Si eadem ratione tractantur aequationes (1), erit

$$r^2\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)-\left(\frac{r\,dr}{dt}\right)^2=C^2 \text{ - - - - - - } (b)$$

hinc erit aequatio (a)

$$0=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-\frac{2\mu^2}{r}+\frac{\mu^4 \mathcal{F}^2}{C^2}$$

et haec comparata cum aequatione (2) dat

$$\frac{\mu^4 \mathcal{F}^2}{C^2}=\frac{\mu^2}{a}$$

quae aequatio est secunda aequatio conditionalis illarum constantium.

Si nunc multiplicantur aequationes (3) respective per x, y, z earum summa dat:

$$fx+f'y+f''z=\frac{r^2}{dt^2}(dx^2+dy^2+dz^2)-\frac{r^2dr^2}{dt^2}-\frac{\overset{*}{\mu}{}^2}{r}$$

quae cum (b) conjuncta dat

$$-\frac{\overset{*}{\mu}{}^2}{r}+C^2=fx+f'y+f''z \text{ - - - - } (c)$$

Praeterea multiplicentur aequationes (1) respective per $z, -y, x$, earum summa dabit

$$0=cx-c'y+c''z \text{ - - - - - - } (d)$$

et haec ultima aequatio, est aequatio plani, in quo corpus movetur. Si dein K est angulus, quem linea nodorum hujus plani in plano xy cum axi x format, et n inclinatio horum planorum, dein est (: Geom. analyt.)

$$tg\,K=\frac{c''}{c'} \text{ et } tg.\,n=\sqrt{\frac{c'^2+c''^2}{c^2}}.$$

Duae aequationes (c) et (d) dant eadem ratione

$$\frac{C^2}{\mu^2}-r=\frac{x}{\mu^2c}\{cf-c''f''\}+\frac{y}{\mu^2c}(cf'+c'f'')$$

et haec est generalis aequatio linearum secundi ordinis. Si nimirum p est semiparameter, ε ratio excentricitatis ad semiaxem majorem, et ψ distantia nodi a puncto P orbitae corporis, quod Soli est vicinissimum, dein est, si K et n suam priorem significationem retinent, generalis aequatio sectionum conicarum:

$$p-r=\varepsilon x\left\{\cos K\cos\psi+\frac{\sin K\sin\psi}{\cos n}\right\}+\varepsilon y\left\{\sin K\cos\psi-\frac{\cos K\sin\psi}{\cos n}\right\}$$

Si hae duae expressiones inter se comparantur, obtinetur

$$tg\,\psi=\left(\frac{fc''-f'c'}{fc'+f'c''}\right)(\cos n)^{-1}$$

Si dein φ est angulus lineae nodorum cum distantia puncti P a Sole ad planum xy projecta, est

$$tg\,\varphi=tg\,\psi\cos n$$

et si π est ad planum xy reducta longitudo puncti P, erit

$$tg\,\varphi = tg(k-\pi) \text{ ex quo sequitur } tg\,\pi = \frac{f'}{f}$$

Si aequatio (b) conjungitur cum aequatione (2) obtinetur

$$C^2 = r^2\mu^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) - \frac{r^2dr^2}{dt^2} \quad \text{------} (c)$$

Pro maximis et minimis valoribus quantitatis r est $dr=0$, hinc ultima aequatio $0 = r^2 - 2ar + \frac{aC^2}{\mu^2}$ et ex hac aequatione

$$r = a + \sqrt{a^2 - \frac{aC^2}{\mu^2}} \text{ vel } = a - \sqrt{a^2 - \frac{aC^2}{\mu^2}}$$

Hinc semiaxis major $\frac{r+r'}{2} = a$, excentricitas $\frac{r-r'}{2} = a\varepsilon = \sqrt{a^2 - \frac{aC^2}{\mu^2}}$ et semiparameter $p = \frac{C^2}{\mu^2}$ et $C^2 = a\mu^2(1-\varepsilon^2)$, ergo quoque aequatio (c)

$$dt = \frac{rdr}{\mu\sqrt{2r - \frac{r^2}{a} - a(1-\varepsilon^2)}}$$

Si assumitur ad faciliorem integrationem quantitas auxiliaris u ita, ut $\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u$ erit $dt = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\mu}(1-\varepsilon\cos u)du$, cujus integrale uti prius $\frac{\mu . t}{a^{\frac{3}{2}}} = u - \varepsilon\sin u$.

Ceteri Planetæ et omnes Cometæ in suis revolutionibus circa Solem, uti et Satellites in suis motibus circa suos primarios Planetas, præbent nobis similia phænomena, quæ igitur probabiliter iisdem legibus erunt subjecta quod et observationes comprobant. Planetæ et Cometæ igitur etiam moventur in ellipsibus, in quarum uno foco est Sol. Puncta in quibus orbita Planetæ planum eclipticæ secat, sunt *Nodi* orbitæ, et quidem *Ascendens* ☊, si planeta post transitum per hoc punctum se elevat supra eclipticam septemtrionem versus; alter oppositus est *Descendens* ☋, et hos Nodos conjungens linea recta, quæ per centrum Solis transit, vocatur *Linea Nodorum*. Angulus plani orbitæ cum plano eclipticæ, est *inclinatio orbitæ*. — Axis major ellipseos est linea *apsidum*, vel dupplex *media distantia* planetæ a Sole, et puncta extrema hujus lineæ sunt *Perihelium* quod Soli est vicinissimum, et *Aphelium*, quod maxime distat a Sole; ambo puncta simul vocantur *Apsides*. Distantia Perihelii a Solis centro, est *minima distantia*, et distantia cujuslibet alii puncti orbitæ a Solis centro est *Radius Vector* hujus puncti. Angulus ad centrum Solis inter nodum ascendentem et minimam distantiam est *distantia Perihelii a Nodo*, quæ longitudini nodi ascendentis addita, dat longitudinem Perihelii. —

Angulus ad Solis centrum inter nodum ascendentem et radium vectorem planetæ in quolibet puncto sue orbitæ, est argumentum latitudinis, quod longitudini nodi ascendentis additum dat longitudinem planetæ in orbita. Differentia argumenti latitudinis et projectionis hujus argumenti ad planum eclipticæ est reductio, quæ longitudini planetæ in orbita addita, dat reductam longitudinem planetæ in ecliptica. Tempus tandem, quo describit planeta unam circumferentiam, est ejus revolutio seu tempus periodicum, uti et locus, longitudo planetæ in sua orbita pro aliquo tempore vocatur Epocha planetæ. Si iterum nobis imaginamur in plano orbitæ circa centrum Solis circulum cum quocunque radio descriptum, in ejus peripheria punctum uniformiter movetur ita, ut ejus revolutio illi planetæ aequalis sit, et ut cum planeta simul per Perihelium et Aphelium transeat, hoc punctum vocatur medius planeta, angulus radii vectoris medii planetæ cum distantia minima, est anomalia medii seu media anomalia veri planetæ, uti et angulus radii vectoris planetæ veri cum minima distantia, vera anomalia. Differentia veræ et mediæ anomaliæ est aequatio orbitæ vel aequatio centri.

Ex his sequitur: si k est longitudo nodi ascendentis orbitæ planetæ, p longitudo perihelii, π elongatio perihelii a nodo, v vera anomalia, 8 argumentum latitudinis, l longitudo in orbita, l' reducta longitudo in ecliptica, et ς reductio, erit

$$p-k=\pi$$
$$8=v+\pi$$
$$8=v+p-k$$
$$l=8+k=v+p$$
$$l'=l+\varsigma$$

Si præterea nota est media anomalia m planetæ, quæ secundum priora semper facile inveniri potest, si epocha medii planetæ seu tempus transitus per perihelium et ejus revolutio notæ sunt, excentrica anomalia u, radius vector r et vera anomalia v planetæ obtinetur per expressiones

$$m = u - \varepsilon \sin u$$
$$tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \cdot tg\tfrac{1}{2}u$$
$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} \text{ vel } r = a(1-\varepsilon\cos u).$$

ubi a est semiaxis orbitae, et $a\varepsilon$ ejus excentricitas.

Si nobis cogitamus nunc a planeta perpendiculum ad axim majorem orbitae, pars axis majoris inter hoc perpendiculum et centrum ellipsos est $x = r\cos v + a\varepsilon$ vel quum $r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v}$ est $x = \frac{a-r}{\varepsilon}$.

Si autem nobis imaginamur circulum cujus centrum est illud ellipsos, et cujus diameter est axis major ellipsos, istud perpendiculum prolongatum peripheriam hujus circuli secabit in puncto, cujus distantia a centro ellipsos cum axi majori format angulum φ ita, ut sit $\cos\varphi = \frac{x}{a}$, vel si prior valor quantitatis x substituitur, ut $r = a(1-\varepsilon\cos\varphi)$. — Hinc hic angulus φ aequatur u, h.e. anomaliae excentricae.

Nunc videbimus, quomodo inveniri possit pro quolibet tempore media longitudo L et media anomalia planetarum.

Si L est media longitudo, et m media anomalia, erit $p = L - m$ longitudo perihelii pro dato tempore d. Quaeratur media longitudo L' et media anomalia m' pro quolibet alio tempore d'.

Si T est tempus periodicum planetae in diebus ejusque partibus expressum, $\frac{360}{T} = dL$ est ejus motus diurnus in media longitudine.

Assumamus deinde, etiam axim majorem esse mobilem et dp designare diurnum augmentum longitudinis perihelii. Si $d'-d$ sit intervallum temporis est expressum quoque in diebus, erit

$$L' = L + (d'-d)dL \text{ et}$$
$$p' = p + (d'-d)dp$$

Sed $L = p+m$ et $L' = p'+m'$ ergo

$$m' = m + (d'-d)dL - (d'-d)dp \text{ vel}$$
$$m' = m + (d'-d)(dL - dp)$$

Sic est pro Saturno 1808 December. 31. $0^h\ 0'\ 0''$ Paris. tempore

$L = 233°\ 11'\ 42''.4$
$m = 143\ \ 57\ \ 37.4$ ergo
$p = 89\ \ 14\ \ 5.0$

Si nunc quaeratur L' et m' pro 1809 Mart. 18 $3^h\ 24'\ 58''$, intervallum temporis est $77^{dies}\ 3^h\ 24'\ 58''$ vel $d'-d = 77.142338$ dies. — Motus diurnus in longitudine media est $dL = 120''.5917868$ et motus diurnus longitudinis perihelii $dp = 0''.1688$

hinc

hinc est

$$L' = 233^\circ\ 11'\ 42''.4 + 9302''.7 = 235^\circ\ 46'\ 45''.1$$
$$m' = 143^\circ\ 57'\ 37''.4 + 9302''.7 - 13''.0 = 146^\circ\ 32'\ 27''.1$$

Hi medii motus diurni dL et dp referuntur ad punctum, a quo omnes longitudines numerantur, h.e. ad punctum aequinoctii verni. Quum autem hoc punctum ipsum propter praecessionem sit in motu, quantitas dL etiam non exprimit proprie diurnum motum planetae qui debet respectu alicujus fixi puncti sumi. Revolutio alicujus planetae respectu talis puncti fixi s.c. respectu stellarum fixarum, vel propria vera revolutio planetae, vocatur ejus siderea revolutio; nos eam volumus designare per S. Prius considerata revolutio T respectu aequinoctii, vocatur ejus tropica seu periodica revolutio; et si una harum quantitatum est data, facile altera inveniri potest. —

Si generatim A revolutio alicujus planetae respectu alicujus puncti, hinc est $\frac{360}{A}$ diurnus motus respectu hujus puncti. — Sit porro tertia m motus diurnus secundi alicujus puncti respectu primi hinc $\frac{360}{A} - m$ motus diurnus planetae respectu hujus secundi puncti, ergo revolutio B planetae respectu hujus secundi puncti

$$B = \frac{360}{\frac{360}{A} - m} \quad \text{vel} \quad B = \frac{360}{360 - Am} \cdot A \quad \text{et} \quad A = \frac{360}{360 + mB} \cdot B \quad \text{vel}$$

$$B = \frac{360 + Bm}{360} \cdot A \quad \text{et} \quad A = \frac{360 - mA}{360} \cdot B$$

Si punctum secundum respectu planetae retrograditur, m est quantitas negativa. —

Ad calculum magis commodum sit $a = \frac{360}{A}$ motus diurnus planetae, uti prius m diurnus motus puncti et $b = \frac{360}{B}$, dein est

$$B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = A\left(1 + \frac{m}{a} + \frac{m^2}{a^2} + \frac{m^3}{a} + \ldots\right)$$
$$A = \frac{B}{1 + \frac{m}{b}} = B\left(1 - \frac{m}{b} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{m^3}{b^3} + \ldots\right)$$

Sic est pro Marte siderea revolutio $A = 686.979579$ dies

diurna praecessio autem $\frac{50''.35}{(365)(3600)} = 0.000038318 = -m$

hinc tropica revolutio

$$\begin{aligned} B =\ & 686.979579 \\ -\ & 0.050232 \\ +\ & 0.000004 \\ B =\ & 686.929351 \end{aligned}$$

Pro Luna terrae nostrae est siderea revolutio $A = 27.321661$

Motus diurnus aequinoctiorum $m = -0.000038318$

$\log a = \log \frac{360}{A} = 1.1197955$, $\log \frac{m}{a} = 4.4636673n$ hinc tropica revolutio $B = \frac{A}{1 - \frac{m}{a}} = 27.321582$. — Si tropica revolutio est data $A = 27.321582$ et quaeritur revolutio B respectu nodorum orbitae

orbitæ Lunæ, diurnus motus tropicus horum nodorum est
$m = -3' \, 10''.64 = -0^\circ.052955$, ergo $\log a = \log \frac{360}{A} = 1.1197966$
$\log \frac{m}{a} = 7.60411044$ et $B = \frac{A}{1-\frac{m}{a}} = 27.2122189.$
Si tropica revolutio $A = 27.321582$ est data et quæratur revolutio
B respectu Solis h. e. tempus inter duas subsequentes conjunctiones
vel inter duas subsequentes oppositiones medii Solis et medii Lunæ,
quod tempus vocatur Synodica revolutio, diurnus motus tropicus
Solis est $m = 59' \, 8''.33 = 0^\circ.98565$, hinc $\log \frac{m}{a} = 8.87392261$ et $B = 29.53059.$

Ut autem medias longitudines et anomalias commode pro quolibet
tempore invenire possint, medii motus sunt reducti in tabulas, quarum
constructio sequentibus innititur:
Epocha cujuslibet anni est media longitudo pro meridie medio primi
Januarii ejusdem anni, si hic annus est intercalaris, et pro meridie
medio 31 Decembris præcedentis anni si præsens annus est communis.
Reditus medii Solis ad idem æquinoctium vel idem solstitium dat
secundum præcedentia revolutionem tropicam Solis vel annum
civilem, qui est in usu in nostris officiis. Hic annus habet

365.2422542 dies

Si assumeremus longitudinem anni civilis majoris simplicitatis causa in numero rotundo æqualem 365 diebus, initium
hujus anni tropico semper præcederet, et successu temporis percurrerit omnes aetates anni, et festa uti et labores agriculturæ
non amplius essent ad determinatas aetates constructi. Hoc incommodum tollere possemus, si initium anni qua phænomenon
astronomicum consideraretur, et v.c. in vicinissimum meridiem
vel ante vel post æquinoctium poneretur. Sed hac ratione anni
non facile in dies distribui possunt, initium anni quoad diversas nationes mutaretur, quum quilibet hoc initium determinaret secundum Meridianum suorum maxime notabilium
locorum. Excogitarunt igitur medium ad tollenda omnia
ista incommoda, quod consistit in sic dictis intercalationibus.

Anno 1582 post Christum nunc usitata reformatio Calendarii
est suscepta. Ante hunc annum sine exceptione, omnes per 4
sine residuo divisibiles anni, sunt anni intercalares 366 dierum,
ceteri autem anni communes 365 dierum. Anno 1582 omissi

sunt

sunt 10 dies, quum post 4 Octobr. statim 15 numeraretur. —
Post annum 1582 iterum omnes anni per 4 divisibiles sunt anni intercalares; omnes autem seculares anni, uti 1700, 1800, 1900 sunt anni communes exceptis illis annis qui sunt divisibiles per 400 uti 2000, 2400 etc qui iterum sunt bissextiles. Per hanc constructionem magnitudo cujuslibet anni civilis post 1582 reducta est ad $365\frac{97}{400} = 365.2425$ dies, vel, annus communis tantummodo 0.0002458 diebus major est quam annus tropicus. Si praeterea semper post 4000 annos dies unus supprimeretur, hac ratione reduceretur annus ad $365\frac{969}{4000} = 365.24225$ quod tantum 0.0000042 diebus h.e. 0". 36288 minus esset. —
Secundum haec praemissa, epochae omnium annorum secularium inveniri possunt, si epocha unius est nota. —
Si v.c. epocha 1800 vel e^{1800} data est, si a est tropicus diurnus motus, erit

$$e^{1900} = e^{1800} + 36524a \quad \text{vel inverse} \quad e^{1700} = e^{1800} - 36524a$$
$$e^{2000} = e^{1900} + 36525a \qquad\qquad e^{1600} = e^{1700} - 36525a$$
$$e^{2100} = e^{2000} + 36524a \qquad\qquad e^{1500} = e^{1600} - 36524a$$

ex quo dein epochae omnium annorum inter hos annos secu- lares inveniri poterunt, v.c.

$$e^{1743} = e^{1700} + 43(365a) + 10a \quad \text{quia} \quad \frac{43}{4} = 10 + \omega$$
$$e^{1876} = e^{1800} + 76(365a) + 19a \quad \text{quia} \quad \frac{76}{4} = 19 \text{ —}$$

Si dein A est epocha alicujus anni communis, epocha 0 Januarii (31 Decembr. anni praecedentis), est $= A + 0a$ eadem ratione est epocha 0 Februarii (31 Jan.) $= A + 31a$
0 Martii (28 Febr.) $= A + 59a$
0 Aprilis (31 Mart.) $= A + 90a$

etc

et si quaelibet harum epocharum mensualium vocetur B, dein est epocha 1. 2. 3. .... n diei cujuslibet mensis aequalis

$$B + a, \quad B + 2a, \quad B + 3a \;\ldots\ldots\; B + na$$

Sic sunt epochae 5 Januar. 13 Julii, 27 Novembr. aequalis. B+5a, B+104a, B+331a etc Si autem annus est bissextilis, epocha primi Januarii est A−a vel, epochae dierum primorum duorum mensium sunt in hoc anno uno a minores, quam in communi anno, et quum fine Februarii annus bissextilis unum diem plus habet, ista differentia inter annum communem et bissextilem se tollit, vel epochae in decem ultimis mensibus an-

amborum annorum sunt eædem. ——

Secundum novissimas tabulas solares celeb. lib. Bar. de Zach epocha mediæ longitudinis Solis pro 1800 meridie vero Seebergi est 279° 52' 36".58 et motus in centum annis qui continent 25 annos bissextiles est 100.360°+0° 45' 48".00 hinc in uno

anno	359°	45'	40".40	in uno die	0°	59'	8".33
2 annis	359	31	20.81	una hora	0	2	27.85
3 annis	359	17	1.21	uno minuto prim.	0	0	2.46
etc				— — — secun.	0	0	0.04

epocha anni 1790 — — 280° 24' 16"
1795 280 5 6
1810 279 27 37

et epocha 0 Februarii in anno bissextili 29° 34' 10" in anno communi 30° 33' 18"
0 Martii in ambobus annis 58 9 11
0 Aprilis — — — — — 88 42 30 etc

ex quo si præcedentia continuantur, tota tabula motus medii Solis construi potest, quæ ergo ex quatuor partibus constabit, quarum prima est epocha annorum, secunda mensium, tertia dierum mensium, tandem quarta, motus pro horis minutis primis et secundis. Subsidio hujus tabulæ, quam facillime media longitudo Solis pro quocunque tempore determinari poterit. —

Si quæratur v. c. media longitud. Solis pro a. 1795. 14 Aprilis 5h 48' 12" med. temp. Seebergi

I Tabula dat	1795	280°	5'	6"
II — — —	0 Aprilis	88	42	30
III — — —	14 Aprilis	13	47	57
IV — — —	5h 48' 12"		14	18
media longitudo =		22°	49'	51

Vide Tabulæ motuum Solis a B. Zach, Gothæ 1792

Determinatio mediarum longitudinum igitur uti vidimus multis difficultatibus est subjecta. Ad derivationem autem verarum longitudinum et distantiarum Planetarum a Sole adhiberi debent prius datæ expressiones. Ad calculum autem his expressionibus commodiores formas dare possumus, quarum notabiliores hic adferemus. Si brevitatis causa ponitur e = Sin φ, obtinemus:

1. $m = u - \varepsilon \sin u$ vel proprie $m = \text{~~X~~}'' u - \frac{\varepsilon}{\sin 1''} \sin u$

2. $r = a(1-\varepsilon\cos u) = \frac{a\cos^2\varphi}{1+\varepsilon\cos v} = a\cos\varphi \cdot \frac{\sin u}{\sin v}$

3. $\cos u = \frac{\varepsilon + \cos v}{1+\varepsilon\cos v} = \frac{a-r}{a\varepsilon}$

4. $\cos v = \frac{\cos u - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos u} = \frac{a}{r}(\cos u - \varepsilon) = \frac{a\cos^2\varphi - r}{r\varepsilon}$

5. $tg\frac{u}{2} = tg\frac{v}{2}\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} = tg\frac{v}{2} \cdot tg\frac{90-\varphi}{2}$

6. $\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\cos\frac{90-\varphi}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{v}{2}}$ vel $\frac{\sin\frac{u}{2}}{\sin\frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{r}{a(1+\varepsilon)}}$

7. $\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}\sin\frac{90-\varphi}{2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}\cos\frac{u}{2}}{\cos\frac{v}{2}}$ vel $\frac{\cos\frac{u}{2}}{\cos\frac{v}{2}} = \sqrt{\frac{r}{a(1-\varepsilon)}}$

8. $\sin\frac{v-u}{2} = \sin u \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sin v \sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$

9. $\sin\frac{v+u}{2} = \sin u \cos\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} = \frac{\sin v \cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi} \cdot \sqrt{\frac{r}{a}}$

Si in his expressionibus quantitates m, u, v, r ponuntur variabiles, erit:

$$du = \frac{a}{r}dm = \frac{r\,dv}{a\cos\varphi} = \frac{dr}{a\sin\varphi\sin u}$$
$$dv = \frac{a}{r}du\cos\varphi = \frac{a^2}{r^2}dm\cos\varphi = \frac{a\,dr\cos^2\varphi}{r^2\sin\varphi\sin v}$$
$$dr = a\,dm\,tg\varphi\sin v = a\,du\sin\varphi\sin u = \frac{r^2dv}{a\cos^2\varphi}\sin\varphi\sin v$$

Si autem quoq. ad variationem quantitatis ε respicitur dat aequatio (5) $\frac{du}{\sin u} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ et eadem ratione aequatio (1) dat $dm = (1-\varepsilon\cos u)du - \sin u\cos\varphi\,d\varphi$.

eliminando ex his duabus aequationibus quantitatem du erit:
$$dm = \frac{r^2dv}{a^2\cos\varphi} - \frac{r(a+r-a\varepsilon^2)}{a^2\cos^2\varphi}\sin v\,d\varphi.$$ et eadem ratione
$$dv = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi\,dm + \frac{(2+\varepsilon\cos v)}{\cos\varphi}\sin v\,d\varphi$$
$$dr = \frac{r}{a}da + a\,tg\varphi\sin v\,dm - a\cos\varphi\cos v.d\varphi.$$

Ex adductis aequationibus sequuntur resolutiones plurium problematum.

I, Si v et ε sunt data, inveniuntur u ex (5) vel (8) et m ex (1)

II, Si ε et u sunt data inveniuntur v ex (5) et r ex (2) vel ex (1), et v ex (8) vel ex (9)

III, Si ε et m sunt data, inveniuntur u e (1) r ex (2) et v ex (4) vel (5) vel alio modo.

Ultimum problema est pro nobis maximi momenti, quum revera solent quantitates ε et m esse datae. – Resolutio hujus problematis

problematis exigit resolutionem aequationis

$$m = u - e \sin u$$

respectu quantitatis incognitae u. Quum saepius occurrunt aequationes hujus generis, hic locus erit evolvendi methodum generalem illam resolvendi.

Sit $X=0$ aliqua functio quantitatis x. Quaeratur x. Si jam inventum est $\xi = x+\lambda$, ubi λ jam est quantitas parva, assumere possumus $X - m\lambda = 0$, ubi m est quantitas constans. Assumtum est v.c. $\xi = a$, et $\xi' = a'$, et hac ratione inventum $X = \alpha$ et $X = \alpha'$, dum sunt a et a' hypotheses α et α' errores harum hypothesium. Si isti errores sunt parvi, assumere licet $\alpha = m(a-x)$, $\alpha' = m(a'-x)$, hinc est $x = \frac{\alpha a' - \alpha' a}{\alpha - \alpha'}$ vel $x=$ $x = a - \frac{\alpha(a-a')}{\alpha-\alpha'} = a' - \frac{\alpha'(a-a')}{\alpha-\alpha'}$, et x ita inventum, non multum a veritate differt, si errores α et α' jam sunt parvi. Eandem operationem cum approximatis valoribus quantitatum a et a' saepius repetere et eo magis et celerius veritati appropinquare possumus, quo accuratiores valores quantitatum a et a' jam primario sunt assumti. —

Sit v.c. data aequatio $\frac{h^x - 1}{x} = 3.828$, ubi log. natur $h = 1$, hinc est

$0.434294448x - \text{log vulg.}(3.828+1) = y = 0$

$x = 2.2$ dat $y = -0.01868 = \alpha$

$x = 2.3$ $y = +0.00744 = \alpha'$

et ex his duobus erroribus α et α' invenitur correctum

$x = 2.2715$ et hoc dat $y = -0.0000615 = \alpha''$

Errores α' et α'' dant $x = 2.2717337$ et hoc dat $y = -0.0000001$,

hinc assumere possumus pro vero valore $x = 2.2717337$. —

Eadem methodus etiam applicari potest ad plures quantitates incognitas. Sit $X=0$ functio quantitatum x et y et

$Y=0$ etiam functio x, y

Si inventum esset $\xi = x+\lambda$ et $v = y+\mu$, assumere possumus, si λ et μ sunt quantitates parvae, $X - m\lambda - n\mu = 0$ $Y - p\lambda - q\mu = 0$

Si v.c. assumtum est $\xi = a = a' = a''$ et $v = b = b' = b''$ et hoc modo inventum $X = \alpha = \alpha' = \alpha''$ et $Y = \beta = \beta' = \beta''$ dum sunt a, a' a'' et b, b' b'' hypotheses, $\alpha, \alpha', \alpha''$ - β, β', β'' earum errores, hinc erit

$$\alpha = m(a-x)+n(b-y) \quad \text{et} \quad \beta = p(a-x)+q(b-y)$$
$$\alpha' = m(a'-x)+n(b'-y) \qquad \beta' = p(a'-x)+q(b'-y)$$
$$\alpha'' = m(a''-x)+n(b''-y) \qquad \beta'' = p(a''-x)+q(b''-y)$$

et quibus inveniuntur

$$x = a + \tfrac{\gamma}{\varepsilon}(a'-a) + \tfrac{\delta}{\varepsilon}(a''-a)$$
$$y = b + \tfrac{\gamma}{\varepsilon}(b'-b) + \tfrac{\delta}{\varepsilon}(b''-b)$$

proposito $\gamma = \alpha''\beta - \alpha\beta''$ $\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$, $\varepsilon = \gamma + \delta + \alpha'\beta'' - \alpha''\beta'$

Ad easdem expressiones quoq alia notatu digna via venire possumus. Si nimirum est $y = f(x)$ et pro x ponatur quantitas $x+\omega = a$, y transit in sequentem notam expressionem

$$Y = y + \omega\frac{dfy}{dx} + \frac{\omega^2}{1.2}\frac{d^2fy}{dx^2} + \frac{\omega^3}{1.2.3}\frac{d^3fy}{dx^3} + \text{etc}$$

Si eadem ratione ponitur pro x quantitas $x+\omega' = a'$, erit

$$Y' = y + \omega'\frac{dfy}{dx} + \frac{\omega'^2}{1.2}\frac{d^2fy}{dx^2} + \frac{\omega'^3}{1.2.3}\frac{d^3fy}{dx^3} + \text{etc}$$

Si tantummodo prima membra respiciuntur, est

$$Y - y = \omega\frac{dfy}{dx} \qquad Y' - y = \omega'\frac{dfy}{dx}$$

Sunt autem $Y - y = \alpha$, $Y' - y = \alpha'$ errores hypothesium, qui sunt orti ex suppositione quantitatum a, a' pro x, ergo est, si priores aequationes una per alteram dividuntur, $\alpha\omega' = \alpha'\omega$.
Praeterea est $\omega' - \omega = (x + a' - x) - (a - x)$ vel $\omega' - \omega = a' - a$ et hinc praecedens aequatio $\omega = \alpha.\frac{(a'-a)}{\alpha'-\alpha}$, $\omega' = \alpha'.\frac{a'-a}{\alpha'-\alpha}$ vel etiam $x = a - \omega = a' - \omega' = \frac{a\alpha' - \alpha a'}{\alpha' - \alpha}$ quod est prior expressio.
Haec ultima solutio hujus problematis simul ostendit, cur haec methodus in omnibus casibus ubi x tantummodo primam potentiam continet, statim quaesitum valorem dat, quia pro talibus aequationibus praecedentes suppositiones $d^2fx = 0$, $d^3fx = 0$ revera locum habent. Si autem hae non habent locum, dein enucleata methodus tantummodo in eo casu resultatum dabit veritati quam maxime correspondens, si ω, ω' jam sunt parvae, quia tantum in hoc casu quantitates omissae $\omega^2 d^2fy$ etc fere aequales zero assumi possunt.
Si autem prima hypothesis, adhuc multum divergit a veritate h.e. si ω. ω' habent adhuc notabiles valores, tamen eadem methodus per repetitionem suppeditabit semper majorem approximationem ad veritatem.
Adferam adhuc breviter methodum celeb. Gauss (Theoria motus p. 11)

Supponamus e esse approximatum valorem ipsius quantitatis u atque x correctionem illi adhuc adjiciendam, ita ut valor $u = e+x$ aequationi exacte satisfaciat. Computetur $\varepsilon \operatorname{Sin} e$ in secundis per logarithmos, quod dum perficitur, simul ex tabulis notetur variatio ipsius log. Sin e pro 1'' variatione ipsius e atque variatio log. $\varepsilon \operatorname{Sin} e$ pro variatione unius unitatis in numero $\varepsilon \operatorname{Sin} e$: Sint hae variationes sine respectu signorum λ et μ. Quodsi jam e ad verum ipsius u valorem tam prope jam accedit, ut variationes logarithmi Sinus ab e usque ad $e+x$ variationesque logarithmi numeri ab $\varepsilon \operatorname{Sin} e$ usque ad $\varepsilon \operatorname{Sin}(e+x)$ pro uniformibus habere liceat, manifesto statui poterit $\varepsilon \operatorname{Sin}(e+x) = \varepsilon \operatorname{Sin} e \pm \frac{\lambda x}{\mu}$ signo superiori pro quadrante primo et quarto, inferiori pro secundo et tertio valente. Quare quum sit $e+x = m+\varepsilon \operatorname{Sin}(e+x)$ fit $x = \frac{\mu}{\mu\mp\lambda}(m+\varepsilon \operatorname{Sin} e - e)$, valorque verus ipsius u sive $e+x = m+\varepsilon \operatorname{Sin} e \pm \frac{\lambda}{\mu\mp\lambda}(m+\varepsilon \operatorname{Sin} e - e)$ signis ea qua diximus ratione determinatis. Ceterum facile perspicitur, esse sine respectu signi $\mu : \lambda = 1 : \varepsilon \operatorname{Cos} e$ adeoque semper $\mu > \lambda$, unde concluditur, in quadrante primo et ultimo $m+\varepsilon \operatorname{Sin} e$ jacere inter e et $e+x$, in secundo et tertio vero $e+x$ inter e et $m+\varepsilon \operatorname{Sin} e$.

Si valor suppositus e nimis adhuc a vero aberraverat, quam ut suppositionem supra traditam pro satis exacta habere liceat, certe per hanc methodum invenietur valor multo propior, quo eadem operatio iterum adhuc, pluriesve si opus videtur, repetenda erit. —

Nullo vero negotio patet, si differentia valoris primi e a vero tanquam quantitas ordinis primi spectetur, errorem valoris novi ad ordinem secundum referendum fore, et per operationem iteratam ad ordinem quartum, octavum etc deprimi. Quo minor insuper fuerit excentricitas, eo velocius correctiones successivae convergent. Valor approximatus ipsius u, a quo calculus incipi possit, plerumque satis obvius erit, praesertim ubi problema pro pluribus valoribus ipsius u solvendum est, e quibus quidam jam absoluti sunt. Deficientibus omnibus aliis subsidiis id saltem constat, quod u inter limites m et $m \pm e$ jacere debet

(: excentricitate ε in secundis expressa, signoq. superiori in quadrante primo et secundo, inferiori in tertio et quarto accepto:); quocirca pro valore initiali ipsius u vel m vel valor secundum aestimationem qualemcunq. auctus seu diminutus adoptari poterit. Vix opus est monere, calculum primum, quoties a valore parum accurato inchoatur, nulla praecisione haud indigere tabulasq. minores, quales celeb. Lalande curavit, abunde sufficere. Praeterea, ut calculi commoditati consulatur, tales semper valores pro ε eligentur, quorum sinus e tabulis ipsis absque interpolatione excerpere licet. —

Omnes hae solutiones supponunt, ε esse respectu unitatis admodum parvum. Si autem ε fere aequalis est unitati, priores methodi non tantum modo evadunt molestae, sed et incertae, quum parvus error in reputatis v et r jam magnas differentias producere possit. Si autem ε fere aequalis est unitati, dein orbita planetae fere est parabola, et quum fere omnes cometae moventur in tam excentricis ellipsibus, ut ad simplificationem calculi ejus orbitarum saltem in vicinia perihelii, ubi solent esse nobis visibiles, eas qua parabolas assumere possimus, volumus motum in parabola simili disquisitioni subjicere. —

Si uti prius, a. $a\varepsilon$. q est semiaxis major, excentricitas, et distantia perihelii a vicinissimo foco, et si sumantur abscissae x a perihelio in axi majori, et ordinatae y ad illas perpendiculares, dein est aequatio ellipsis $y^2 = q(1+\varepsilon)x.(2-\frac{x}{a})$

Aequatio parabolae autem, cujus distantia foci a vertice etiam q est, inter similes coordinatas est $y^2 = 4qx$

ex quo videmus, ellipsin semper eo magis appropinquare ad parabolam, quo major est axis major, si quantitas q eadem manet, et hanc concordantiam in punctis perihelio vicinissimis esse maximam. —

Si in parabola sumuntur abscissae x in axi majori a foco, erit ejus aequatio $y^2 = 4q(x+q)$, et si etiam hic per. r, v radium vectorem vel distantiam cometae a foco, et veram anomaliam vel angulum inter r et q designamus, est $y = r\sin v$. $x = r\cos v$ et probe aequatio transit in sequentem $r = \frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}$

Si

Si igitur est $\frac{1}{2}f$ area sectoris parabolici inter q et r, erit

$$\frac{1}{2}f = \frac{1}{2}\int r^2 dv = q^2\int(1+tg^2\tfrac{v}{2})\,d.tg\tfrac{v}{2} = q^2(tg\tfrac{v}{2}+\tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{v}{2})$$

Si autem t est tempus (in diebus expressum) a transitu cometae per suum perihelium, dein est secundum priora $f=\mu t.\sqrt{p}$ ubi $\mu = 0.017202$ et $p = 2q$ semiparameter parabolae.

Hinc substituto valore $f = \mu t \sin 1''\sqrt{2q}$ in priori aequatione erit $75tg\frac{v}{2}+25tg^3\frac{v}{2} = \frac{75\,\mu t \sin 1''}{2^{\frac{1}{2}}.\,q^{\frac{3}{2}}} = 0.9122791.\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ - - - - (I) multiplicando per 75

et nominetur $\frac{75\,\mu \sin 1''}{2^{\frac{1}{2}}.\,q^{\frac{3}{2}}} = \frac{0.9122791}{q^{\frac{3}{2}}}$ medius diurnus motus uti et $0.9122791.\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ medius motus cometae tempore t. Cometa igitur, qui se movet in parabola, in qua q est unitas, quotidie describit 0.9122791 in suo motu medio, et veram anomaliam $v=90°$ in $\frac{100}{0.9122791} = 109.615528$ diebus. (Vid. Delambre liv. 33 p. 8)

1. Per aequationem (I) invenitur, si distantia q et tempus $\mathfrak{T}$ transitus per perihelium data sunt, pro quolibet alio tempore $\mathfrak{T}'$ vera anomalia v, si ponitur $\mathfrak{T}-\mathfrak{T}'=t$, et radius vector per aequationem $r=\frac{q}{\cos^2\frac{v}{2}}$, eadem ratione invenitur tempus $\mathfrak{T}$ perihelii, si q et v vel si q et r sunt datae.

Ad faciliorem resolutionem hujus problematis, servit nota tabula Barkeriana quae etiam occurrit apud tractatum celeb. Olbers de methodo facillima orbitam cometae computandi, et quae continet quantitatem a quae ex aequatione $a = 75\,tg\frac{b}{2}+25\,tg^3\frac{b}{2}$ cum argumento b invenitur. Assumamus $q=\frac{1}{2}\mu\sin 1''$ dein est aequatio (I)

$$t=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{g\sqrt{2}}\left(tg\tfrac{v}{2}+\tfrac{1}{3}tg^3\tfrac{v}{2}\right) \quad \text{ubi } \frac{1}{g}=116.26488.$$

2. Sector parabolicus ad quem vera anomalia pertinet est $s=\frac{1}{2}\int r^2dv = 2\int\frac{q^2dv}{(1+\cos v)^2}$ et ellipticus sector, ad quem vera anomalia $v+\Delta$ pertinet, est $s'=\frac{1}{2}\int r^2d(v+\Delta)=\frac{1}{2}\int\frac{p^2d(v+\Delta)}{(1+\varepsilon\cos(v+\Delta))^2}$ ubi $p=q(1+\varepsilon)$ est semiparameter. Quum autem, uti vidimus, pro aequalibus temporibus areae sectorum se habent uti radices quadraticae ex parametris, erit $\frac{s}{s'}=\frac{\sqrt{2q}}{\sqrt{p}}$ vel $\int\frac{(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}d(v+\Delta)}{(1+\varepsilon\cos(v+\Delta))^2\sqrt{2}} = 2\int\frac{dv}{(1+\cos v)^2}$

cujus

cujus aequationis integrale est

$$\left(\frac{2}{2-\alpha}\right)^2\left\{t+\frac{1}{3}\cdot\frac{2-3\alpha}{2-\alpha}t^3-\frac{\alpha}{5}\cdot\frac{4-5\alpha}{(2-\alpha)^2}t^5+\frac{\alpha^2}{7}\cdot\frac{6-7\alpha}{(2-\alpha)^3}t^7-\ldots\right\}=\vartheta+\frac{1}{3}\vartheta^3$$

ubi brevitatis causa positum est $1+\varepsilon=\alpha$, $t=tg\frac{v+\Delta}{2}$, $\vartheta=tg\frac{v}{2}$

Haec aequatio offert quoq commodum medium quantitatem Δ seu differentiam verae anomaliae in ellipsi quae non multum differt a parabola, et anomaliae in parabola, hinc etiam, quum vera anomalia parabolae secundum priora facile inveniri possit, veram anomaliam ipsam ellipseos determinandi, si est admodum excentrica. Ad hunc finem ordinetur prior aequatio secundum potentias quantitatis α, et assumatur brevitatis causa $A=t+\frac{1}{3}t^3$, $B=\frac{1}{4}(t-t^3)-\frac{1}{5}t^5$, $C=\frac{1}{32}(3t-7t^3)+\frac{3}{28}t^7$ dein est:

$$0=A+B\alpha+C\alpha^2-\vartheta-\frac{1}{3}\vartheta^3$$

Quum A sit functio quantitatis v et Δ, transeat a in A, si v transit in $v+\Delta$, ergo erit

$$A=a+\Delta.\frac{da}{dv}+\frac{\Delta^2}{1.2}.\frac{d^2a}{dv^2}+\frac{\Delta^3}{1.2.3}.\frac{d^3a}{dv^3}+\ldots$$

et similes expressiones habebimus pro B et C. Si igitur sunt $a.b.c$ respectivi valores quantitatum A,B,C, si $v+\Delta$ transit in v, vel si t in ϑ transit, transibit prior aequatio in sequentem

$$0=\Delta.\frac{da}{dv}+\frac{\Delta^2}{1.2}.\frac{d^2a}{dv^2}+\ldots+\alpha\left(b+\Delta.\frac{db}{dv}+\frac{\Delta^2}{1.2}.\frac{d^2b}{dv^2}+\ldots\right)+\alpha^2\left(c+\Delta.\frac{dc}{dv}+\frac{\Delta^2}{1.2}.\frac{d^2c}{dv^2}+\ldots\right)$$

Si nunc ponatur $\Delta=P\alpha+Q\alpha^2+R\alpha^3+\ldots$ et substituatur hic valor in priori aequatione, erit, si quilibet factor quantitatis α ponatur aequalis zero,

$$-P\left(\frac{da}{dv}\right)=b$$

$$-Q\left(\frac{da}{dv}\right)=\frac{P^2d^2a}{2dv^2}+P\frac{db}{dv}+c$$

$$-R\left(\frac{da}{dv}\right)=PQ\frac{d^2a}{dv^2}+\frac{P^3d^3a}{6dv^3}+Q\frac{db}{dv}+\frac{P^2d^2b}{2dv^2}+\frac{Pdc}{dv}+d$$

et si revera ista differentialia deducantur, invenientur valores quantitatum P, Q et R. Dein est

$$P=\frac{\left(-\frac{1}{2}\vartheta+\frac{1}{2}\vartheta^3+\frac{2}{5}\vartheta^5\right)}{(1+\vartheta^2)^2}$$

si eadem ratione deducitur Q erit

$$\Delta=\frac{\alpha}{(1+\vartheta^2)^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\vartheta+\frac{1}{2}\vartheta^3+\frac{2}{5}\vartheta^5\right)+\frac{\alpha^2}{(1+\vartheta^2)^4}\left(-\frac{1}{16}\vartheta-\frac{9}{16}\vartheta^3+\frac{37}{80}\vartheta^5+\frac{531}{560}\vartheta^7+\frac{13}{35}\vartheta^9+\frac{9}{350}\vartheta^{11}\right)$$

quae series quoq continuari potest et quae valet et pro positivis et negativis valoribus quantitatis α h.e. et pro ellipsibus et pro hyperbolis. Sed fere in omnibus casibus sufficient

haec

hæc duo membra, et ad commodum calculum hujus seriei possunt factores quantitatum α et α^2 in tabulis poni, quarum argumentum esset ϑ seu vera anomalia parabolæ. —

Ex. g. sit $\log q = 9.0886320$, $\log \alpha = 7.3979400$ et tempus a transitu per perihelium $= 72.99493$. — Ex hoc sequitur ex aequatione (I)

parabolica vera anomalia	149°	47'	56."88	
correctio I pars	+ 0	12	0.24	
(II) pars	+		2.87	
elliptica vera anomalia	149°	59'	59.99	

quæ determinatio est admodum accurata, quum proprie debent esse 150° 0' 0" (Vide Monatl. Correspond. 1805 September.)

Aliæ methodi, veram anomaliam et radium vectorem pro admodum excentricis ellipsibus inveniendi, occurrunt in Theoria motus corporum cœlestium. ———

Aequationes priores sunt præcipuæ expressiones pro quantitatibus m, u, v et r. Eædem aequationes autem sæpius in admodum convergentes series resolvi possunt, et quum tales deductiones sæpius occurrant, hic locus erit generales methodos exponendi, quæ potissimum ad hunc finem in usu sunt.

1. Si u functio quantitatis x est in seriem resolvenda, quæ secundum potentias quantitatis x progreditur, assumere possumus

$$u = U + q_1 x + q_2 x^2 + q_3 x^3 + \ldots\ldots$$

ubi U, q_1, q_2 etc sunt quantitates a x independentes.

Ex quo facile videmus U esse valorem quant. u pro $x=0$, praeterea simul, factorem generalis membri $q_n x^n$ esse $q_n = \dfrac{\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)}{1.2.3\ldots n}$ praesupposito in termino $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$ post differentiationem positum esse $x=0$. — Si v.c. $U = \sin x$, invenitur $\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$

2. Si u est functio quantitatum x et y, quæ debet exponi secundum potentias et producta quantitatum x et y, assumere possumus

$$u = U + q_{1.0} x + q_{2.0} x^2 + \ldots + q_{0.1} y + q_{1.1} y^2 + \ldots + q_{0.2} y^2 + \ldots\ldots$$

et factor producti $x^n y^{n'}$ erit $\dfrac{\frac{d^{n+n'} u}{dx^n dy^{n'}}}{1.2.3\ldots n . 1.2.3\ldots n'}$ ubi iterum post differentiationem x et y ponuntur aequalis zero. Hoc quoque applicari potest ad functiones plurium incognitarum.

3. Si $u = f(x+a)$ esset in seriem resolvenda quæ progreditur

secund.

secundum potentias quantitatis a, erit:

$$f(x+a) = fx + q_1 a + q_2 a^2 + q_3 a^3 + \text{etc}$$

et factor q_n termini generalis $q_n a^n$ erit $q_n = \frac{d^n f(x)}{1.2.3.\ldots n dx^n}$

v.c. $u = \log.\text{nat.}(x+a)$ invenitur

$$\log(x+a) = \log x + \left(\frac{a}{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x}\right)^3$$

et per hanc methodum statim quoque valorem functionis $u = f(x)$ pro illo casu assignare possumus si x transit in $x+a$.

4. Si generatim u est functio quantitatum $x+a$, $y+b$, $z+c$ etc invenitur $f(x+a, y+b, z+c, \text{etc}) = f(x+y+z) + \frac{a d.f(x,y,z)}{dx} + \frac{b d.f(x,y,z)}{dy} + \frac{c d.f(x,y,z)}{dz} + \text{etc}$ cujus seriei membrum generale seu N^{tum} est

$$\frac{a^n b^{n'} c^{n''}}{(1.2.3\ldots n)(1.2.3\ldots n')(1.2.3\ldots n'')} \cdot \frac{d^{(n+n'+n''+\ldots)} f(x,y,z)}{dx^n . dy^{n'} . dz^{n''} \ldots}$$

N^{tum} membrum significat $(n+n'+n''+\ldots)^{tum}$ membrum.

5. Sit nunc data aequatio $0 = z - y + x\varphi(y)$. Si ex hac aequatione quaeratur alia functio quantitatis y quam per $\psi(y)$ designare volumus in seriem resolvenda, quae secundum potentias quantitatis x progrediatur, sit brevitatis causa $D\psi z$ seu $\psi' z = \left(\frac{d.\psi z}{dz}\right)$ et nos habebimus

$$\psi(y) = \psi z + x\varphi z . D\psi z + \frac{x^2}{1.2} \cdot \frac{d\{(\varphi z)^2 D\psi z\}}{dz} + \frac{x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^2\{(\varphi z)^3 . D\psi z\}}{dz^2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{d^3\{(\varphi z)^4 D\psi z\}}{dz^3}$$

Sit v.c. $z - y + y^n = 0$, et si quaeratur ex hac aequatione valor log. nat. y, dein est: $x = 1$, $\psi y = \log. y$, $\psi z = \log z$, $\psi' z = D\psi z = \frac{1}{z}$, $\varphi y = y^n$, $\varphi z = z^n$, ergo

$$\log y = \log z + z^{n-1} + \frac{2n-1}{1.2} z^{2(n-1)} + \frac{(3n-1)(3n-2)}{1.2.3} z^{3(n-1)} + \text{etc}$$

6. Si ad majorem adhuc abbreviationem ponitur generatim $\frac{d.f\alpha}{d\alpha} = D.f\alpha$, $\frac{d^2 f\alpha}{1.2 d\alpha^2} = D^2 f\alpha$, $\frac{d^3 f\alpha}{1.2.3 d\alpha^3} = D^3 f\alpha$, erit prior aequatio

$$\psi(y) = \psi z + x\varphi z . D\psi z + \frac{x^2}{2} D.\{(\varphi z)^2 D.\psi z\} + \frac{x^3}{3} D^2\{(\varphi z)^3 D\psi z\} + \ldots \quad (I)$$

Ope hujus theorematis, magnus numerus problematum resolvi potest. Sit v.c. datum $y = x\varphi(a+x)$ et quaeratur $\psi(A+x)$ ubi a et A asse invicem independentes quantitates designant, dein est:

$\psi(A+x) = \psi(A) + y(\varphi a)^{-1} D\psi A + \frac{y^2}{2} D\{(\varphi a)^{-2} D\psi A\} + \frac{y^3}{3} D^2\{(\varphi a)^{-3} D\psi A\} + \dots$

ubi $Da = DA = 1$ ponitur. —

Adhuc magis complicatae expressiones possunt ad inventam seriem (I) reduci. Sit v.c. $u = F(z + x\varphi u)$ et quaeratur tertia functio quantitatis u, quam exprimere volumus per ψu, Deinde est $y = z + x\varphi u$ hinc $u = Fy$ vel $\varphi u = \varphi Fy$ et hinc $y - z = x\varphi Fy$ vel $0 = z - y + x\varphi Fy$. — Si haec expressio comparatur cum priori deducta $0 = z - y + x\varphi y$ est:

$$\psi u = \psi Fz + x(\varphi Fz) D(\psi Fz) + \frac{x^2}{2} D\{(\varphi Fz)^2 D(\psi Fz)\} + \frac{x^3}{3} D^2\{(\varphi Fz)^3 D(\psi Fz)\} + \text{etc}$$

Per alias considerationes pro eadem quantitate invenitur quoque expressio $\psi u = \psi F.\{z + x\varphi Fz + \frac{x^2}{2} D(\varphi Fz)^2 + \text{etc}\}$ quae duae expressiones sibi aequales positae deducunt ad admodum pulchras expressiones, pro quibus autem hic non est locus. (: Vide Arbogast Calcul des derivations, Strasbourg 1800 :)

Nunc possumus has deductiones quoque applicare ad nostras aequationes. Harum duae sunt

$$m - u + \varepsilon \sin u = 0$$
$$\frac{r}{a} - 1 + \varepsilon \cos u = 0$$

Si prima harum aequationum comparatur cum priori generali expressione $z - y + x\varphi(y) = 0$, erit, si quaeritur $\cos u$, $z = m$, $y = u$, $x = \varepsilon$, $\varphi y = \sin u$, $\psi y = \cos u$, ergo aequatio (I) prior

$$\cos u = \cos m - \varepsilon \sin^2 m - \frac{\varepsilon^2}{1.2} \frac{d.\sin^3 m}{dm} - \frac{\varepsilon^3}{1.2.3} \frac{d^2 \sin^4 m}{dm^2} - \dots$$

hinc dat secunda aequatio

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos m + \varepsilon^2 \sin^2 m + \frac{\varepsilon^3}{1.2} \frac{d.\sin^3 m}{dm} + \text{etc}$$

ubi terminus generalis hujus seriei est $\frac{\varepsilon^n}{1.2.3\dots n-1} \cdot \frac{d^{n-2} \sin^n m}{dm^{n-2}}$

sed ubi scimus, est

$$2^n \cos^n x = \cos nx + n\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4)x + \text{etc}$$

ex quo sequitur, si $n-2$ est numerus impar

$$\pm \frac{2^n d^{n-2} \cos^n x}{dx^{n-2}} = n^{n-2} \sin nx + \frac{n}{1}(n-2)^{n-2} \sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-2} \sin(n-4)x + \text{etc}$$

superius signum si $n-2$ habet formam $2(2p+1)+1$

inferius - - - - - - - - - - $2(2p)+1$

Si

Si autem $n-2$ est numerus ~~im~~par erit

$$\mp \frac{2^n d^{n-2} \cos^n x}{dx^{n-2}} = n^{n-2} \cos nx + \frac{n}{1}(n-2)^{n-2} \cos(n-2)x + \ldots$$

Superius signum si $n-2$ habet formam $2(2p)$
inferius - - - - - - - - - - - - - $2(2p+1)$

Si igitur assumimus $x = 90-m$, dein habemus, si sumimus aliquem horum quatuor valorum, v.c. primum

$$\frac{2^n d^{n-2} \cos^n x}{dx^{n-2}} = -\frac{2^n d^{n-2} \sin^n m}{dm^{n-2}} =$$

$$= n^{n-2} \sin n(90-m) + \frac{n}{1}(n-2)^{n-2} \sin(n-2)(90-m) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-2} \sin(n-4)(90-m) + \text{etc}$$

Quum autem $n-2 = 2(2p+1)+1 = 3, 7, 11, 15 \ldots$ h.e. quum $n = 5, 9, 13, 17 \ldots$ est, habemus

$$\sin n(90-m) = \cos nm$$
$$\sin(n-2)(90-m) = -\cos(n-2)m$$
$$\sin(n-4)(90-m) = \cos(n-4)m$$

hinc terminus generalis hujus seriei

$$\frac{\varepsilon^n d^{n-2} \sin^n m}{1.2.3 \ldots n-1. dm^{n-1}} = -\frac{\varepsilon^n}{1.2.3 \ldots (n-1).2^n}\left\{n^{n-2}\cos nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n-2}\cos(n-2)m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-2}\cos(n-4)m \ldots\right\}$$

ita ut habemus v.c. pro $n=3$, $\frac{\varepsilon^3}{2^3}(3\cos 3m - 3\cos m)$ et si pro ceteris valoribus quantitatis n ita, ut tandem expressio pro ~~r~~ radio vectore fiat

$$\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon \cos m - \frac{\varepsilon^2}{1.2}\cos(2m-1) - \frac{\varepsilon^3}{1.2.2^2}(3\cos 3m - 3\cos m)$$
$$- \frac{\varepsilon^4}{1.2.3 \ldots 2^3}(4^2 \cos 4m - 4 2^2 \cos 2m$$
$$- \frac{\varepsilon^5}{1.2.3.4.2^4}(5^3 \cos 5m - 5.3^3 \cos 3m + 10 \cos m) - \text{etc}$$

et legem hujus progressionis quilibet facile videbit. —

(Ad exprimendum v per u vel inverse, habemus

$$tg \frac{v}{2} = tg \frac{u}{2} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

et haec aequatio dat

$$\frac{u}{2} = \frac{v}{2} - b \sin v + \frac{b^2}{2}\sin 2v - \frac{b^3}{3}\sin 3v + \ldots$$
$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + b \sin u + \frac{b^2}{2}\sin 2u + \frac{b^3}{3}\sin 3u + \ldots$$

ubi $b = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

1. Ex hoc valore quantitatis b sequitur $\varepsilon = \frac{2b}{1+b^2}$ hinc quoque

$$\frac{\frac{1}{2}\varepsilon \sin v}{1+\varepsilon\cos v} = \frac{b \sin v}{1+b^2+2b\cos v}$$

Nunc assumamus, secundam partem esse in seriem resolutam

$$\frac{b\sin v}{1+b^2+2b\cos v} = \alpha \sin v - \beta \sin 2v + \gamma \sin 3v - \ldots\ldots$$

Ad determinationem quantitatum α, β, γ, habemus, si haec series multiplicatur per $1+b^2+2b\cos v$, et coëfficientes factorum $\sin v$, $\sin 2v$, $\sin 3v$ aequales zero ponuntur,

$$\alpha(1+b^2) = b(1+\beta)$$
$$\beta(1+b^2) = b(\alpha+\gamma)$$
$$\gamma(1+b^2) = b(\beta+\delta) \quad \text{etc}$$

hinc $\alpha = b$, $\beta = b^2$, $\gamma = b^3 \ldots\ldots$ et hinc

$$\frac{\varepsilon \sin v}{1+\varepsilon\cos v} = 2b\{\sin v - b\sin 2v + b^2 \sin 3v - \ldots\}$$

Sed quoque $\cos u = \frac{\varepsilon + \cos v}{1+\varepsilon\cos v}$ vel $\sin u = \frac{\sin v \cdot \sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\varepsilon\cos v}$ vel tandem

$\frac{\varepsilon\sin v}{1+\varepsilon\cos v} = \frac{2b\sin u}{1-b^2}$ hinc est:

$$\sin u = (1-b^2)(\sin v - b\sin 2v + b^2 \sin 3v) - - -$$

et haec expressio dat sinum u per v. Si haec expressio conjungitur cum illa, quae dat u per v, dum invenitur ex aequatione $m = u - \varepsilon\sin u$ sequens series, quae m per v dat:

$$m = v - 2\varepsilon\sin v + 2b(\varepsilon - \tfrac{1}{2}b)\sin 2v + 2b^2(\varepsilon - \tfrac{2}{3}b)\sin 3v + 2b^3(\varepsilon - \tfrac{3}{4}b)\sin 4v \ldots\ldots$$

cujus terminus generalis $\pm 2b^{n-1}(\varepsilon - \frac{(n-1)}{n}b)\sin nv$. — Ex hac inventa serie possemus quoque per reversionem aliam derivare, quae daret v per m. Quum autem lex dum non admodum clare perspicietur, volumus quaerere v per m via directa. —

Nos habuimus prius

$$\frac{v}{2} = \frac{u}{2} + b\sin u + \frac{b^2}{2}\sin 2u + \frac{b^3}{3}\sin 3u + \ldots\ \text{h.e.}$$

$$v = u + 2.\Sigma\left(\frac{b^n \sin nu}{n}\right) \ldots\ldots \quad (I)$$

ubi signum Σ significat, in quantitate $\frac{b^n \sin nu}{n}$ debere poni $n = 1, 2, 3, 4 \ldots\ldots$

Atque ultima aequatio continet u et $\sin nu$ quae debent exprimi per m. —

1. Pro u. Resumatur ista reductio prior pro $0 = z - u + \alpha\varphi(y)$ in hac est pro nostro casu $\psi y = u$, ergo invenitur

$$u = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2}{1.2 dm} d.\sin m + \ldots\ldots \frac{\varepsilon^n d^{n-1} \sin^n m}{1.2.3\ldots\ldots n dm^{n-1}}$$

Sed erat $\frac{d^{n+1} \sin^n m}{dm^{n+1}} = -\frac{1}{2^n}\left(n^{n+1} \sin nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n+1} \sin(n-2)m + \ldots\right)$

hinc post integrationem

$$\frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^{n-1} \sin^n m}{dm^{n-1}} = \frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n.2^n} \cdot \left(n^{n-1} \sin nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1} \sin(n-2)m + \ldots\right)$$

et hac ratione invenitur

$$u = m + \varepsilon \sin m + \frac{\varepsilon^2 2}{1.2.2} \sin 2m + \frac{\varepsilon^3}{1.2.3.2^2}(3^2 \sin 3m - 3 \sin m) + \frac{\varepsilon^4}{1.2.3.4.2^3}(4^3 \sin 4m - 4.2^3 \sin 2m) \ldots (A)$$

2. Pro $\sin nu$. Hic est $\psi y = \sin nu$, hinc

$$\frac{1}{n} \sin nu = \frac{1}{n} \sin nm + \varepsilon \sin m \cos nm + \frac{\varepsilon^2}{1.2.dm} d(\sin m \cos nm)$$

et terminus generalis hujus seriei est $\frac{\varepsilon^n}{1.2.3\ldots n\, dm^{n-1}} \cdot d^{n-1}(\sin^n m \cos nm)$

Sed secundum priora est

$$2^\pi \cos^\pi x \cos nm = \cos \pi x \cos nm + \frac{\pi}{1} \cos(\pi-2)x \cos nm + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2} \cos(\pi-4)x \cos nm + \ldots$$

Si ergo est $x = 90 - m$, dum est $\pi = 5.9.13.17\ldots\ldots$

$\cos \pi x = \sin \pi m$ --- $\cos(\pi-2)x = -\sin(\pi-2)m$ etc

et hinc prior series

$$2^\pi \sin^\pi m \cos nm = \sin \pi m \cos nm - \pi \sin(\pi-2)m \cos nm + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2} \sin(\pi-4)m \cos nm \ldots$$

vel si producta evolvuntur

$$2^{\pi+1} \sin^\pi m \cos nm = \sin(\pi+n)m + \sin(\pi-n)m - \frac{\pi}{1}\left\{\sin(\pi-2+n)m + \sin(\pi-2-n)m\right\} + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}\left\{\sin(\pi-4+n)m + \sin(\pi-4-n)m\right\} ---$$

Si dein comparantur quartum, octavum, 12., 16. ---- $(\pi-1)$ differentialia hujus expressionis, invenitur:

$$\frac{\varepsilon^\pi d^{\pi-1} \sin^\pi m \cos nm}{1.2.3\ldots\pi dm^{\pi-1}} = \frac{\varepsilon^\pi}{1.2.3\ldots\pi.2^{\pi-1}} \left\{\begin{array}{l} \left\{(\pi+n)^{\pi-1} \sin(\pi+n)m + (\pi-n)^{\pi-1} \sin(\pi-n)m\right\} \\ + \pi\left\{(\pi-2+n)^{\pi-1} \sin(\pi-2+n)m + (\pi-2-n)^{\pi-1} \sin(\pi-2-n)m\right\} \\ + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}\left\{(\pi-4+n)^{\pi-1} \sin(\pi-4+n)m + \right. \\ \left. + (\pi-4-n)^{\pi-1} \sin(\pi-4-n)m\right\} \\ - \frac{\pi(\pi-1)(\pi-2)}{1.2.3}\left\{(\pi-6+n)^{\pi-1} \sin(\pi-6+n)m + \right. \\ \left. + (\pi-6-n)^{\pi-1} \sin(\pi-6-n)m\right\} - \end{array}\right.$$

Si nunc ponitur pro π series numerorum naturalium 0. 1, 2, 3, 4 ...
et brevitatis causa assumitur

$A^0 = \frac{1}{n} \sin nm \quad A^1 = \sin(n+1)m - \sin(n-1)m$

$A^2 = \frac{1}{1.2}\left\{(n+2)\sin(n+2)m - 2n\sin nm + (n-2)\sin(n-2)m\right\}$

$A^3 = \frac{1}{1.2.3}\left\{(n+3)^2\sin(n+3)m - 3(n+1)^2\sin(n+1)m + 3(n-1)^2\sin(n-1)m - (n-3)^2\sin(n-3)m\right\}$

et generatim

$$A^\pi = \frac{1}{1.2.3\ldots\pi}\Big\{(\pi+n)^{\pi-1}\sin(\pi+n)m - \frac{\pi}{1}(\pi+n-2)^{\pi-1}\sin(\pi+n-2)m + \frac{\pi(\pi-1)}{1.2}(\pi+n-4)^{\pi-1}\sin(\pi+n-4)m - \ldots\ldots\Big\}$$

(deinde habemus pro $\sin nu$ si $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ ponitur

$$\frac{1}{n}\sin nu = A^0\alpha^0 + A^1\alpha^1 + A^2\alpha^2 + A^3\alpha^3 + \ldots\ldots \quad (B)$$

3. Adhuc deest evolutio quantitatis b^n in aequatione (I).
Ad hoc notandum est, aequationis $0 = \frac{\varepsilon^2}{x} + x + 2$ unam rad. esse $x = 1 + \sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{b}$ ubi b priorem significationem habet.
Si haec aequatio comparatur cum priori et ponitur $\psi y = x^{-n}$
erit, si iterum $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ ponitur

$$b^n = \alpha^n\Big\{1 + n\alpha^2 + \frac{n(n+3)}{1.2}\alpha^4 + \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\alpha^6 + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4}\alpha^8 + \ldots\Big\} \quad (C)$$

4. Inventis hac ratione terminis generalibus quantitatum u, $\frac{\sin nu}{n}$, et b^n vel aequationibus (A), (B), (C), tantummodo restat substitutio in aequatione (I), quod dat

$$\frac{v}{2} = \frac{m}{2} + \Sigma\frac{\frac{n}{2}\alpha^n}{1.2.3..n}\Big\{n^{n-1}\sin nm - \frac{n}{1}(n-2)^{n-1}\sin(n-2)m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-4)^{n-1}\sin(n-4)m - \ldots\Big\}$$

$$+ \Sigma^n\left\{\begin{array}{l}\alpha^n A^0 + \alpha^{n+1}A^1 + \alpha^{n+2}(A^2 + A^0 n) + \alpha^{n+3}(A^3 + A^1 n) + \alpha^{n+5}\left(A^5 + A^3 n + A^1\frac{n(n+3)}{1.2}\right) \\ + \alpha^{n+6}\left(A^6 + A^4 n + A^2\frac{n(n+3)}{1.2} + A^0\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\right) \\ + \alpha^{n+7}\left(A^7 + A^5 n + A^3\frac{n(n+3)}{1.2} + A^1\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}\right) \\ + \alpha^{n+8}\left(A^8 + A^6 n + A^4\frac{n(n+3)}{1.2} + A^2\frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3} + \frac{n(n+5)(n+6)(n+7)}{1.2.3.4}\right) \\ + \text{etc}\end{array}\right.$$

ubi n secundum ordinem aequale poni debet 1. 2. 3. 4 ——
Per hanc expressionem facile factorem alicujus potentiis quantitatis $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$ deducere possumus. —
Ut hoc enucleamus per exemplum volumus factores priorum quinque potentiarum quaerere. Si designamus A^0, A^0, A^0 --- valores quantitatis A^0 pro casibus specialibus ubi $n=1, n=2, n=3$ et

Dein habemus ex priori generali expressione pro A^n

$A_0^1 = \sin m$, $A_1^1 = \sin 2m$, $A_2^1 = \frac{1}{2}(3\sin 3m - \sin m)$

$A_3^1 = \frac{1}{3}(8\sin 4m - 4\sin 2m)$, $A_4^1 = \frac{1}{24}(5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2\sin m)$

$A_0^2 = \frac{1}{8}(25\sin 5m - 27\sin 3m + 4\sin m)$

$A_0^3 = \frac{1}{3}\sin 3m$, $A_1^3 = \sin 4m - \sin 2m$, $A_2^3 = \frac{1}{2}(5\sin 5m - 6\sin 3m + \sin m)$

$A_0^4 = \frac{1}{4}\sin 4m$, $A_1^4 = \sin 5m - 3\sin m$,

$A_0^5 = \frac{1}{5}\sin 8m$.

Cum his valoribus habebimus ex ultima expressione pro $\frac{v}{2}$

pro $n=1$, $\alpha \sin m + \alpha A_0^1 = 2\alpha \sin m$

pro $n=2$; $\alpha^2 \sin 2m + \alpha^2 (A_1^1 + A_0^2) = \frac{5}{2}\alpha^2 \sin 2m$

pro $n=3$, $\frac{\alpha^3}{2}(3\sin 3m - \sin m) + \alpha^3 (A_2^1 + A_0^1 + A_1^2 + A_0^3) = \alpha^3 (\frac{13}{3}\sin 3m - \sin m)$

pro $n=4$, $\frac{4\alpha^4}{3}(2\sin 4m - \sin 2m) + \alpha^4 (A_0^4 + A_1^3 + A_2^2 + A_3^1 + A_1^1 + 2A_0^2) = \alpha^4 (\frac{133}{12}\sin 4m - \frac{11}{3}\sin 2m)$

pro $n=5$, $\frac{\alpha^5}{24}(5^3 \sin 5m - 3^4 \sin 3m + 2\sin m) + \alpha^5 (A_0^5 + A_1^4 + A_2^3 + 3A_0^3 + A_3^2 + A_4^1 + A_1^2 \cdot 2A_0^1)$

$= \alpha^5 (\frac{5}{6}\sin m + \frac{43}{4}\sin 3m + \frac{1097}{3.4.5}\sin 5m)$

hinc porro est: $v = m + 2\varepsilon \sin m + \frac{5}{2^2}\varepsilon^2 \sin 2m + \frac{\varepsilon^3}{2^2}(\frac{13}{3}\sin 3m - \sin m)$

$+ \frac{\varepsilon^4}{2^3 3}(\frac{103}{2^2}\sin 4m - 11\sin 2m) + \frac{\varepsilon^5}{2^5}(\frac{1097}{2.3.5}\sin 5m - \frac{43}{2}\sin 3m + \frac{5}{3}\sin m)$

Continuata haec series occurrit in Berliner Jahrbuch pro 1820, p. 229 a celeb. Schubert et pro 1821. p. 88. a celeb. Degen.

Si vellemus cum antiquioribus Astronomis anomalias m, u, et v non a Perihelio, sed ab Aphelio computare, deberemus in praecedentibus expressionibus tantummodo ponere quantitatem ε negativam.

Maxima aequatio centri

Pro puncto orbitae ubi differentia verae et mediae anomaliae est Maximum h. e. pro loco maximae aequationis centri est $d(v-m)=0$ seu $dv = dm$, (h. e. motus verus devenit aequalis motui medio). Sed erat $\frac{dv}{dm} = \frac{a^2}{r^2}\cos\varphi$, si $\varepsilon = \sin\varphi$, vel est $\frac{r^2}{a^2} = \cos\varphi$. Si hic valor substituitur in aequatione $\frac{r}{a} = 1 - \varepsilon\cos u$ erit $\cos u = \frac{1 + \sqrt{\cos\varphi}}{\varepsilon}$. Sed aequatio (8) dat $v - u = 2\,\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sin u}{\sqrt[4]{\cos\varphi}}\right)$ h. e. secundum aequationem $m = u - \varepsilon\sin u$, $v - m = 2\,\mathrm{Arc}\sin\left(\frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sin u}{\sqrt[4]{\cos\varphi}}\right) + \varepsilon\sin u$

et haec est expressio maximae aequationis centri, si in ea ponitur

pro u valor ex $\cos u = \frac{1-\sqrt{\cos\varphi}}{\varepsilon}$.

Nos possumus ex hac ultima aequatione maximam aequationem centri $v-m=f$ in serie deducere, quae secundum potentias quantitatis ε progreditur. Sed facilius obtinetur haec series sequenti modo. — Erat in praecedentibus $dv = \frac{a^2}{r^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} dm + \frac{(2+\varepsilon\cos v)}{\cos\varphi}\sin v\, d\varphi$

Quum autem $dv = dm$, erit: $\frac{r}{a} = \sqrt[4]{1-\varepsilon^2}$, seu $\frac{r}{a} = \frac{1-\varepsilon^2}{1+\varepsilon\cos v}$ hinc quoque $(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}} = (1+\varepsilon\cos v)^2$ et hinc prima aequatio

$$dv - dm = d\varepsilon \sin v \left(\frac{1}{1-\varepsilon^2} + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}\right)$$

Sed est $\cos v = -\frac{1}{\varepsilon}\left(1-(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{4}}\right) = -\frac{3\varepsilon}{2^2} - \frac{3\varepsilon^3}{2^5} - \frac{5\varepsilon^5}{2^7} - \frac{5.9\,\varepsilon^7}{2^{11}} - \text{etc.}$

et $\sin v = \sqrt{1-\cos^2 v} = 1 - \frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{225}{2048}\varepsilon^4 - \frac{4233}{65536}\varepsilon^6 + \ldots$

et praeterea

$$(1-\varepsilon^2)^{-1} = 1+\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\ldots$$
$$(1-\varepsilon^2)^{-\frac{1}{4}} = 1+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2+\tfrac{5}{32}\varepsilon^4+\tfrac{15}{128}\varepsilon^6+\ldots$$

Hinc est

$$\sin v\, d\varepsilon \times \left\{\frac{1}{(1-\varepsilon^2)} + \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{4}}}\right\} = \left(1-\frac{9}{32}\varepsilon^2 - \frac{225}{2048}\varepsilon^4 - \ldots\right)\left(2+\frac{5}{4}\varepsilon^2+\frac{37}{34}\varepsilon^4+\frac{134}{128}\varepsilon^6\right)d\varepsilon$$

Productum harum duarum serierum est

$$2+\frac{11}{16}\varepsilon^2 + ~~\frac{597}{1024}\varepsilon^4~~ + \frac{599}{1024}\varepsilon^4 + \ldots$$

Si haec ultima expressio multiplicatur per $d\varepsilon$ et integratur dein est quaesita maxima aequatio centri

$$f = 2\varepsilon + \frac{11}{48}\varepsilon^3 + \frac{599}{5120}\varepsilon^5 + \frac{17219}{229376}\varepsilon^7 + \frac{2032363}{37748736}\varepsilon^9 + \ldots$$

et si haec series invertitur, est

$$2\varepsilon = f - \frac{11}{3.2^5}f^3 - \frac{5.87}{3.5.2^{15}}f^5 - \frac{40583}{5.7.9.2^{22}}f^7 - \text{etc}$$

quae duae series f per ε, et ε per f dant.

(Vid. Gauss Theor. motus corp. coelest. et Berliner Jahrb. 1790. p. 236 et 1804. p. 218 et 1805 p. 147.)

Ex omnibus praecedentibus igitur videmus quomodo pro quolibet tempore veram anomaliam v et radium vectorem r planetarum aut cometarum invenire possumus. — Si dein quantitati v addatur longitudo perihelii p, dein invenitur vera longitudo planetae in orbita; vel si addatur quantitati v elongatio perihelii a nodo π, invenitur argumentum latitudinis ita ut $8 = v+\pi$, vel etiam $8 = v+p-k$ fit, si k est longitudo ☊ ascendentis.

Ex quantitate 8 et inclinatione orbitae n versus planum ecli-
pticae invenitur dein facile ad eclipticam vera longitudo l' et ex cen-
tro Solis visa latitudo b planetae per sequentes expressiones

$$tg(l'-K) = \cos n \, tg \, 8$$
$$tg \, b = tg \, n \sin(l'-K) \text{ vel}$$
$$\sin b = \sin n \sin 8$$
$$\cos b = \frac{\cos 8}{\cos(l'-K)}$$

Figuram sibi quilibet facile construere potest. (Vid. Pasquich p. 133. t. I. fig. 8)
Haec reductio quoque potest in seriem dari; nimirum est ex aequatione

$$tg(l'-k) = \cos n \, tg \, 8 \text{ secundum Trigonometriam}$$

$$8-(l'-k) = h \sin 2 8 - \tfrac{1}{2} h^2 \sin 4 8 + \tfrac{1}{3} h^3 \sin 6 8 - \dots \text{ et}$$

$$8-(l'-k) = h \sin 2(l'-k) + \tfrac{1}{2} h^2 \sin 4(l'-k) + \dots$$

ubi $h = tg^2 \frac{n}{2}$ et $8-(l'-k)$ est reductio ad eclipticam. (Vid. Delambre 2. Vol. p. 237)
Si v. c. $8 = 127° \, 5' \, 55''$, $K = 112° \, 1' \, 30''$, $n = 2° \, 29' \, 47''$, invenitur
reductio quam nominare volumus ρ

$$\rho = 94''.2 \text{ hinc } l' = 239° \, 8' \, 59''.2 \text{ et } b = +1° \, 59' \, 27''.2 \text{ septentr.}$$

Ad finem hujus materiae adhuc evolvere volumus aequa-
tionem temporis, de qua etsi breviter jam erat sermo. —
Aequatio temporis est differentia veri et medii temporis seu
differentia ascensionum rectarum veri et secundi medii Solis in
partibus medii temporis expressa. —
Sit L, l, α, media, vera longitudo et vera ascensio recta Solis; ρ re-
ductio verae longitudinis Solis ad aequatorem vel differentia
verae longitudinis et verae ascensionis rectae Solis, tandem p lon-
gitudo perihelii terrae, omnes hae longitudines computatae a medio
puncto verno. Pro vero, nutatione affecto puncto verno sint
eaedem quantitates signatae. — His suppositis habemus

$$\alpha' = l + \rho - 7''.18 \, tg \, e \sin ☊☾$$

ubi e est obliquitas eclipticae et ☊☾ longitudo nodi ascendentis or-
bitae Lunae. Si quantitas $7.18 \, ctg \, e \sin ☊☾$ quae valet pro plano
aequatoris, reducitur ad eclipticam, habemus pro hac reducta quan-
titate $-\frac{7.18 \sin ☊☾}{\sin e}$, hinc est

$$L' = l - (l - L) - \frac{7.18 \sin ☊☾}{\sin e}$$

et

et aequatio temporis est $dt = \frac{1}{15}(\mathcal{A}' - \mathcal{L}')$ vel

$$dt = \frac{1}{15}\left((l-\mathcal{L}) + \varsigma + 7.18 \sin \mathcal{A}\mathcal{R}\left(\frac{1}{\sin e} - \frac{1}{tg\, e}\right)\right)$$

Si ponimus $e = 23° 28'$, est

$$dt = \frac{1}{15}(l - \mathcal{L} + \varsigma) + 0''.099 \sin \mathcal{A}\mathcal{R} \quad \text{------} \quad (I)$$

et huic expressioni perturbationes adhuc addi debent, quas patitur terra in suis longitudinibus a planetis. Nos volumus summam harum perturbationum ad tempus reductarum, per $\frac{1}{15}P$ exprimere. Si autem ε est ratio excentricitatis ad semiaxem majorem orbitae terrae et $\lambda = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ dein est secundum priora

$$(: m = v - 2\varepsilon \sin v + 2b(\varepsilon - \tfrac{1}{2}b)\sin 2v :)$$

$$l - \mathcal{L} = 2\varepsilon \sin(l-p) - 2\lambda(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda)\sin 2(l-p) + 2\lambda^2(\varepsilon - \tfrac{2}{3}\lambda)\sin 3(l-p) - 2\lambda^3(\varepsilon - \tfrac{3}{4}\lambda)\sin 4(l-p)$$

Praeterea est, si h est tangens dimidiae obliquitatis ecliptices secundum praecedentia (: $\varsigma = h \sin 2\delta$ ----)

$$\varsigma = -h^2 \sin 2l + \frac{h^4}{2}\sin 4l - \frac{h^6}{3}\sin 6l$$

hinc erit aequatio (I)

$$dt = \frac{2\varepsilon}{15}\sin(l-p) - \frac{h^2}{15}\sin 2l + 0.099 \sin \mathcal{A}\mathcal{R} + \frac{1}{15}P$$
$$- \frac{2\lambda}{15}(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda)\sin 2(l-p) + \frac{h^4}{30}\sin 4l +$$
$$+ \frac{2\lambda^2}{15}(\varepsilon - \tfrac{2}{3}\lambda)\sin 3(l-p) - \frac{h^6}{45}\sin 6l$$

Pro 1800.00 fit $\varepsilon = 0.016791$, $p = 279° 29' 33''$, $\varepsilon = 23° 27' 57''$

hinc $\log. \lambda = 7.9240772$ ergo

$$dt = 461.786 \sin(l-p) - 593.146 \sin 2l + 0.099 \sin \mathcal{A}\mathcal{R} + \frac{1}{15}P$$
$$- 2.907 \sin 2(l-p) + 12.793 \sin 4l$$
$$+ 0.022 \sin 3(l-p) - 0.368 \sin 6l$$

et quantitas l invenitur ex cognita quantitate $\mathcal{L}$ per aequationem

$$l = \mathcal{L} + 6926''.54 \sin(\mathcal{L}-p) + 72.68 \sin 2(\mathcal{L}-p) + 1.66 \sin 3(\mathcal{L}-p) + 0.02 \sin 4(\mathcal{L}-p)$$

Determinatio harum perturbationum, quarum summam nos designavimus per P pertinet ad Astronomiam physicam. —

Si planetae tantummodo actioni Solis obedirent, describerent circa centrum Solis, qua focum, pure ellipticas orbitas, quum autem unus in alterum et in solem ipsum agant, oriuntur in motibus ellipticis turbationes, quae etiam in observationibus innotescunt, et quae accurate

determinari debent, si volumus construere accuratas tabulas motuum planetarum, problema, quod vires nostræ analyseos transcenderet, si non feliciter parva massa planetarum, eorum parvæ inclinationes et eorum respectu unitatis non notabiles excentricitates nobis suppeditarent media, has difficultates vincendi, et istud admodum difficile problema saltem approximando resolvendi. —

Harum perturbationum potissimum sunt duo genera. Primæ mutant elementa ipsa orbitarum, et quum hæ perturbationes admodum lentæ fiunt, et post plura sæcula periodice redeunt, nominantur perturbationes sæculares. Secundæ autem dependent a relativis positionibus planetarum tam inter se quam quoad eorum nodos et perihelia et quum hæ positiones generatim in parvis periodis redeant, earum actiones dominantur periodicæ perturbationes. Inter omnia elementa orbitarum ellipticarum planetarum solum eorum axis major, et hinc ~~etiam~~ quoque medius motus planetarum, est invariabilis, cetera autem, excentricitas, inclinatio, longitudo perihelii et nodi semper variationibus sunt obnoxia. Pro orbita terræ v.c. nunc est annua variatio longitudinis perihelii $+ 11''.8$ et annua imminutio ~~ob~~ inclinationis orbitæ versus aequatorem $0''.52$, ex quo ope analysis monstrari potest, perigæum Solis cum puncto aequinoctiali verno versus annum 4090 ante Christum natum coincidisse, epocha, in quam fere omnes nostrorum Chronologorum creationem mundi ponunt. —

Periodicæ perturbationes commodissime per sinus et cosinus angulorum, a quibus dependent, repræsentari possunt, quia hæ trigonometricæ functiones etiam post quamlibet circumferentiam, qua sui anguli augentur, periodice redeunt. Pro motu terræ præcipuæ harum periodicarum perturbationum sunt sequentes, in quibus ☾ et ☉ geocentricam longitudinem lunæ et Solis et ♀, ♁, ♂ ... heliocentricas longitudines Veneris, terræ, ~~et~~ Martis etc designant. —

Ut nimirum obtineatur vera longitudo Solis (h.e. longitudo

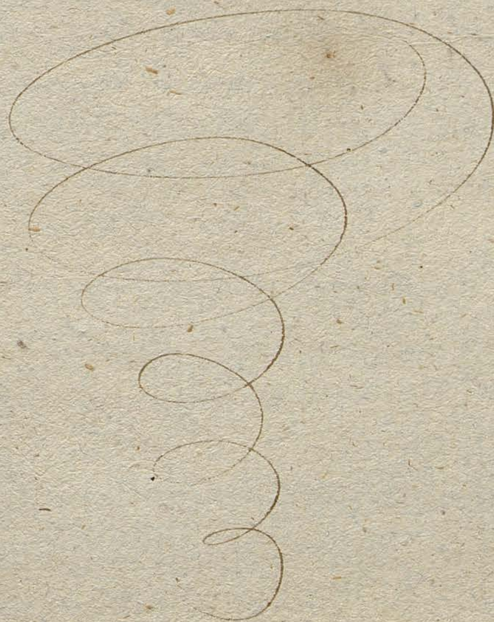
terræ

terrae plus 180°.) debet addi ad ejus mediam longitudinem pro data epocha aequatio elliptica orbitae $v-m=$ etc et praeterea perturbationes longitudinis

$7.''5 \sin(☾-☉)$
$5.7 \sin(♀-♁) - 6.4 \sin(2♀-2♁) + 2.9 \cos(2♀-3♁) + 1.9 \cos(3♀-4♁)$
$-2.5 \sin(2♁-2♂) + 1.5 \sin(2♂-♁) + 1.5 \cos(2♂-♁)$
$-7.1 \sin(♁-♃) + 2.7 \sin(2♁-2♃) - 25 \sin ♃)$

et ad obtinendam veram distantiam a terra, addi debent ad distantiam ellipticam $\frac{r}{a}=$ etc perturbationes

$0.000037 \cos(☾-☉)$
$-0.000006 \cos(♀-♁) + 0.000018 \cos(2♀-2♁) + 0.000003 \cos(3♀-3♁)$
$+0.000016 \cos(♁-♃) - 0.000009 \cos(2♁-2♃)$.



Locus heliocentricus et geocentricus Planetarum et Cometarum.

In prioribus vidimus, quomodo pro quolibet tempore possimus invenire veram e centro Solis visam longitudinem, latitudinem et distantiam Planetarum ab hoc centro Solis. Adhuc restat resolutio Problematis, quomodo ex situ planetarum versus Solem, possit inveniri eorum situs versus terram et inverse; quę disquisitio pro nobis ex hac ratione est magni momenti, quia hæc astra ex terra videntur, et quum proprius motus terrę notabiles etsi tantum apparentes perturbationes in motibus planetarum producat, quę penitus evanescunt, si ex centro terrę observata seu geocentrica loca planetarum ad illa ex Sole visa seu heliocentrica reducuntur. —

Sit in sequentibus α, δ et λ, β geocentrica ascensio recta, declinatio et geocentrica longitudo et latitudo planetę, ρ distantia planetę a terra et $\rho' = \rho \cos\beta$ projectio quantitatis ρ ad planum eclipticę. —

Sit eadem ratione l, b, r heliocentrica longitudo, latitudo planetę et ejus distantia a Sole, et $r' = r \cos b$. Tandem L, B, R, heliocentrica longitudo et latitudo terrę ejusque distantia a Sole et $R' = R \cos B$.

Praeterea designet k longitudinem nodi ascendentis orbitę planetę in ecliptica, n, inclinationem orbitę versus eclipticam, v heliocentricam longitudinem planetę in orbita, et $u = v - k$ argumentum latitudinis planetę; γ angulus commutationis vel angulus $r'R'$ ad Solem, η elongatio vel angulus $\rho'R'$ ad terram et π annua Parallaxis seu angulus $r'\rho$ ad planetam. —

Heliocentricus locus planetę uti et heliocentricus locus terrę sit datus, quęratur geocentrica ascensio recta et declinatio planetę. —

Si situs terrae versus Solem per tres rectangulares coordinatas X', Y', Z' determinatur, ubi X' est in linea aequinoctiorum et $X'Y'$ in plano eclipticae, dein habemus

$$X' = R \cos B \cos L, \quad Y' = R \cos B \sin L, \quad Z' = R \sin B$$

sint X, Y, Z analogae coordinatae terrae et XY in plano aequatoris, dein est, si e est obliquitas eclipticae,

$$X = X', \quad Y = Y' \cos e - Z' \sin e, \quad Z = Z' \cos e + Y' \sin e$$

hinc est

$$X = R \cos B \cos L, \quad Y = R \cos B \sin L \cos e - R \sin B \sin e$$

$$Z = R \cos B \sin L \sin e + R \sin B \cos e$$

pro quo quum B semper sit parvum, fere in omnibus casibus poni potest, $X = R \cos L$, $Y = R \sin L \cos e$, $Z = R \sin L \sin e$

et hae coordinatae X, Y, Z proprie pertinent ad punctum superficiei terrae ex quo observator longitudinem Solis $S = L - 180°$ vidit. Si autem sint ξ, ν, ζ analogae coordinatae quae locum observatoris in superficie terrae versus ejus centrum determinant, et si per φ geocentrica altitudo poli observatoris, per M ascensio recta Zenithi, et tandem per ρ distantia observatoris a centro terrae designatur, dein est:

$$\xi = \rho \cos \varphi \cos M, \quad \nu = \rho \cos \varphi \sin M, \quad \zeta = \rho \sin \varphi$$

et ut determinetur situs centri terrae versus Solem per coordinatas X, Y, Z, prioribus valoribus quantitatum X, Y, Z adhuc hi valores quantitatum ξ, ν, ζ addi debent h. e. habebimus

$$X = R(\cos B \cos L) + \rho \cos \varphi \cos M$$

~~$Y = R(\cos B \sin L) + \rho \cos \varphi \sin M$~~

$$Y = R(\cos B \sin L \cos e - \sin B \sin e) + \rho \cos \varphi \sin M$$

$$Z = R(\cos B \sin L \sin e + \sin B \cos e) + \rho \sin \varphi$$

1. In prioribus valores coordinatarum X, Y, Z terrae versus Solem respectu aequatoris sunt inventi. Si nunc haberemus similes coordinatas x, y, z quae situm planetae versus Solem etiam quoad aequatorem determinarent, statim quaesitas quantitates α, δ et ϱ haberemus per sequentes aequationes

$$x - X = \varrho \cos \delta \cos \alpha, \quad y - Y = \varrho \cos \delta \sin \alpha, \quad z - Z = \varrho \sin \delta$$

2. Ad inveniendas quantitates x, y, z dantur plures methodi

Primo situs planetarum versus Solem determinetur per coordinatas

x'', y'', z'' quarum x'' jacet in linea nodorum, $x''y''$ in plano eclipticæ, erit est, $x''=r\cos u$, $y''=r\sin u\cos n$, $z''=r\sin u\sin n$ vel etiam, si l et b sunt datæ
$x''=r\cos b\cos(l-k)$, $y''=r\cos b\sin(l-k)=r\sin b\,\mathrm{tg}\,n$, $z''=r\sin b$
Si autem hæ coordinatæ transeunt in alias x', y', z' quarum x' in linea aequinoctiorum, $x'y'$ in ecliptica jacent, est
$x'=x''\cos k-y''\sin k$, $y'=x''\sin k+y''\cos k$, $z'=z''$
et si tandem hæ coordinatæ cum primis x, y, z comparantur ubi x in linea aequinoctiorum, xy in aequatore jacent, erit
$x=x'$
$y=y'\cos e-z'\sin e$
$z=y'\sin e+z'\cos e$
Si omnia præcedentia conjunguntur, obtinemus pro coordinatis x, y, z sequentes expressiones
$x=r(\cos u\cos k-\sin u\sin k\cos n)$
$y=r(\cos u\sin k\cos e+\sin u\cos k\cos n\sin e-\sin u\sin n\sin e)$
$z=r(\cos u\sin k\sin e+\sin u\cos k\cos n\sin e+\sin u\sin n\cos e)$
Ut autem hæ expressiones ad calculum commodiores evadant, sit $\mathrm{tg}A=-\frac{\mathrm{tg}k}{\cos n}$, $\sin a=\frac{\cos k}{\sin A}$, et $\mathrm{tg}\psi=\frac{\mathrm{tg}n}{\cos k}$
$\mathrm{tg}B=\frac{\sin k\cos e\sin\psi}{\sin n\cos(\psi+e)}$, $\sin b=\frac{\cos e\sin k}{\sin B}$
$\mathrm{tg}C=\frac{\sin k\sin e\sin\psi}{\sin n\sin(\psi+e)}$, $\sin c=\frac{\sin e\sin k}{\sin C}$
et erunt sequentes simplices expressiones
$x=r\sin a\sin(A+u)$, $y=r\sin b\sin(B+u)$, $z=r\sin c\sin(C+u)$
et quilibet facile se convincere poterit, a, b, c, esse respectivas inclinationes plani orbitæ planetæ, versus coordinatarum plana yz, xz, et xy, et A, B, C, esse angulos quos linea nodorum orbitæ in ecliptica cum lineis nodorum orbitæ in iisdem coordinatis planis yz, xz, et xy faciunt, ubi xy est planum aequatoris, xz planum coluri aequinoctiorum et yz planum coluri solstitiorum. –
3. Si haberemus similes coordinatas pro terra, esset
$X=R\sin a'\sin(A'+U)$, $Y=R\sin b'\sin(B'+U)$, $Z=R\sin c'\sin(C'+U)$
et nos haberemus $A'=a'=90°$, $B'=C'=0$, $b'=90°+e$, $c'=e$ hinc quoque $X=R\cos U$, $Y=R\cos e\sin U$, $Z=R\sin e\sin U$
4. Quantitates $A, a\ldots$ secularibus variationibus sunt obnoxiæ quia quantitates n, k, e, a quibus dependent, similes variationes patiuntur. Quum autem hæ variationes admodum sint parvæ, et cum tempore fere uniformiter progrediuntur, commodissimum
est

est medios valores quantitatum n, k, e pro pluribus annis eligendi, et ex hoc pro iisdem epochis valores quantitatum A, a, ... in tabulis ponendi. Obtinemus hac ratione medios valores quantitatum A, a, ... et hinc quoq medias ascensiones rectas et declinationes α, δ, quae dein per notas correctiones nutationis etc facile ad veras α, δ reduci possunt.

Ad enucleationem priorum adducam exemplum.

Pro Mercurio est pro initio anni 1800

k = 45° 56′ 48″ annua tropica variatio + 48.″30
n = 7 0 8.9 - - - - - - - - - - - - - + 0.0178
e = 23 27 57.0 - - - - - - - - - - - - - - - − 0.52

Hinc est pro initio anni

	1800	1810	1820
A =	135° 43′ 56.″2	135° 51′ 9.″2	135° 58′ 22.″4
B =	48 26 19.3	48 33 47.4	48 41 15.5
C =	36 30 28.5	36 36 18.9	36 42 9.5
log. sin a =	9.9983267	9.9983197	9.9983129
log. sin b =	9.9450091	9.9450591	9.9451093
log. sin c =	9.6821782	9.6820388	9.6818994

Quaeratur v. c. pro 1808 8 Octobr. 11ʰ 45′ 41″ temporis medii Parisiis vera geocentrica ascensio recta et declinatio Mercurii. Pro hoc tempore est ex tabulis argumentum latitudinis $u = 212° 13' 26.''9$

log. radii vectoris seu log. $r = 9.6687470$, $k = 46° 3' 7.''7$, $n = 7° 0' 9.''1$

$e = 23° 27' 52.''4$

Pro eodem tempore est adhuc longitudo terrae $L = 15° 59' 35.''9$, $\log R = 9.9990770$

hinc est:

A = 135° 50′ 16.″1 log sin a = 9.9983206
B = 48 32 52.4 log sin b = 9.9450529
C = 36 35 35.9 log sin c = 9.6820559

ergo $X = 0.9592530$ $x = -0.0961018$
$Y = 0.2522046$ $y = -0.4056417$
$Z = 0.1094761$ $z = -0.2091323$

et ex hoc sequitur

Media geocentrica ascensio recta Mercurii $\alpha = 211° 56' 13.''2$
- - - - - - - - declinatio - - - - - - - - - $\delta = -14° 22' 12.''1$
$\varrho = 1.2837618$

Notari quoq potest, inter quantitates A, a ... notatu dignas relationes

relationes locum habere, quarum praecipuae sunt sequentes:

$$\sin(A-B)\sin a \sin b = \cos c$$
$$\sin(B-C)\sin b \sin c = \cos a$$
$$\sin(C-A)\sin c \sin a = \cos b$$
$$\sin^2 a \sin(A-B)\sin(A-C) = \cos(B-C)$$
$$\sin^2 b \sin(B-C)\sin(B-A) = \cos(A-C)$$
$$\sin^2 c \sin(C-A)\sin(C-B) = \cos(A-B)$$
$$\mathrm{ctg}(A-B)\,\mathrm{ctg}(C-A) = \cos^2 a$$
$$\mathrm{ctg}(B-C)\,\mathrm{ctg}(A-B) = \cos^2 b$$
$$\mathrm{ctg}(C-A)\,\mathrm{ctg}(B-C) = \cos^2 c$$
$$\cos(A-B) + \mathrm{ctg}\,a\,\mathrm{ctg}\,b = 0$$
$$\cos(B-C) + \mathrm{ctg}\,b\,\mathrm{ctg}\,c = 0$$
$$\cos(C-A) + \mathrm{ctg}\,c\,\mathrm{ctg}\,a = 0$$

et plures

(Vid. monatl. Corresp. 1804 May. Berl. Jahrb. 1813 p. 104 et 1818 p. 267)

Procedens methodus praecipue tum est applicabilis, si simul plura loca geocentrica sunt quaerenda, uti hoc locum habet apud constructionem ephemeridum, ubi valores A, a ... per integros menses iidem manent, quum resultata finalia tantum in minutis primis quaeruntur.

Quantitates x, y, z autem adhuc alio notabili modo exprimi possunt. Si nimirum introducuntur tres novae quantitates auxiliares N, K et O ita ut habeamus

$$\cos N = \cos e \cos n - \sin e \sin n \cos k$$
$$\mathrm{ctg}\,K \sin k = \mathrm{ctg}\,n \sin e + \cos e \cos k$$
$$\mathrm{ctg}\,O \sin k = \mathrm{ctg}\,e \sin n + \cos n \cos k$$

et si ponatur $O = -u + U$, tum priores aequationes in No 2 transeunt in sequentes

$$x = r(\cos U \cos K - \sin U \sin K \cos N)$$
$$y = r(\cos U \sin K + \sin U \cos K \cos N)$$
$$z = r \sin U \sin N$$

et nos videmus, nos obtinere ex illis has si n, k, u, in N, K, U mutantur et e aequale zero ponitur. Si igitur ubi ibi assumimus $\mathrm{tg}\,A = -\frac{\mathrm{ctg}\,K}{\cos N}$, $\mathrm{tg}\,B = \frac{\mathrm{tg}\,K}{\cos N}$, $\mathrm{tg}\,C = 0$

$\sin a = \frac{\cos K}{\sin A}$, $\sin b = \frac{\sin K}{\sin B}$, $\sin c = \sin N$ vel

$\cos a = \sin N \sin K$, $\cos b = -\sin N \cos K$, $\cos c = \cos N$
erit iterum
$$x = r \sin a \sin (A + u)$$
$$y = r \sin b \sin (B + u)$$
$$z = r \sin c \sin (C + u)$$

1. Per praecedentia igitur determinatio coordinatarum x. y. z est reducta ad tres quantitates N, K. O et facile videmus, N esse inclinationem orbitae ad aequatorem, K esse angulum lineae nodorum orbitae in aequatore cum linea aequinoctiorum, vel ascensionem rectam nodi adscendentis in aequatore, et tandem O angulum lineae nodorum orbitae in aequatore cum linea nodorum in ecliptica h. e. distantiam ambarum linearum nodorum.
Quum igitur in triangulo sphaerico quod formatur a plano aequatoris, a plano eclipticae et orbitae, latera sint k. O. K. et in eodem ordine oppositi anguli 180 − N, e et n, priores pro cos N, etg K, etg O datae expressiones, etiam per trigonometriam sphaericam derivari possunt, per quam etiam commode ad calculum inveniter

$$\sin \tfrac{N}{2} \sin \tfrac{O-K}{2} = \sin \tfrac{k}{2} \sin \tfrac{e-n}{2}$$
$$\sin \tfrac{N}{2} \cos \tfrac{O-K}{2} = \cos \tfrac{k}{2} \sin \tfrac{e+n}{2}$$
$$\cos \tfrac{N}{2} \sin \tfrac{O+K}{2} = \sin \tfrac{k}{2} \cos \tfrac{e-n}{2}$$
$$\cos \tfrac{N}{2} \cos \tfrac{O+K}{2} = \cos \tfrac{k}{2} \cos \tfrac{e+n}{2}$$

Quum tandem quantitates e. n. k peculiaribus variationibus sint obnoxiae, etiam quantitates N, K, O similibus variationibus sunt subjectae, quae facile per sequentes expressiones inveniuntur,

$$dN = de \cos K + dn \cos O - dk \sin O \sin n$$
$$dK = -de \operatorname{ctg} N \sin K + dn \frac{\sin O}{\sin N} + dk \frac{\cos O \sin n}{\sin N}$$
$$dO = de \cdot \frac{\sin K}{\sin N} - dn \operatorname{ctg} N \sin O + dk \frac{\cos K \sin e}{\sin N}$$

Ita invenitur ex prius datis valoribus quantitatum n. k. e pro Mercurio ad initium annorum

	1800	1810	1820
K =	10° 29′ 40.″6	10° 31′ 10.″2	10° 32′ 39.″5
O =	143 29 31.5	143 23 41.0	143 17 50.5
N =	28 45 11.4	28 44 35.5	28 43 58.7

et pro dato exemplo pro 1808. 8 Octobr. est
K = 10° 30′ 59.″2 — O = 143° 24′ 21.″1 — N = 28° 44′ 39.″9
ex quo sequitur

x = −0.096102, y = −0.405642, z = −0.209133 ubi prius

2. Priores considerationes dant nobis viam novam ad admodum commodam resolutionem nostri problematis.

Nostrae tabulae planetarum ita sunt constructae, ut ex iis pro quolibet dato tempore argumentum latitudinis et radium vectorem invenire possimus. Cum nota inclinatione orbitae n versus eclipticam et longitudine nodi ascendentis orbitae in ecliptica k inveniuntur dein ex duabus adnexis tabulis, quarum argumentum u est, heliocentrica latitudo b et reductio ad eclipticam c quae quantitates etiam derivari possunt ex sequentibus aequationibus

$\sin b = \sin n \sin u$, $\sin c = tg\frac{n}{2}\, tg b \cos u$ per quas quantitates dein $l = u + k - c$.

Si autem notae sunt quantitates r, l, b. dein sunt coordinatae rectangulares, quae si tum planetae versus solem dant, si x' est in linea aequinoctiorum et $x'y'$ in plano eclipticae,

$x' = r\cos b\cos l$, $y' = r\cos b\sin l$, $z' = r\sin b$ et quum quantitates r, l, b immediate ex tabulis sumuntur, derivatio coordinatarum $x'. y'. z'$ nullam habet difficultatem, quam ulteriorem earum reductionem ad aequatorem de qua prius sermo erat.

Hanc reductionem autem quoque evitare possumus, si tabulis planetarum aliam, nimirum eam constructionem respectu aequatoris damus, quam nunc respectu eclipticae habent. Ad hunc finem debent construi hae tabulae ita, ut dent, ubi prius, r et u nunc r et $U = u + O$, et ut illae ex duabus adnexis tabulis, quarum argumentum U est, heliocentricam declinationem d, et reductionem c quantitatis U ad aequatorem per aequationes sequentes dent $\sin d = \sin N \sin U$, $\sin c = tg\frac{N}{2}\, tg d \cos U$, per quod dein heliocentrica ascensio recta $a = U + K - c$ sequitur, quae etiam obtineri potest per expressiones

$$tg(a - K) = \cos N\, tg U$$
$$\cos(a - K) = \frac{\cos U}{\cos d}$$

Si praesupponimus hanc constructionem tabularum, vel cognitionem quantitatum N, K, U, ex iis immediate obtinemus, heliocentricam ascensionem rectam a et declinationem d planetae. Si dein nominamus $A. D$ heliocentricam ascensionem rectam et declinationem terrae, resolutio nostri problematis non amplius habet difficultatem.

Si nimirum retinemus priorem significationem ceterarum quanti„ tatum, dein habemus pro helio centrico loco planetæ

$x = r \cos d \cos a$, $y = r \cos d \sin a$, $z = r \sin d$

pro heliocentrico loco terræ

$X = R \cos D \cos A$, $Y = R \cos D \sin A$, $Z = R \sin D$

et pro geocentrico loco planetæ

$x - X = \varrho \cos \delta \cos \alpha$, $y - Y = \varrho \cos \delta \sin \alpha$, $z - Z = \varrho \sin \delta$

Si ergo ex primis duobus systematibus valores $x, X \ldots$ sunt in„ venti, ultimum systema dat

$tg\,\alpha = \frac{y-Y}{x-X}$, $tg\,\delta = \frac{z-Z}{x-X}$, $\cos \alpha = \frac{z-Z}{y-Y} \sin \alpha$, $\varrho = \frac{z-Z}{\sin \delta} = \frac{y-Y}{\sin \alpha \cos \delta} = \frac{x-X}{\cos \alpha \cos \delta}$

Pro hic indicatis valoribus quantitatum X, Y, Z commodius jam prius inventi $X = R \cos L$, $Y = R \cos e \sin L$, $Z = R \sin e \sin L$ adhiberi possunt, ubi L est longitudo terræ et e obliquitas eclip„ ticæ. Et pro evidentia ad nostrum exemplum pro Mercurio 1808. 8. Octobr. applicemus, habemus $a = 256° 40' 17.''6$, $d = -26° 38' 30.''4$ ergo $x = -0.096102$, $y = -0.405641$, $z = -0.209133$ uti prius.

Ad exercitationem volumus loca istius pulchri cometæ anni 1811 pro Julio 1812 secundum hanc methodum quærere. —

Elementa hujus cometæ sunt:

Transit per perihelium 1811 Septem. 12.25175 medii temporis Parisiis

Longitudo perihelii - - - - - - - - $75° 1' 9.''2$

Longitudo ☊ - - - - - - - - $K = 140\ 24\ 29.9$

Inclinatio - - - - - - - - $n = 106\ 57\ 24.4$

log. minimæ distantiæ - - - - - - 0.0151120

log. semiparametri - - - - - - 0.3151432

excentricitas - - - - - - $\varepsilon = 0.9954056$

log. medii diurni motus - - - - - - 9.9374598

Quum si majus quam 90° est, cometa est retrogradus, seu ejus heliocentrica longitudo decrescit. —

In triangulo sphærico, quod ab ecliptica, æquatore et orbita co„ metæ formatur, sunt duo noti anguli

$e = 23° 27' 51''$, $180 - n = 73° 2' 35.''6$ et latus cognitum $180 - K = 39° 35' 30.''1$, hinc sunt cetera latera $O = 14° 42' 19''$, $180 - K = 37° 34' 35''$ et tertius angulus $N = 88° 30' 46.''0$ et quum inclinatio N minor est quam 90°, cometa respectu æquatoris est directus, etsi quoad eclipticam est retrogradus. —

Si v est vera anomalia pro aliqua epocha, est pro eodem tempore argumentum declinationis $u = v + C + 65^\circ 23' 21'' = v + 80^\circ 5' 40''$

Sed pro 1812 Jul. 5^h 15' 25" temporis medii Parisiis sunt tempora ellapsa a transitu per perihelium

296.74825, 306.74825, 316.74825

Ex hoc sequitur vera elliptica anomalia et logarithmus radii vectoris

119° 51' 14"	0.61229
120 40 50	0.62309
121 27 50	0.63351

hinc est cometae heliocentr. AR — heliocentr. declinatio

heliocentr. AR	heliocentr. declinatio
322° 57' 50"	19° 56' 26"
322 59 20	20 46 5
323 0 40	21 33 0

x	y	z
3.0731	2.3188	1.3966
3.1346	2.3630	1.4887
3.1948	2.4065	1.5797

Eadem ratione est pro terra

heliocentrica longitud.	logarithmus radii vectoris
283° 12' 30"	0.007219
292 44 43	0.007041
302 17 40	0.006664

X	Y	Z
0.23232	0.90804	0.39414
0.39295	0.85982	0.37321
0.54253	0.78742	0.34178

et hinc sequitur cometae

1812	geocentr. AR	geocentr. declinat.	log. ρ
5 Julii	333° 35' 30"	−17° 32' 20"	0.52290
15	331 15 50	−19 38 0	0.52113
25	328 35 50	−21 43 20	0.52439

Resolutio praecedentium sine dubio est simplicissima, quae pro hoc problemate dari potest, sed illa supponit etiam constructionem tabularum. Si hanc mutationem tabularum etsi optandam non suscipere, neq. derivare prius datas constantes N, K, C, commodissimum erit, ad determinationem valorum x, y, z, non ab u, sed a l, b, exire, quae ultimae quantitates in antiquioribus tabulis immediate datae sunt.

Si nimirum sunt x', y', z' coordinatae planetae respectu ecliptici, est $x' = r\cos b \cos l$, $y' = r\cos b \sin l$, $z' = r\sin b$, et si sunt x, y, z coordinatae planetae respectu aequatoris, erit:

$$x = x', \quad y = y'\cos e - z'\sin e, \quad z = y'\sin e + z'\cos e$$

Si brevitatis causa ponitur $\cos m = -2\cos e \cos b \sin^2 \frac{90-l}{2}$, $\sin n = \cos m \,\mathrm{tg}\, e$, dein est: $x = r\cos b \cos l$, $y = 2r\cos\frac{b+e+m}{2}\cos\frac{b+e-m}{2}$, $z = 2r\sin\frac{b+e+n}{2}\cos\frac{b+e-n}{2}$

In nostro exemplo est $u = 212^\circ\, 13'\, 26''.9$, $k = 46^\circ\, 3'\, 7''.7$, $n = 7^\circ\, 0'\, 9''.1$

hinc est $l = 258^\circ\, 4'\, 59''.0$, $b = -3^\circ\, 43'\, 38''.3$.

Si igitur est $e = 23^\circ\, 27'\, 52''.4$, est

$$x = -0.0961623, \quad y = -0.4056421, \quad z = -0.2091326$$

ex quibus cum inventis pro X. Y. Z valoribus sequitur

$$\alpha = 211^\circ\, 56'\, 13''.2 \qquad \delta = -14^\circ\, 22'\, 12''.0$$

Ut ex heliocentrica longitudine et latitudine iterum geocentrica longitudo et latitudo derivetur, volumus situm astri et terrae ad tria ad se invicem perpendicularia plana reducere volumus, quorum unum est ecliptica et quorum duo altera eorum polos habent in longitudine N et $N+90^\circ$ dein est, si iterum ponimus $r' = r\cos b$, $\varrho' = \varrho\cos\beta$, $R' = R\cos B$,

$$r'\cos(l-N) - R'\cos(L-N) = \varrho'\cos(\lambda-N)$$
$$r'\sin(l-N) - R'\sin(L-N) = \varrho'\sin(\lambda-N)$$
$$r'\,\mathrm{tg}\, b - R'\,\mathrm{tg}\, B = \varrho'\,\mathrm{tg}\,\beta$$

1. Quum quantitas N est arbitraria, sit $N = L$, si dein ponitur $P = \frac{r'}{R'}\sin(l-L)$, $Q = \frac{r'}{R'}\cos(l-L) - 1$ dein est.

$$\mathrm{tg}(\lambda-L) = \frac{P}{Q}, \quad \varrho' = \frac{PR'}{\sin(\lambda-L)} = \frac{QR'}{\cos(\lambda-L)} \text{ et } \mathrm{tg}\,\beta = \frac{r'\,\mathrm{tg}\, b - R'\,\mathrm{tg}\, B}{\varrho'}$$

2. Si $N = l$ et $P = \frac{R'}{r'}\sin(l-L)$. $Q = 1 - \frac{R'}{r'}\cos(l-L)$ dein est

$$\mathrm{tg}(\lambda-l) = \frac{P}{Q}, \quad \varrho' = \frac{Pr'}{\sin(\lambda-l)} = \frac{Qr'}{\cos(\lambda-l)}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{r'\,\mathrm{tg}\, b - R'\,\mathrm{tg}\, B}{\varrho'}$$

3. Si est $N = \frac{1}{2}(l-L)$ dein est $\mathrm{tg}(\lambda - \frac{1}{2}(l+L)) = \frac{r'+R'}{r'-R'}\mathrm{tg}\frac{1}{2}(l-L)$

$$\varrho' = (r'+R')\frac{\sin\frac{1}{2}(l-L)}{\sin(\lambda-\frac{1}{2}(l+L))} = r'-R'\frac{\cos\frac{1}{2}(l-L)}{\cos(\lambda-\frac{1}{2}(l+L))}, \quad \mathrm{tg}\,\beta = \frac{r'\,\mathrm{tg}\, b - R'\,\mathrm{tg}\, B}{\varrho'}$$

Si ponimus hic $\frac{R'}{r'} = \mathrm{tg}\,p$, est, $\frac{r'+R'}{r'-R'} = \mathrm{tg}(45^\circ+p)$

Sic etiam possumus ponere $N = k$ vel $N = \Omega$ etc.

Ut obtineamus alias expressiones, uti etiam non difficile erit, pro aequationibus ($r'\cos(l-N)$ ......) quae pertinent ad eclipticam, alias similes invenire quae aequatori sunt superstructae.

4. Tandem idem problema quoq alio modo resolvi potest.

Est $r' = r\cos b$ ~~$\varrho'^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\gamma$~~ $\varrho'^2 = r'^2 + R^2 - 2r'R\cos\gamma$,

$\mathrm{tg}\,\eta = \frac{r'\sin\gamma}{R - r'\cos\gamma}$ vel $\mathrm{tg}\,\eta = \frac{\sin\psi\sin\gamma}{\sin(\gamma-\psi)}$ ubi $\mathrm{tg}\,\psi = \frac{r'}{R}\sin\gamma$* vel etiam per sequentes expressiones: $\mathrm{tg}\frac{\pi-\psi}{2} = \frac{R-r'}{R+r'}\mathrm{tg}\frac{\pi+\eta}{2}$

$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\eta\,\mathrm{tg}\, b}{\sin\gamma}, \quad \varrho' = \frac{R\sin\gamma}{\sin\pi}.$$

Pro nostro exemplo est secundum n. 1.

$l - L = 242^\circ\ 5'\ 23''.1$, $\log. P = 9.6150464n$. $\log. Q = 0.0857585n$

$l - L = 198^\circ\ 41'\ 24''.4$, $\lambda = 214^\circ\ 41'\ 0''.3$ $\log. \rho' = 0.1083638$,

$\beta = -1^\circ\ 21'\ 11''.9$ et secundum n. 4.

$\psi = 22^\circ\ 23'\ 54''.9$, $\eta = 18^\circ\ 41'\ 24''.4$, $\beta = -1^\circ\ 21'\ 11''.9$

$\lambda = 180^\circ + \eta + L = 214^\circ\ 41'\ 0''.5$ et ex β, λ inveniuntur geocentrica ascensio recta et declinatio, si nimirum est $\varepsilon = 23^\circ\ 27'\ 52''.4$ erit $\alpha = 211^\circ\ 56'\ 13''.2$ et $\delta = -14^\circ\ 22'\ 11''.9$ uti prius. —

Ut igitur assignare possimus heliocentricum locum planetae, debemus supponere elementa ejus orbitae quae data, nimirum: 1° semiaxin majorem et ex hac fluentem sideream seu potius tropicam revolutionem, 2° excentricitatem, 3° longitudinem perihelii, 4° mediam longitudinem planetae pro aliquo tempore dato seu ejus epocham, 5° inclinationem orbitae et 6° situm lineae nodorum versus eclipticam vel aequatorem. — Hae duae ultimae determinant situm, priores tres magnitudinem et formam orbitae. Si elementa 2. 3, 6 et 5 sunt variabilia, etiam hae variationes, quae fere semper tempori proportionales solent esse, debent esse datae. Si tempus transitus planetae per suum perihelium est datum, hoc elementum potest locum tenere 4. elementi. —

Cum his elementis quaeritur dein pro quolibet dato tempore media longitudo planetae. Si ab hac media longitudine hoc tempore locum habens longitudo perihelii p subtrahitur, obtinetur media anomalia m cum qua et excentricitate e invenitur vera anomalia v et radius vector r. Dein est vera longitudo planetae in orbita $l' = v + p$ et argumentum latitudinis $8 = l' - k$ ubi k est longitudo nodi ascendentis, ex quibus adhuc reducta longitudo l et heliocentrica latitudo b planetae derivari potest. —

Si in his calculis uti est commodissimum, electa est tropica

revolutio planetæ, ut inveniatur ejus media longitudo, etiam
ejus motum nodi et perihelia eorum tropicus motus sumi debet,
ex quo igitur obtinetur reducta vera longitudo l a puncto compu-
tata, in quo, medium punctum vernum hoc tempore revera est,
et ut hanc longitudinem a vero, per nutationem longitudinis
turbato puncto verno obtineamus, adhuc illi addere debemus

− 18.″03 Sin ☊.

Si praeterea ex hac ratione, invento heliocentrico loco planetæ, ejus
geocentricum locum derivare volumus, primo pro eodem tempore
secundum enucleata pro planeta praecepta, quaeri debet media
longitudo Solis, et ex hac dein vera longitudo et radius vector Solis
sequitur, augeri debet constanti aberratione Solis in longitudine
seu 20.″25, quia hae tabulæ illam per aberrationem imminutam
vel apparentem longitudinem Solis immediate dant. Tandem
huic longitudini a medio puncto verno etiam adhuc nutatio
− 18.″03 Sin ☊ addi debet, si haec uti illa planetæ a vero puncto
verno numeratur. —

Quomodo dein ex hoc heliocentrico loco planetæ conjunctim cum
geocentrico loco Solis, geocentricum locum planetæ derivare possi-
mus, in praecedentibus satis jam enucleatum est. —

Si volumus tandem sic calculatum locum geocentricum planetæ
cum aliquo observato loco geocentrico comparare, hoc duplici
modo possumus realisare, vel si apparentia, vel si media ejus
loca eliguntur ad comparationem. —

Hæ observationes planetarum et cometarum nimirum solent
dari per eorum apparentes ascensiones rectas et declinationes
ab Astronomicis h.e. continent adhuc aberrationem, nutationem
et parallaxin, ita, ut tantummodo sint correctæ per refractionem. —

Si igitur <u>primo</u> eliguntur <u>apparentia</u> loca, ad ista secundum prae-
cedentia inventa loca tabellaria geocentrica planetæ adhuc aber-
ratio et parallaxis applicari debet, et dein illa vel ope apparentis
obliquitatis eclipticæ reducuntur ad ascensionem rectam et decli-
nationem, vel reducuntur observata ascensio recta et declinatio

ope ejusdem apparentis obliquitatis eclipticæ ad longitudinem et latitudinem. —

Si autem eligimus secundo media loca ad comparationem, commodissimum erit, apud praecedentes tabulares calculos geocentrici loci planetæ et Solis nutationem plane omittere, et ea ope obliquitatis eclipticæ reducere ad ascensionem rectam et declinationem, hujus loco autem observatam ascensionem rectam et declinationem a nutatione, aberratione et parallaxi liberare vel etiam ex his ab ipsis tribus irregularitatibus liberatis observatis ascensionibus rectis et declinationibus cum media obliquitate eclipticæ quærere observatas longitudines et latitudines. — Securius erit, in ambobus casibus primam methodum retinendi, h. e. calculum prosequendi usque ad ascensiones rectas et declinationes, quia apud secundam methodum error observationum, qui vel in ascensione recta vel declinatione committebatur, etiam ad derivatam observatam longitudinem et latitudinem suum influxum exserit. —

Huc usque tantum cum problemate eramus occupati, ex heliocentrico loco planetæ aut cometæ, ejus locum geocentricum derivare. Cum autem per observationes immediate geocentricus situs horum corporum datus est, inquirere adhuc debemus, quomodo ex hoc situ ejus heliocentricum locum derivare possimus. — Si situs planetæ versus Solem per tres rectangulares coordinatas x, y, z determinatur, quarum x est in linea nodorum orbitæ cum aequatore, et xy in plano aequatoris, dein est, si priores significationes a, d, K, N, U retinentur

$$x = r\cos d \cos(a-K) = r\cos U, \quad y = r\cos d\,\mathrm{Sin}(a-K) = r\,\mathrm{Sin}\,U\cos N$$
$$z = r\,\mathrm{Sin}\,d = r\,\mathrm{Sin}\,U\,\mathrm{Sin}\,N$$

Eadem ratione habemus pro heliocentrico loco terræ

$$X = R\cos D\cos(A-K) \quad Y = R\cos D\,\mathrm{Sin}(A-K), \quad Z = R\,\mathrm{Sin}\,D$$

et hinc pro geocentrico loco planetæ

$$x - X = \varrho\cos\delta\cos(\alpha-K)$$
$$y - Y = \varrho\cos\delta\,\mathrm{Sin}(\alpha-K)$$
$$z - Z = \varrho\,\mathrm{Sin}\,\delta$$

Hae expressiones statim dant ~~duas~~ sequentes ~~x,y,z~~ aequationes:

$$\frac{y-Y}{z-Z} = \sin(\alpha-K)\,\mathrm{ctg}\,\delta \quad \text{et} \quad y = z\,\mathrm{ctg}\,N$$

et ex hoc sequitur

$$z = \frac{Z\sin(\alpha-K)-Y\,\mathrm{tg}\,\delta}{\sin(\alpha-K)-\mathrm{ctg}\,N\,\mathrm{tg}\,\delta}, \quad y = \frac{Z\sin(\alpha-K)-Y\,\mathrm{tg}\,\delta}{\sin(\alpha-K)-\mathrm{ctg}\,N\,\mathrm{tg}\,\delta}\,\mathrm{ctg}\,N$$

et si hic valor inventus quantitatis z in aequatione $\frac{x-X}{z-Z} = \cos(\alpha-K)\,\mathrm{ctg}\,\delta$ substituitur, erit

$$x = X + \frac{(Z\,\mathrm{ctg}\,N - Y)\cos(\alpha-K)}{\sin(\alpha-K)-\mathrm{ctg}\,N\,\mathrm{tg}\,\delta}$$

Si hac ratione x, y, z sunt inventae, inveniuntur α, d, r. ex $\mathrm{tg}(\alpha-K) = \frac{y}{x}$, ~~$\mathrm{tg}\,\delta$~~

$$\mathrm{tg}\,d = \frac{z}{y}\sin(\alpha-K) = \mathrm{tg}\,N\sin(\alpha-K), \quad r = \frac{z}{\sin d}$$

vel etiam $\mathrm{tg}\,u = \frac{y}{x\cos N} = \frac{z}{x\sin N}$ et $r = \frac{z}{\sin N\sin u}$ $\varrho = \frac{z-Z}{\sin\delta}$

Simplicior evadit haec resolutio, si pro aequatore sumitur ecliptica, et latitudo terrae B ponitur aequalis zero.

Dein habemus $x = r\cos u$, $y = r\sin u\cos n$, $z = r\sin u\sin n$,

$X = R\cos(L-K)$, $Y = R\sin(L-K)$, $Z = 0$

$x-X = \varrho\cos\beta\cos(\lambda-K)$, $y-Y = \varrho\cos\beta\sin(\lambda-K)$, $z-Z = \varrho\sin\beta$

Si igitur est, uti prius, $\mathrm{tg}\,A = \frac{\cos(L-K)\,\mathrm{tg}\,\beta}{\sin(L-\lambda)}$, dein est

$\mathrm{tg}\,u = \frac{\sin A\,\mathrm{tg}(L-K)}{\sin(A+n)}$, et si est $\mathrm{tg}\,B = \frac{\mathrm{tg}\,\beta}{\sin(\lambda-K)}$, est

$$\varrho = \frac{R\sin B\sin(L-K)\sin n}{\sin\beta\sin(B-n)}$$

$$r = \frac{R\sin B\sin(L-K)}{\sin(B-n)\sin u} \quad \text{et } r\sin n\sin u = \varrho\sin\beta$$

(Vid. monathliche Correspond. 1802 Junii)

Adhuc inquirere volumus, quomodo parvae variationes in situ geocentrico astri cum variationibus in situ heliocentrico et inverse sint conjunctae. Hunc finem assequemur per primas dictas tres aequationes. Si nimirum in his aequationibus ponitur $N=0$, statim per earum differentiationem obtinemus

$$d\varrho' = dr'\cos(l-\lambda) - r'dl\sin(l-\lambda)$$

$$\varrho' d\lambda = r'dl\cos(l-\lambda) + dr'\sin(l-\lambda)$$

$$\varrho' d\beta = dr'\cos\beta\{\mathrm{tg}\,b - \mathrm{tg}\,\beta\cos(l-\lambda)\} + r'\cos\beta\sin\beta\sin(l-\lambda)\,dl + r'db\,\frac{\cos\beta}{\cos^2 b}$$

et eadem ratione

$$dr' = d\varrho'\cos(\lambda-l) - \varrho' d\lambda \sin(\lambda-l)$$
$$r'dl = d\varrho'\sin(\lambda-l) + \varrho' d\lambda \cos(l-\lambda)$$
$$r'db = d\varrho'\cos^2 b\{tg\,\beta - tg\,b\cos(\lambda-l)\} + \varrho' d\lambda \cos b \sin b \sin(\lambda-l) + \varrho' d\beta \frac{\cos^2 b}{\cos^2\beta}$$

1. Ex his aequationibus facile geocentricum motum planetae pro dato tempore parvo, ex noto heliocentrico motu intra idem tempus, derivare possumus, si his aequationibus adhuc expressiones addimus, quae ex differentiationibus trium primarum aequationum (: $r'\cos(L-\lambda)$ etc.) respectu L et R sequuntur, ubi dL, dR, sunt variationes loci heliocentrici terrae, pro eodem intervallo temporis. Ad hos fines praecipue commodae sunt expressiones coordinatarum x, y, z, quae tantummodo dependent ab excentrica anomalia. — Nimirum, si f est semiaxis major orbitae et v, r, et $f\varepsilon$ vera anomalia radius vector et excentricitas, dein est, si e est excentrica anomalia, $r\sin v = f(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin e$, $r\cos v = f(\cos e - \varepsilon)$; si praeterea est h elongatio perihelii a nodo ascendente, argumentum latitudinis est $u = h+v$ et erit: $x = r\sin a \sin(A+h+v)$, $y = r\sin b \sin(B+h+v)$, $z = r\sin c \sin(C+h+v)$. — Ex prima harum aequationum obtinemus post aliquas reductiones
$$x = f\sin a \sin(A+h)\{\cos e - \varepsilon + (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin e \,ctg(A+h)\}.$$
Si igitur est $ctg\,M = \sqrt{1-\varepsilon^2}.\,ctg(A+h)$, $m = f.\frac{\sin a \sin(A+h)}{\sin M}$, $\mu = -m\varepsilon\sin M$, erit
$$x = m\sin(M+e) + \mu \quad \text{et eadem ratione}$$
$$y = n\sin(N+e) + \nu$$
$$z = p\sin(P+e) + \pi \quad \text{praesupposito}$$
$$tg\,N = \frac{tg(B+h)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad n = f.\frac{\sin b \sin(B+h)}{\sin N},\quad \nu = -n\varepsilon\sin N$$
$$tg\,P = \frac{tg(C+h)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}},\quad p = f.\frac{\sin c \sin(C+h)}{\sin P},\quad \pi = -p\varepsilon\sin P$$
et hae expressiones tantummodo praesupponunt excentricam anomaliam e quae datam. —
Istae expressiones dant
$$dx = m\,de\cos(M+e)$$
$$dy = n\,de\cos(N+e)$$
$$dz = p\,de\cos(P+e)$$
et si pro terra similes constantes evolvimus, quas per signa distinguere volumus, erit:
$$dX = m'de'\cos(M'+e')$$
$$dY = n'de'\cos(N'+e')$$
$$dZ = p'de'\cos(P'+e')$$
Sed aequationes
$$x - X = \varrho\cos\delta\cos\alpha$$
$$y - Y = \varrho\cos\delta\sin\alpha$$
$$z - Z = \varrho\sin\delta \quad \text{dant differentiando,}$$
$$d\alpha = \frac{(dy-dY)\cos\alpha - (dx-dX)\sin\alpha}{\varrho\cos\delta}$$

$$d\delta = (dz-dZ)\frac{\cos\delta}{\varrho} - (dy-dY)\frac{\sin\alpha\sin\delta}{\varrho} - (dx-dX)\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\varrho}$$

Si in his aequationibus substituuntur valores quantitatum dx et dX, obtinemus admodum simplices aequationes hujus formae

$$\left.\begin{array}{l} d\alpha = A\,de + A'de' \\ d\delta = B\,de + B'de' \end{array}\right\} \text{ - - - (I)}$$

et hae dant immediate horarium motum in geocentrica ascensione recta et declinatione ex nota horaria variatione anomaliarum excentricarum. —

2. Ex praecedentibus sequitur, geocentricam longitudinem planetarum secundum eorum diversos situs respectu terrae modo crescere modo decrescere et modo immutatam manere (stationarii). Ad inveniendum locum stationis planetae, volumus brevitatis causa earum orbitas quasi circulares et in plano ecliptices assumere, dein est: $\frac{dl}{dL} = \frac{R\cos\eta}{r\cos\pi}$, sed est $\frac{R}{r} = \frac{\sin\pi}{\sin\eta}$ et si t et T sunt revolutiones planetae et terrae circa solem, erit $\frac{dl}{dL} = \frac{T}{t}$ si autem a est radius orbitae planetae, radio orbitae terrae aequali unitati supposito, habemus secundum praecedentia $T^2a^3 = t^2$ ergo est pro statione planetae generatim

$$tg\,\eta = a^{-\frac{3}{2}}\,tg\,\pi$$

3. Eadem expressiones etiam ex sequentibus generalibus considerationibus derivari possunt. Quaecunque quantitas N sit, semper est

$$tg(\lambda - N) = \frac{a\sin(l-N) - \sin(L-N)}{a\cos(l-N) - \cos(L-N)} \text{ - - - - (II)}$$

Si in hac aequatione differentiale quantitatis $(\lambda - N)$ ponitur aequale zero erit pro statione

$$\frac{d(\lambda-N)}{d(L-N)} = -\frac{(1-a\cos(l-L))}{a-\cos(l-L)}.$$

sed est $l-L=\gamma$ et $\frac{d(l-N)}{d(L-N)} = \frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$ ergo

$$\cos\gamma = \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$

praeterea est $tg\,\eta = \frac{a\sin\gamma}{1-a\cos\gamma}$ et $tg\,\pi = \frac{\sin\gamma}{a-\cos\gamma}$ ergo est, si valor inventus pro γ substituitur

$$\left.\begin{array}{l} tg\,\eta = \frac{a}{\sqrt{1+a}} \\ tg\,\pi = -\frac{1}{\sqrt{a(1+a)}} \\ tg\,\gamma = (1-a^{\frac{1}{2}})\left\{\sqrt{\frac{1+a}{a}}\right\} \end{array}\right\} \text{ - - - (III)}$$

et hinc

$$tg\,\eta = -\,a^{\frac{3}{2}}\,tg\,\pi \text{ uti prius}$$

Etiam habemus $\frac{l-N}{L-N} = a^{-\frac{3}{2}}$ et

$$\cos\{(l-N)-(L-N)\} = \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}$$

et ex conjunctione harum duarum expressionum sequitur:

$$\left.\begin{aligned}\cos\{(a^{\frac{3}{2}}-1)(L-N)\} &= \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}\\ \cos\left\{\frac{(a^{\frac{3}{2}}-1)(L-N)}{a^{\frac{3}{2}}}\right\} &= \frac{a^{\frac{1}{2}}(1+a^{\frac{1}{2}})}{1+a^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}\right\} \ldots (IV)$$

Aequationes (III) dant η, π et z pro statione, et aequationes (IV) dant motum heliocentricum $(l-N)$ et $(L-N)$ planetae et terrae ab heliocentrica conjunctione (: ubi $l = L$:) usque ad stationem, sive, supposito N esse punctum eclipticae, pro quo terra et planeta sunt in heliocentrica conjunctione. Si deinde ex (IV) inventi valores quantitatum $(l-N)$ et $(L-N)$ in aequatione (II) substituuntur, obtinemus $(\lambda-N)$ seu motum geocentricum planetae in eodem intervallo temporis. —

Non minoris momenti est disquisitio spatii seu zonae coeli in qua tantum datum corpus nostri systematis planetarii a terra nostra videri potest. —

Si retinemus priores significationes, est

$$x-X = \varrho\cos\beta\cos\lambda$$
$$y-Y = \varrho\cos\beta\sin\lambda$$
$$z-Z = \varrho\sin\beta$$

et quum geocentrica longitudo et latitudo λ, β, sint functiones argumenti latitudinis u et U planetae et terrae, assumere possumus

$$d\lambda = p\,du + P\,dU$$
$$d\beta = q\,du + Q\,dU$$

Si autem ponimus in his aequationibus quantitatem λ constantem, hinc $d\lambda = 0$, erit $\left(\frac{d\beta}{du}\right) = \frac{pQ - qP}{P}$ et nos videmus quantitatem β pro eodem valore quantitatis λ tamdiu crescere vel decrescere, donec valor quantitatis β pro $pQ - Pq = 0$ (I) evadit maximum aut minimum, et eundem valorem quantitatis β pro illo λ designare terminos illius zonae, extra quos planeta a terra non amplius videri potest. — Ut autem haec ultima aequatio (I) quae solutionem nostri problematis continet, ad applicationem commodior evadat, habemus per divisionem primarum aequationum, $tg\lambda = \frac{y-Y}{x-X}$ et $tg\beta = \frac{z-Z}{x-X}\cos\lambda$. —

Si autem sumimus partialia differentialia harum ultimarum expressionum, obtinemus

$$p = \frac{dx \sin\lambda - dy \cos\lambda}{\rho \cos\beta \, du}$$

$$P = \frac{dX \sin\Lambda + dY \cos\Lambda}{\rho \cos\beta \, dU}$$

$$q = \frac{dx \cos\lambda \sin\beta + dy \sin\lambda \sin\beta - dz \cos\beta}{\rho \, du}$$

$$Q = -\frac{dX \cos\Lambda \sin\beta - dY \sin\Lambda \sin\beta + dZ \cos\beta}{\rho \, dU}$$

et substitutis his valoribus in prius inventa aequatione conditionali (I) erit:

$$\begin{aligned} & dx(YdZ - ZdY) + dX(ydz - zdy) \\ & + dy(ZdX - XdZ) + dY(zdx - xdz) \\ & + dz(XdY - YdX) + dZ(xdy - ydx) = 0 \quad \ldots (II) \end{aligned}$$

et haec aequatio continet generaliter relationem inter locos terrae et planetae, pro quibus geocentricus locus planetae in limites istius zonae cadit et tantummodo debemus in ea pro x, y, z valores per u et pro X, Y, Z valores per U substituere, ut acquiramus finalem aequationem inter u et U. Facile quoque nos convincere possumus (II) simul esse aequationem conditionis tangentes locorum terrae et planetae jacere in uno plano.

Si nunc assumimus pro x, y, z et X, Y, Z valores

$x = r \sin a \sin(A+u)$ etc $\quad X = R \sin a \sin(A'+U)$ etc

quos jam prius dedimus, et si nominamus k, K semiparametros orbitarum, quas describit planeta et terra, uti ε, E excentricitates, uti g, G distantias apheliorum a linea nodorum, est

$$r = \frac{k}{1 - \varepsilon \cos(u-g)} \quad \text{et} \quad R = \frac{K}{1 - E \cos(U-G)} \quad \text{(Sect. con.)}$$

et quibus post aliquas reductiones invenitur

$$\frac{dx}{du} = \frac{k \sin a}{(1 - \varepsilon \cos(u-g))^2} \cdot \{\cos(A+u) - \varepsilon \cos(A+g)\}$$

et eadem ratione dy, dz si in hac ultima expressione a, A in b, B vel c, C mutantur, uti et dX, dY, dZ si in dx, dy, dz pro quantitatibus pro planeta ponuntur analogae pro terra. Tandem est:

$$\frac{ydz - zdy}{du} = r^2 \cos a$$

$$\frac{zdx - xdz}{du} = r^2 \cos b$$

$$\frac{xdy - ydx}{du} = r^2 \cos c$$

et similes expressiones inveniuntur pro $\frac{YdZ - ZdY}{dU}$ etc

Si omnes hæ expressiones substituuntur in priori aequatione conditionali (II), obtinemus

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{K}\{\cos a'\sin a(\cos(u+A)-\varepsilon\cos(g+A))\}\\
+\ &\mathfrak{K}\{\cos b'\sin b(\cos(u+B)-\varepsilon\cos(g+B))\}\\
+\ &\mathfrak{K}\{\cos c'\cos c(\cos(u+C)-\varepsilon\cos(g+C))\}\\
+\ &K\{\cos a\sin a'(\cos(U+A')-E\cos(G+A'))\}\\
+\ &K\{\cos b\sin b'(\cos(U+B')-E\cos(G+B'))\}\\
+\ &K\{\cos c\sin c'(\cos(U+C')-E\cos(G+C'))\} = 0 \ldots\ldots (III)
\end{aligned}$$

Si autem respicimus jam prius datos valores quantitatum $A', B' \ldots a', b' \ldots$ (: $\operatorname{tg} A = -\frac{\operatorname{tg} K}{\cos n}$ etc:) ex ultima aequatione obtinemus post aliquas reductiones, sequentem simplicem expressionem

$$\mathfrak{K}(\cos u-\varepsilon\cos g) = K(\cos U-E\cos G)$$

(Gauss:) Si eligimus in hac aequatione pro u quemcunq valorem et ex
(Pasquich) hoc determinamus valorem correspondentem quantitatis U, facile ex his valoribus u et U geocentricam longitudinem et latitudinem seu ascensionem rectam et declinationem puncti limitis illius, tonc derivare poterimus, qui pertinet ad hunc valorem u. (: Vid. monathl. correspond. 1804. Augusti:)

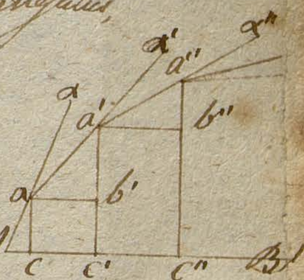
Antiquiores non potuerunt verum causam horum phænomenorum, hoc est stationes et retrogradationes planetarum, neq inæqualitates eorum motuum quæ dependent ab eorum excentricitate, explicare. Jam vulgata opinio, circulum esse omnium linearum curvarum perfectissimam, hinc esse illam, quæ a natura pro orbitis corporum cœlestium electa est, quæ opinio quoq immortalem Keplerum in suis disquisitionibus longum tempus detinebat, Græcos perduxit ad aliquam hypothesin explicandi illas duas irregularitates. —

Assumserunt nimirum, terram esse extra centrum alicujus circuli in quiete, et in peripheria hujus circuli moveri centrum alicujus circuli. Primus vocabatur circulus excentricus, et secundus epicyclus. In peripheria epicycli tandem movebatur planeta, et quidem erat pro inferioribus planetis (Mercurio et Venere) revolutio centri epicycli circa terram æqualis revolutioni Solis circa terram, et revolutionem planetæ in epicyclo aequalem synodicæ revolutioni planetæ circa Solem — pro superioribus planetis autem,

revolutionem centri epicycli aequalem synodicae revolutioni planetae, et revolutionem planetae in suo epicyclo aequalem synodicae revolutioni Solis esse. Superiores planetae igitur erant semper in conjunctione cum Sole, et inferiores in inferiori conjunctione, in illo puncto eorum epicyclorum quod terrae erat vicinissimum. — Clarum autem est, phaenomena evadant eadem, si loco primi excentrici circuli alius substituitur, in cujus centro terra quiescit, et in cujus peripheria movetur epicyclus, cujus radius aequalis est distantiae, qua in circulo excentrico ejus centrum a terra distabat. —

Sit $Aa = a$ radius primi, $aa' = a'$ secundi epicycli, et pro aliquo tempore dato $BAa = b$ angulus primi radii cum aliqua, quoad situm suum data linea recta —

AB et b' angulus prolongati radii a' cum eadem recta AB; r distantia puncti extremi radii a' ab A, et tandem φ angulus quem r cum recta AB format. His suppositis, est



$$tg\,\varphi = \frac{a\sin b + a'\sin b'}{a\cos b + a'\cos b'}$$

$$r^2 = a^2 + a'^2 + 2aa'\cos(b-b')$$

Si dein Δ est angulus, quem a et r ad A formant, erit $\Delta = b - \varphi$, hinc quoque $tg\,\Delta = \dfrac{a'\sin(b-b')}{a + a'\cos(b-b')}$

Ex his ultimis aequationibus, facile sequentem derivare possumus

$$\Delta = \alpha\sin\beta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\sin 2\beta + \tfrac{1}{3}\alpha^3\sin 3\beta - \text{etc}$$

$$\log.\text{nat.}\,\frac{r}{a} = \alpha\cos\beta - \tfrac{1}{2}\alpha^2\cos 2\beta + \tfrac{1}{3}\alpha^3\cos 3\beta - \text{etc}$$

vel

$$\frac{r}{a} = 1 + \alpha\cos\beta + \tfrac{1}{4}\alpha^2(1-\cos 2\beta) + \tfrac{1}{8}\alpha^3(\cos 3\beta - \cos\beta) + \dots$$

ubi $\alpha = \dfrac{a'}{a}$ et $\beta = b - b'$ est. —

1. Si autem a est semiaxis major, $a\varepsilon$ excentricitas alicujus ellipsis, et m, v media et vera anomalia ab aphelio, dein est secundum praecedentia pro motu elliptico aequatio centri

$$\Delta = m - v = (2\varepsilon - \tfrac{\varepsilon^3}{4})\sin m - \tfrac{5}{4}\varepsilon^2\sin 2m + \tfrac{13}{12}\varepsilon^3\sin 3m - \text{etc}$$ et radius vector

$$\frac{r}{a} = 1 + \varepsilon\cos m - \frac{\varepsilon^2}{2}(\cos 2m - 1) + \frac{3\varepsilon^3}{8}(\cos 3m - \cos m)$$

Ex hoc sequitur epicyclum proponere motum angulorum in ellipsi, si non respiciuntur secundae et altiores potentiae quantitatis ε et ponitur $\frac{a'}{a} = 2\varepsilon$, et sub hac hypothesi distantias planetae a foco in ellipsi non posse repraesentari, quia pro hac deberet esse $\frac{a'}{a} = \varepsilon$. —

Haec contradictio antiquiores Astronomos facile de errore suae hypothesis convincere potuisset. Si nimirum R. R' sunt apparentes diametri planetae in duobus punctis suae orbitae ad quae pertinent distantiae r, r' erit: $rR = r'R'$ hinc pro motu elliptico

$$\frac{dv}{dm} = 1 - 2\varepsilon \cos m = \frac{1}{r^2} = hR^2$$ ubi h est quantitas constans, hinc

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{R^2}{R'^2}$$; pro epicyclo autem est, si ponitur $\frac{a'}{a} = 2\varepsilon$,

$$\frac{dv}{dm} = 1 - 2\varepsilon \cos m = \frac{1}{r} = h'R \quad \text{hinc} \quad \frac{dv}{dv'} = \frac{R}{R'}$$

Variatio apparentis diametri lunae autem est tam magna ut etiam antiquiorum Astronomorum observationes non effugere posset, quum illius valores in perigaeo et apogaeo sunt $R = 33'.518$, $R' = 29.366$

Motus horarius autem in iisdem punctis orbitae est

$$dv = 38'.366 \quad \text{et} \quad dv' = 29.447 \quad \text{ergo}$$

$$\frac{dv}{dv'} = 1.3028, \quad \frac{R^2}{R'^2} = 1.3027 \quad \text{et} \quad \frac{R}{R'} = 1.1414$$

quarum aequationum primae duae accurate concordant. —

2. Si per l. L heliocentricam longitudinem planetae et terrae et per r. R earum ad eclipticam projectas distantias a Sole, ubi tandem per λ geocentricam longitudinem planetae designamus, habemus secundum praecedentia

$$tg(\lambda - l) = \frac{\frac{R}{r}\sin(l-L)}{1 - \frac{R}{r}\cos(l-L)} \quad \text{et} \quad tg(\lambda - L) = \frac{\frac{r}{R}\sin(l-L)}{\frac{r}{R}\cos(l-L) - 1}$$

Quum hae expressiones eandem formam ~~cum~~ prius dato valore pro $tg\Delta$ habent, erit:

$$\lambda - l = \frac{R}{r}\sin(l-L) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin 2(l-L) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin 3(l-L) + \ldots\ldots \quad \text{et}$$

$$\lambda - L = \frac{r}{R}\sin(L-l) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \sin 2(L-l) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin 3(L-l) + \ldots\ldots$$

Ex hoc sequitur, secundam inaequalitatem planetarum quae venit a motu terrae respectu ejus motus angularis perfecte et accurate repraesentari posse per epicyclum cujus radius $\frac{R}{r}$ pro superioribus et $\frac{r}{R}$ pro inferioribus planetis est. Si igitur tantummodo primas potentias excentricitatis respicimus, duo epicycli, vel quod idem est, unus circulus excentricus cum uno epicyclo sufficit, ambas inaequalitates planetarum, respectu eorum motus angularis, non autem respectu eorum distantiarum, repraesentandi. Si autem vellemus etiam altiores potentias excentricitatis respicere, deinde deberemus numerum epicyclorum, uti et fecerunt Astronomi, augere. —

3. Sit $Aa = a$ radius primi, $aa' = a'$ secundi; $a'a'' = a''$ tertii epicycli etc et anguli, quos hi radii inter se formant, sint $Aaa' = b'$, $aa'a'' = b''$ $a'a''a''' = b'''$ etc. Arbitrarie assumta linea AB, formet cum primo radio Aa angulum b. Tandem sit r distantia centri A primi epicycli a centro ultimi epicycli et φ angulus inter r et AB, ubi Δ angulus inter r et primum radium a sine $b = \varphi + \Delta$

Sint $ac = y$, $a'c' = y'$, $a''c'' = y''$ --- perpendiculares ad AB et $Ac = x$, $Ac' = x'$, $Ac'' = x''$ --- dein est ubi facile videmus

$$x = a\cos b \qquad y = a\sin b$$

$$x' = x + a'\cos(b + b' - 2.90), \quad y' = y + a'\sin(b + b' - 2.90)$$

$$x'' = x' + a''\cos(b + b' + b'' - 4.90), \quad y'' = y' + a''\sin(b + b' + b'' - 4.90) \quad \text{etc}$$

ita, ut generatim rectangulares coordinatae alicujus horum centrorum a, a', a'', a''' .... sint

$$X = a\cos b - a'\cos(b + b') + a''\cos(b + b' + b'') - a'''\cos(b + b' + b'' + b''') + \text{etc}$$

$$Y = a\sin b - a'\sin(b + b') + a''\cos(b + b' + b'') - a'''\cos(b + b' + b'' + b''') + \text{etc}$$

Si autem X et Y sunt notae, inveniuntur φ, Δ et r ex sequentibus aequationibus: $tg\varphi = \frac{X}{Y}$, $tg\Delta = \frac{Xy - Yx}{Xx + Yy}$, $r^2 = X^2 + Y^2$

Si autem brevitatis causa ponimus $\frac{a'}{a} = \alpha$, $\frac{a''}{a} = \beta$, $\frac{a'''}{a} = \gamma$ ... et secunda harum aequationum, nimirum $tg\Delta = ____$, quae etiam ita scribi potest $tg\Delta = \frac{tg b - tg\varphi}{1 + tg b\, tg\varphi}$, substituendo pro φ suo valore, fiet:

$$tg\Delta = \frac{\alpha\sin b' - \beta\sin(b' + b'') + \gamma\sin(b' + b'' + b''') \text{---- etc}}{1 - \alpha\cos b' + \beta\cos(b' + b'') - \gamma\cos(b' + b'' + b''') \text{---- etc}}$$

4. Ut autem evolvatur Δ in seriem, quae progrediatur secundum potentias quantitatum α, β, γ, volumus ponere $a = 2.90 - b'$, $b = 4.90 - b' - b''$, $c = 6.90 - b' - b'' - b'''$, $d = 8.90 - b' - b'' - b''' - b^{IV}$ etc per quod prior expressio pro $tg\Delta$ transit in sequentem

$$tg\Delta = \frac{\alpha\sin a + \beta\sin b + \gamma\sin c + \delta\sin d + \ldots \text{etc}}{1 + \alpha\cos a + \beta\cos b + \gamma\cos c + \delta\cos d + \ldots \text{etc}}$$

Si e est basis logarithmorum naturalium et brevitatis causa ponitur $\varphi^a = e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}}$ et $\psi^a = e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}}$ erit ultima expressio

$$\frac{e^{2\Delta\sqrt{-1}} - 1}{e^{2\Delta\sqrt{-1}} + 1} = \frac{\alpha\psi^a + \beta\psi^b + \gamma\psi^c + \text{etc}}{2 + \alpha\varphi^a + \beta\varphi^b + \gamma\varphi^c + \text{etc}} \quad \text{vel}$$

$$e^{2\Delta\sqrt{-1}} = \frac{2 + \alpha(\varphi^a + \psi^a) + \beta(\varphi^b + \psi^b) + \gamma(\varphi^c + \psi^c) + \ldots}{2 + \alpha(\varphi^a - \psi^a) + \beta(\varphi^b - \psi^b) + \ldots}$$

Si hic iterum restituuntur valores quantitatum φ et ψ et ex utraque parte sumuntur logarithmi, erit

$$2\Delta\sqrt{-1} = \log\left(1+\alpha e^{a\sqrt{-1}} + \beta e^{b\sqrt{-1}} \dots\right) - \log\left(1+\alpha e^{-a\sqrt{-1}} + \beta e^{-b\sqrt{-1}} \dots\dots\right)$$

Sed in aequatione $\log(1+p+q+r \dots) = A - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} - \frac{D}{4} + \dots$ uti sumimus, dependent quantitates $p, q, r \dots$ a quantitatibus $A, B, C \dots$ ita, ut sit $A-p=0$, $B-Ap+2q=0$, $C-Bp+Aq+3r=0$, $D-Cp+Bq-Ar+4s=0$ etc. Si igitur pro $p, q, r \dots$ substituuntur priores valores $\alpha e^{a\sqrt{-1}}$, $\beta e^{b\sqrt{-1}} \dots\dots$ et derivantur valores quantitatum A, B, C, et ponitur $A - \frac{B}{2} + \frac{C}{3} - \dots = S$, et si substituuntur pro $p, q, r \dots$ etiam valores $\alpha e^{-a\sqrt{-1}}$, $\beta e^{-b\sqrt{-1}}$ etc et ponitur $A' - \frac{B'}{2} + \frac{C'}{3} - \frac{D'}{4}$ etc $= S'$, erit

$$\Delta = \frac{S-S'}{2\sqrt{-1}}$$

et ita invenitur post aliquas reductiones quaesita series pro Δ, nimirum

$$\begin{aligned}\Delta = {} & \alpha \sin a + \left(\beta \sin b - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \sin 2a\right) + \left(\gamma \sin c - \tfrac{1}{2}\cdot 2\alpha\beta \sin(a+b) + \tfrac{1}{3}\alpha^3 \sin 3a\right) \\ & + \left(\delta \sin d - \tfrac{1}{2}\left(2\alpha\gamma \sin(a+c) + \beta^2 \sin 2b\right) + \tfrac{1}{3}\cdot 3\alpha^2\beta \sin(2a+b) - \tfrac{1}{4}\alpha^4 \sin 4a\right) \\ & + \Big(\varepsilon \sin e - \tfrac{1}{2}\left(2\alpha\delta \sin(a+d) + 2\beta\gamma \sin(b+c)\right) + \tfrac{1}{3}\left(3\alpha^2\gamma \sin(2a+c) + 3\alpha\beta^2 \sin(a+2b)\right) \\ & \quad - \tfrac{1}{4}\cdot 4\alpha^3\beta \sin(3a+b) + \tfrac{1}{5}\alpha^5 \sin 5a\Big) + \text{etc}\end{aligned}$$

cujus seriei legem quilibet facile perspiciat. —

5. Adjumento hujus ultimae expressionis facile motum planetae in ellipsi, tam accurate uti volumus, repraesentare possumus. — Assumamus brevitatis causa, tempora revolutionum centrorum omnium epicyclorum inter se aequalia, et eorum quodlibet simul anomalisticae revolutioni planetae aequale esse ita, ut tantummodo determinatio diversorum radiorum epicyclorum restaret. His suppositis, habemus pro illis in (3) adhibitis valoribus $b' = b'' = b''' = \dots = 2.90 - m$, et pro ipsis in (4) assumtis $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3} = \frac{d}{4} = \dots = m$ ubi m mediam anomaliam designat. Si substituimus hos valores in praecedentibus expressionibus pro $\operatorname{tg}\Delta$ et Δ, obtinemus:

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{\alpha \sin m + \beta \sin 2m + \gamma \sin 3m + \delta \sin 4m + \dots}{1 + \alpha \cos m + \beta \cos 2m + \gamma \cos 3m + \delta \cos 4m + \dots}$$

et $\Delta = A \sin m - \frac{1}{2} B \sin 2m + \frac{1}{3} C \sin 3m - \frac{1}{4} D \sin 4m + \dots$ praesupposito, nos habere ad determinationem quantitatum $A, B, C \dots$

$A - \alpha = 0$, $B - A\alpha + 2\beta = 0$, $C - B\alpha + A\beta - 3\gamma = 0$

$D - C\alpha + B\beta - A\gamma + 4\delta = 0$ etc

ellipticae aequatio centri autem est

$$\Delta = m-v = (2\varepsilon - \tfrac{1}{4}\varepsilon^3 + \tfrac{5}{96}\varepsilon^5 + \dots)\sin m - (\tfrac{5}{4}\varepsilon^2 - \tfrac{11}{24}\varepsilon^4)\sin 2m + \dots$$

Si igitur factores quantitatum $\sin m$, $\sin 2m$, ... in ambabus expressionibus pro Δ sibi aequales ponuntur, et si v. c. usque ad quartam potentiam ε progredimur, obtinemus

radium primi epicycli $= 1$

secundi ...... $\alpha = 2\varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4}$

tertii ...... $\beta = \frac{3}{4}\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{24}$

quarti ...... $\gamma = -\frac{\varepsilon^3}{12}$

quinti ...... $\delta = \frac{\varepsilon^4}{24}$

Ad finem hujus materiae, volumus adhuc dare aliquod problema, quod quoque pertinet ad praecedentes considerationes, nimirum volumus quaerere aequationem superficiei, quae oritur si centrum ellipseos, cujus semiaxis major et minor a et b sit, in peripheria alicujus circuli movetur, cujus radius c est. Hanc superficiem primo volumus qua per rotationem ortam considerare. Sint nimirum $x = Az$, $y = Bz$ aequationes lineae rectae, quae transit per initium coordinatarum, et cum axe rotationis parallela est, dein est aequatio plani quod perpendiculariter insistit huic axi, $Ax + By + z = \alpha$, ubi α est quantitas arbitraria. Si cum hac aequatione conjungitur aequatio sphaerae

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(\alpha)$$

cujus centrum est punctum initiale coordinatarum et cujus radius est functio quantitatis α, ambae aequationes simul designant aequationem circuli, quem quodlibet punctum ellipseos intra rotationem describit. —

Si autem assumimus, ellipsin ab initio esse in plano xy, ejus aequationes sunt $y=0$, $a^2b^2 = b^2z^2 + a^2(x-c)^2$ et quum omnes praecedentes 4 aequationes simul locum habere debent, obtinebimus, si ex iis x, y, z eliminamus, aequationem inter α et $\varphi\alpha$ per quod incognita forma functionis $\varphi\alpha$, secundum problema determinabitur. Si brevitatis causa ponitur $A = B = 0$, h. e. axim rotationis aequalem axi quantitatis z, obtinetur per illam eliminationem

$$a^2b^2 = a^2b^2 + a^2(\sqrt{\varphi\alpha} - a^2 - c)^2$$

Si in hac ultima expressione pro α ponitur z et pro $\varphi\alpha$ quantitas $x^2+y^2+z^2$, habebimus equationem quesitæ superficiei

$$(\sqrt{x^2+y^2} - c)^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}z^2$$

1. Generatim si sunt aequationes axis rotationis

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

est generalis aequatio omnium per rotationem ortarum superficierum, si φ est arbitraria functio,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi(Ax + By + z) \text{ ------- } (I)$$

vel etiam cum partialibus differentialibus

$$(b-y+Bz)\left(\frac{dz}{dx}\right) - (a-x+Az)\left(\frac{dz}{dy}\right) + A(b-y) - B(a-x) = 0 \text{ ----- } (II)$$

quarum prima expressio est integrale secundæ. —

Si igitur sunt $F=0$, $f=0$ aequationes alicujus curvæ datæ (: F et f sunt aequationes inter x, y, z et constantes, et curva potest etiam esse dupplicis curvaturæ :) et queritur superficies, quæ oritur, si illa curva circa aliquem axem rotatur, cujus aequationes sunt $x = Az + a$, $y = Bz + b$, tantummodo ex duabus datis aequationibus curvæ et ex duabus sequentibus

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + z &= \alpha \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 &= \varphi\alpha \end{aligned}\right\} \text{ ----- } (III)$$

quantitates x, y, z eliminare debemus ex quo obtinebimus aequationem quæ $\varphi\alpha$ per α et alias constantes dabit, igitur formam functionis φ determinabit. — Si dein in hac ultima equatione pro α et $\varphi\alpha$ substituuntur precedentes valores in x, y, z obtinetur equatio quesitæ superficiei. Si autem tantummodo una equatio $F=0$ (plani) est data, quæ circam axin $x = Az + a$, $y = Bz + b$ rotatur, et queritur equatio alius plani, quod prius mobile planum in omnibus suis punctis tangit et includit, queri debet ex data equatione $F=0$ differentialia partialia $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ et substitui in equatione (II), per quod obtinetur equatio, quam per $f=0$ designare volumus. Si conjunguntur hæ duæ equationes $F=0$ et $f=0$ cum duabus equationibus (III), et tractantur omnes 4

uti prius, ex hoc formam functionis $\varphi\alpha$, et hinc quoque aequationem includentis superficiei obtinebimus.

2. Sed adhuc possumus aequationem prius consideratae superficiei, alia notabili via obtinere.

Aequatio superficiei, quae per rotationem ellipsos circa axin z oritur est: $a^2(x^2+y^2)+b^2z^2=a^2b^2$. — Si centrum hujus ellipsos movetur in linea curva, quae tota jacet in plano xy, et cujus aequationes sunt $x=u$ et $y=f(u)$ deinde est pro quolibet situ istius centri aequatio quaesita superficiei, quae per rotationem ellipsoidis oritur

$$(x-u)^2+(y-f(u))^2+\frac{b^2z^2}{a^2}=b^2 \text{ - - - - } (A)$$

Si autem centrum ellipsoidis in data linea curva arcum $\sqrt{du^2+(df(u))^2}$ progreditur, habebimus pro uno loco centri; si aequatio (A) respectu u differentiatur

$$x-u+(y-fu)\cdot\frac{dfu}{du}=0 \text{ - - - - } (B)$$

et ambae aequationes (A), (B) pertinent naturaliter ad quaesitam superficiem. Si igitur ex iis eliminatur quantitas u, obtinemus aequationem, quae est aequatio quaesita plani ~~superficiei~~. Si hinc ista curva in plano xy est, uti prius, circulus, cujus radius c est, habemus $x^2+y^2=c^2$ vel $u^2+(f(u))^2=c^2$ et hinc quoque

$$\frac{d.fu}{du}=\frac{-u}{\sqrt{c^2-u^2}}$$

His suppositis, aequationes (A) et (B) transibunt in sequentes

$$(x-u)^2+(y-\sqrt{c^2-u^2})^2+\frac{b^2z^2}{a^2}=b^2$$

$$x-u-(y-\sqrt{c^2-u^2})\cdot\frac{u}{\sqrt{c^2-u^2}}=0$$

Si ex his eliminatur quantitas u, obtinemus pro quaesito plano uti prius $(\sqrt{x^2+y^2}-c)^2=b^2-\frac{b^2z^2}{a^2}$ - - - - - 1)

3. Generatim, si $F=0$ aequatio alicujus superficiei inter x, y, z et unam constantem α est, quantitati α omnes possibiles valores ab $\alpha=-\infty$ usque ad $\alpha=+\infty$ dare possumus, pro quo habemus seriem planorum quae omnia per diversos valores quantitatis α a se invicem differunt.

Hae series omnium parum subsequentium superficierum erit terminata per aliam superficiem, quae includit omnes priores et tangit, et quam includentem superficiei F nominare volumus.

Si damus in equatione generali $F=0$ inclusi plani, quam α jam habuit determinatum valorem huic quantitati alium parva tantum modo quantitate differentem valorem $\alpha+d\alpha$, habemus equationem novi inclusi plani, quod quoad suam formam et situm a multum differt ab immediate praecedenti plano, et ambo plana se secabunt in aliqua linea quam caracteristicam nominare volumus. Hae caracteristica manifeste est communis linea tangens amborum sibi subsequentium planorum inclusorum cum includenti et ejus puncta sunt illa primi inclusi, pro quo x, y, z se non mutant, dum in illo α transit in $\alpha+d\alpha$ h.e. si differentiatur equatio $F=0$ tantum modo respectu α, resultans equatio erit pro caracteristica, et quum hae curva etiam in prima inclusa superficie jaceat, sunt ambae equationes caracteristicae

$$F=0 \quad \ldots \quad (A)$$
$$\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)=0 \quad \ldots \quad (B).$$

Si igitur in equationibus (A) et (B) quantitati α successive damus omnes possibiles valores, obtinemus omnes sibi subsequentes caracteristicas, quae omnes in includenti superficie occurrunt, et ex quibus, ut ita dicamus, includens est composita. Si igitur eliminamus quantitatem α ex equationibus (A) et (B) obtinemus equationem per x, y, z. et hae equatio erit equatio includentis superficiei ipsa.

Si autem in istis duabus equationibus (A) et (B), quum jam quantitati α determinatus valor datus est (per quod situs caracteristicae in spatio pro speciali casu determinatus est.) quantitatem α in $\alpha+d\alpha$ transire facimus, novae duae equationes pertinebunt ad immediate subsequentem caracteristicam, quae praecedentem caracteristicam in uno vel pluribus punctis secabit. Hae puncta intersectionis autem sunt manifeste illa puncta primae caracteristicae, pro quibus valores quantitatum x, y, z se non mutant, si in equationibus (A) et (B)

valor quantitatis α solummodo mutatur. Ex hoc sequitur: si ambae aequationes (A, B) tantummodo respectu α differentiantur. Haec duae novae aequationis pertinent pro punctis intersectionum ambarum caracteristicarum, et quia haec puncta etiam in prima caracteristica occurrunt, et quia praeterea differentiatio aequationis (A) producat aequationem (B) habebimus pro quolibet horum punctorum sequentes aequationes $F=0$ ---- (A) $\left(\frac{dF}{d\alpha}\right)=0$ ---- (B) $\left(\frac{d^2F}{d\alpha^2}\right)=0$ ---- (C) ubi α illam omnium caracteristicarum determinat, in qua considerantur illa puncta, quae a sua vicinissima caracteristica secentur. Si igitur damus in tribus ultimis aequationibus quantitati α sucedentim omnes diversos valores, dum habemus tres aequationes in x, y, z, ex quibus valores quantitatum x, y, z inveniri possunt. Qui valores puncta intersectionum duarum subsequentium caracteristicarum dabunt quicunque sit valor quantitatis α. Si igitur eliminetur α ex his tribus aequationibus, habebimus duas aequationes in x, y, z sine α, et hae duae aequationes erunt pro linea, quae a sibi subsequentibus punctis intersectionum omnium caracteristicarum formatur, et haec linea ab omnibus caracteristicis eadem ratione tangitur uti superficies includens ab omnibus inclusis tangitur. —

4. Ceterum uti arcus cycloidis quae oritur per rotationem circuli est rectificabilis h. e. per lineam rectam exprimi potest, etiam prius considerata superficies, quae oritur per motum alicujus sphaerae aut ellipsoidis, developabilis h. e. haec superficies, si assumitur flexibilis et inextensibilis, ope simplicis flexionis in uno plano sine infractione et sine duplicatione potest extendi. Nam generalis aequatio superficierum developabilium inter differentialia partialia coordinatarum rectangularium x, y, z est uti scimus

$$\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)\cdot\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2$$

cui expressioni aequatio (1) in 2.) satisfacit. Integralia hujus aequationis differentialis sunt

$$\left.\begin{array}{l} y-\varphi\alpha=(x-\alpha)\,\frac{d.\varphi\alpha}{d\alpha} \\ z-\psi\alpha=(x-\alpha)\,\frac{d.\psi\alpha}{d\alpha}\end{array}\right\}\text{---}(a)$$

ubi $\varphi\alpha$ et $\psi\alpha$ designant arbitrarias functiones quantitatis α, vel etiam

$$\left.\begin{array}{l} z-\alpha=x\varphi\alpha+y\psi\alpha \\ 0=1+x.\frac{d.\varphi\alpha}{d\alpha}+y.\frac{d\psi\alpha}{d\alpha}\end{array}\right\}\text{---}(b)$$

vel tandem

$$\left.\begin{array}{l} 0=x-\alpha+(y-\varphi\alpha)\frac{d.\varphi\alpha}{d\alpha}+(z-\psi\alpha)\frac{d.\psi\alpha}{d\alpha} \\ 0=1+\left(\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}\right)^2+\left(\frac{d\psi\alpha}{d\alpha}\right)^2+(z-\psi\alpha)\frac{d\psi\alpha}{d\alpha} \\ \quad-(y-\varphi\alpha)\frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}-(z-\psi\alpha)\frac{d^2\psi\alpha}{d\alpha^2}\end{array}\right\}\text{---}(c)$$

et hinc est etiam aequatio quae obtinetur per eliminationem quantitatis α ex aequationibus (a) vel (b) vel (c) aequatio superficiei developabilis, inter finitas expressiones, ubi singulis duae harum aequationum, sine eliminatione quantitatis α pertinent pro caracteristica superficiei developabilis, quae uti videmus est linea recta. Si tandem adhuc conjungitur cum duabus aequationibus (b) differentiale secundae vel $x.\frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}+y.\frac{d^2\psi\alpha}{d\alpha^2}=0$, vel etiam si conjungitur cum ambabus aequationibus differentiale secundae, seu

$$0=3\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}.\frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2}+3\frac{d\psi\alpha}{d\alpha}.\frac{d^2\psi\alpha}{d\alpha^2}-(y-\varphi\alpha)\frac{d^3\varphi\alpha}{d\alpha^3}-(z-\psi\alpha)\frac{d^3\psi\alpha}{d\alpha^3}$$

hae duae aequationes secundum 3.) quae per eliminationem quantitatis α ex tribus talibus aequationibus obtinentur, pertinent pro linea curva, quae a subsequentibus punctis intersectionum omnium caracteristicarum formatur.

Hae et aliae similes disquisitiones inveniuntur in Monge Application de l'Analyse à la Géometrie Paris 1809.

Determinatio elementorum Planetarum et Cometarum ex observationibus geocentricis.

Proprietatum essentialium orbitarum corporum coelestium, per quas una ab altera distinguitur, vel elementorum parum orbitarum sunt generatim septem: magnitudo et situs axis majoris, excentricitas, inclinatio orbitę et locus ejus nodi, epocha planetę vel ejus locus in orbita pro tempore dato et tandem massa. In nunc sequentibus disquisitionibus, ubi planetę et cometę qua puncta assumuntur, vel ubi non respicimus eorum magnitudinem et formam, massa qua infinite parva respectu massę Solis assumitur. Ut igitur prima sex elementa determinentur, generatim tres perfectę observationes (v. c. tres geocentricę longitudines et latitudines) sufficiunt, ad formationem sex aequationum, ex quibus dein ista sex elementa qua totidem quantitates incognitę, sunt derivanda. Si assumimus orbitam esse Parabolam, de primo elemento vel magnitudine axis non est sermo; si assumimus orbitam circularem, secundum et tertium elementum seu situs axis et excentricitas evanescit; ex quo sequitur: pro parabola esse hoc problema cum tribus observationibus plus quam determinatum et pro circulo tantummodo duas observationes sufficere. —

In sequentibus volumus priores significationes retinere, et quantitates ad heliocentricum locum planetę pertinentes per parvas, illas ad heliocentricum locum terrę pertinentes per magnas litteras romanas, tandem illas ad geocentricum locum planetę pertinentes, per parvas litteras graecas designare. Rectangulares coordinatę quę determinant situm

planetę

planetæ versus Solem, sint igitur x, y, z, ejus helio centrica longitudo et latitudo l et b, et ejus distantia a Sole r uti et projectio hujus distantiæ ad eclipticam. Pro helio centrico loco terræ erunt hæ quantitates $X. Y. Z, L. B. R. D$, sed brevitatis causa ponemus $B=0$, $R=D$. Tandem pro geocentrico loco planetæ erunt hæ quantitates $\xi, v, \zeta, \lambda, \beta, \varrho, \delta$ ita, ut habeamus $\xi = x - X$, $v = y - Y$, $\zeta = z - Z$. Eædem quantitates sed pro secunda vel tertia observatione sint signatæ. et $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \mathfrak{T}''$ sint respective tempora inter 2. et 3., inter 1. et 3., et inter 1. et 2. observationem. —

Si nobis circumstantiæ motus primitivi corporis cœlestis notæ essent, facile ex his elementa orbitarum secundum generales leges motus derivare possemus. —

Si a est semiaxis major orbitæ ε ejus excentricitas c observanda celeritas pro radio vectore r, et t tempus a transitu planetæ per suum perihelium, est, uti vidimus (: motus Ellipticus)

$$c^2 = \mu^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad \text{et}$$

(27 Oct.)

$$\frac{r^2 dr^2}{dt^2} = \mu^2\left(2r - \frac{r^2}{a} - a(1-\varepsilon^2)\right)$$

Si autem C est celeritas planetæ ab initio sui motus, ubi $r=a=1$ est, erit $C^2 = \mu^2$ ergo $c = C.\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$. —

Si ergo initialis celeritas est nota, obtinemus semiaxin majorem ex æquatione $a = \dfrac{1}{\frac{2}{r} - \frac{c^2}{C^2}}$ et quum a in ellipsi est quantitas positiva, in Hyperbola negativa et in Parabola infinita est, orbita erit ellipsis, hyperbola vel parabola, si c minor vel major vel æqualis est $C.\sqrt{\frac{2}{r}}$. —

Sit φ angulus tangentis cum radio vectore et ds elementum arcus orbitæ, est $dr = ds\cos\varphi$, sed secundum generales leges motus est $c = \frac{ds}{dt}$ hinc $c = \dfrac{dr}{dt\cos\varphi}$ vel $\dfrac{dr^2}{dt^2} = \mu^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)\cos^2\varphi$

Si conjungatur hæc expressio cum æquatione $\left(:\frac{r^2 dr^2}{dt^2} = - - -\right)$ erit $a(1-\varepsilon^2) = \left(2r - \frac{r^2}{a}\right)\sin^2\varphi$ ex qua invenitur excentricitas. —

Aequatio linearum secundi ordinis est $\cos v = \frac{a(1-\varepsilon^2)-r}{\varepsilon r}$ ex qua vera anomalia v, et quum vera longitudo planetae per observationem est data, etiam vera longitudo perihelii vel longitudo quantitatis a invenitur. —

Sed quum nobis circumstantiae motus primitivi penitus ignotae sint, elementa orbitarum ex observationibus geocentricis aliis viis derivare debemus. —

Pro suppositione rectilineae seu circularis orbitae haec determinatio elementorum ex observationibus geocentricis est admodum facilis uti videbimus. Sed jam pro parabola et eo magis pro ellipsi evolvendae aequationes evadunt ita complicatae, ut resolutio directa fere impossibilis sit. Ut hoc monstremus breviter pro parabola, nobis statim prima adveniens aequatio dabit conditionem, orbitam astri jacere in plano, quod per centrum Solis transeat. Si istud centrum simul est initium coordinatarum x, y, z, aequatio hujus plani pro tribus observationibus erit

$$z = ax + by$$
$$z' = ax' + by'$$
$$z'' = ax'' + by''$$

Si eliminantur quantitates a, b, erit

$$0 = x(y''z' - y'z'') - x'(y''z - z''y) + x''(y'z - yz') \text{ -------- (I)}$$

et quum $x = \xi + X$, $y = v + Y$, $z = \zeta + Z$ et hae expressiones pro x, y, z tantummodo incognitam ϱ, pro x', y', z' incognitam ϱ' et tandem pro x'', y'', z'' incognitam ϱ'' continent, aequatio (I) est functio quantitatum $\varrho, \varrho', \varrho''$. Quum autem $r^2 = R^2 + \varrho^2 + 2R\varrho \cos\beta \cos(L-\lambda)$, ϱ erit functio r et eadem ratione ϱ' functio r' et ϱ'' functio r'', ita, ut igitur aequatio (I) qua functio harum trium quantitatum r, r', r'' considerari possit.

Secunda aequatio dabitur a conditione, orbitam esse parabolam, cujus focus centrum Solis est. Si sunt k, k', k'' rectilineae chordae inter locos planetae in 2 et 3, 1 et 3, ~~p~~ 1 et 2 observatione et si p est parameter orbitae erit. (mot. ellipt.)

$$p = \frac{k''^2 - (r'-r)^2}{r'+r-\sqrt{(r'+r)^2 - k''^2}} \quad \text{et} \quad p = \frac{k'^2 - (r''-r)^2}{r''+r-\sqrt{(r''+r)^2 - k'^2}}$$

et ambae ~~ex~~ expressiones sibi aequales positae, dant secundam quaesitam aequationem, quae etiam est functio quantitatum r, r', r'' quia

$$k''^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 \text{ ubi et de } k', k$$

Tandem conditio, tempora a radio vectore descripta spatiis esse propor-tionalia, dat (mot. ellipt.)

$$h\vartheta'' = \tfrac{1}{6}\left\{(r'+r+k'')^{\frac{3}{2}} - (r'+r-k'')^{\frac{3}{2}}\right\}$$
$$h\vartheta' = \tfrac{1}{6}\left\{(r''+r+k')^{\frac{3}{2}} - (r''+r-k')^{\frac{3}{2}}\right\}$$

ubi h est quantitas constans. Hac ratione obtinemus quatuor aequationes inter tres incognitas quantitates r, r', r'' sed nos videmus directam solutionem harum aequationum vires analyseos, vel saltem patientiam calculatoris transcendere. Quomodo autem ex quantitatibus r, r', r'' elementa inveni-untur, inferius enucleabitur. —

Igitur nihil aliud restat, quam resolvere nostrum problema via indirecta. Hoc problema consistit potissimum e duabus partibus in quarum prima e geocentricis observationibus distantiis r, r', r'' vel ρ, ρ', ρ'', et in quarum secunda ex his distantiis elementa orbitae derivantur. Primo loquemur de methodis quas dederunt Geometri pro resolutione primae partis hujus problematis. —

Nos habuimus prius aequationem $0 = x(y''z'-y'z'') - x'(y''z-yz'') + x''(y'z-yz')$ quam etiam sic exprimere possumus.

$0 = y(x'z''-z'x'') - y'(xz''-x''z) + y''(xz'-x'z)$ vel $0 = z(x'y''-x''y') - z'(x''y-xy'') + z''(x'y-xy')$

Sint f'', f', f areae triangulorum planorum inter initium coordinatarum inter radios r, r', r'' et rectilineas chordas in 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 observa-tione, et a, b, c inclinationes orbitae versus coordinata plana yz, xz, et xy dein sunt $f''\cos a$, $f''\cos b$, $f''\cos c$ projectiones trianguli f'' in iisdem pla-nis, sed hae projectiones sunt etiam, uti scimus

$\tfrac{1}{2}(y'z-yz')$ $\quad \tfrac{1}{2}(xz'-x'z)$ $\quad \tfrac{1}{2}(x'y-xy')$

Si eaedem expressiones evolvantur pro $f'\cos a$, $f'\cos b$, $f'\cos c$ et pro $f\cos a$, $f\cos b$, $f\cos c$ et substituuntur in tribus praecedentibus aequationibus obtinemus $0 = fx - f'x' + f''x''$, $\quad 0 = fy - f'y' + f''y''$, $\quad 0 = fz - f'z' + f''z''$

et si eadem ratione nominamus F, F', F'' areas triangulorum recti-lineorum inter centrum Solis et locis terrae in 1 et 2, 1 et 3, 2 et 3 obser-vatione erit $0 = FX - F'X' + F''X''$, $\quad 0 = FY - F'Y' + F''Y''$, $\quad 0 = FZ - F'Z' + F''Z''$

Haec duo systemata etiam hac ratione repraesentari possunt nimirum

pro planeta
$$\left.\begin{aligned}0 &= f(\delta\cos\lambda + D\cos L) \\ &- f'(\delta\cos\lambda' + D\cos L') \\ &+ f''(\delta\cos\lambda'' + D\cos L'')\end{aligned}\quad \begin{aligned}0 &= f(\delta\sin\lambda + D\sin L) \\ &- f'(\delta\sin\lambda' + D\sin L') \\ &+ f''(\delta\sin\lambda'' + D\sin L'')\end{aligned}\quad \begin{aligned}0 &= f\,\mathrm{tg}\,\beta \\ &- f'\,\mathrm{tg}\,\beta' \\ &+ f''\,\mathrm{tg}\,\beta''\end{aligned}\right\}(I)$$

et pro terra

$$\left.\begin{array}{ll} 0 = fD\cos L & 0 = fD\sin L \\ \quad - f'D'\cos L' & \quad - f'D'\sin L' \\ \quad + f''D''\cos L'' & \quad + f''D''\sin L'' \end{array}\right\} \text{---- (II)}$$

Brevitatis causa volumus introducere sequentes significationes

$$\begin{array}{ll} \alpha = tg\beta \sin(\lambda''-\lambda') & A = tg\beta'\sin(L-\lambda'') - tg\beta''\sin(L-\lambda') \\ \quad - tg\beta''\sin(\lambda''-\lambda) & B = tg\beta''\sin(L-\lambda) - tg\beta\sin(L-\lambda'') \\ \quad + tg\beta''\sin(\lambda'-\lambda) & C = tg\beta\sin(L-\lambda') - tg\beta'\sin(L-\lambda) \end{array}$$

et si in his tribus ultimis expressionibus

L transit in L', transeat A, B, C in A', B', C' — L in L'' transeat A, B, C in A'', B'', C''

Si multiplicatur prima aequationum (I) per $(\sin\lambda' tg\beta'' - \sin\lambda'' tg\beta')$

secunda ———— per $(\cos\lambda'' tg\beta' - \cos\lambda' tg\beta'')$

tertia ———— per $(\cos\lambda' \sin\lambda'' - \cos\lambda'' \sin\lambda')$

summa horum trium productorum dat

$$\left.\begin{array}{l} 0 = f(\alpha\delta + AD) - f'A'D' + f''A''D'' \\ \text{et eadem ratione } 0 = fBD - f'(\alpha\delta' + B'D') + f''B''D'' \\ 0 = fCD - f'C'D' + f''(\alpha\delta'' + C''D'') \end{array}\right\} \text{---- (III)}$$

Si e duabus primis harum aequationum (III) quaerantur valores pro δ, δ'', obtinemus $\frac{\delta}{\delta''} = \frac{A''f''}{B''f} +$ aliquo residuo, et hoc residuum est ordinis $(AB'-A'B)$, hinc potest respectu parvorum intervallorum temporis ϑ, ϑ'' respectu quoti $\frac{A''f''}{B''f}$ in prima approximatione negligi, hinc est $\frac{\delta}{\delta''} = -\frac{A''f'}{B'f}$, $\frac{\delta'}{\delta''} = -\frac{B'f''}{C'f'}$, $\frac{\delta''}{\delta} = +\frac{C'f}{A'f''}$ } ---- (IV)

Si tandem t est tempus inter arbitrarie assumtam epocham et momentum secundae observationis, est, uti sumimus, si x, y, z habent priores significationes:

$$x = x' - \vartheta''\frac{dx'}{dt} + \frac{\vartheta''^2}{1.2}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2} - \text{etc}$$

$$x'' = x' + \vartheta\cdot\frac{dx'}{dt} + \frac{\vartheta^2}{1.2}\cdot\frac{d^2x'}{dt^2} + \text{etc}$$

et similes expressiones habebimus etiam pro y, y'' et z, z''.

Si autem est log. $\mu^2 = 6.4711628$ (vid. mot. ellipt.), erit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu^2 x'}{r'^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu^2 y'}{r'^3}$$

Si igitur, uti prius, c est inclinatio plani orbitae versus planum xy

$$\left.\begin{array}{l} \text{erit } 2f\cos c = x''y' - x'y'' = \frac{p\vartheta}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta^2}{6r'^3}\right) \\ \text{et eadem ratione } 2f'\cos c = x''y - xy'' = \frac{p\vartheta'}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta'^2}{6r'^3}\right) \\ 2f''\cos c = x'y - xy' = \frac{p\vartheta''}{dt}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta''^2}{6r'^3}\right) \end{array}\right\} \text{---- (V)}$$

ubi $p = y'dx' - x'dy'$ est

Hae praecedentia sufficiunt ad derivationem praecipuarum ab Astronomis datarum solutionum nostri problematis ex uno fonte.

1. Si in aequationibus (III) pro $\frac{f''}{f}$, $\frac{f'}{f}$ approximative ponuntur valores $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$, $\frac{\vartheta'}{\vartheta}$, ex his obtinemus valores quantitatum $\delta, \delta', \delta''$

Nota aequatio $r'^2 = D'^2 + \delta'^2 \sec^2\beta' + 2D'\delta' \cos(L' - \lambda')$ - - - - (VI)

dein dat valorem pro r' et cum hoc valore quantitatis r' obtinentur ex aequationibus (V) accuratiores valores quantitatum f, f', f'' quibuscum iterum ex (III) accuratiores valores pro δ . . . quaeruntur et methodus, quae continuari potest. —

Hae prima solutio est data a celeb. Lagrange

Incommodum hujus resolutionis consistit in eo, ut error, qui committitur, si $\frac{\vartheta''}{\vartheta}$ pro $\frac{f''}{f}$ ponitur, pro parvis et fere aequalibus intervallis temporum, quae hic supponuntur, in derivato per aequationes (III) valore quantitatum δ . . . augeatur, uti quilibet se convincere potest.

2. Si in secunda aequationum (III) substituuntur valores pro $\frac{f}{f'}$ et $\frac{f''}{f'}$ ex (V), obtinemus

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''D''\vartheta'' + BD\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\mu^2\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right) \text{ - - - - - - (VII)}$$

et haec aequatio cum illa (VI) conjuncta, dat quantitates r' et δ' et aequationes (IV) cum (V) dein dant δ et δ''. Hae secunda resolutio ad quam serius reveniemus, est dat a celeb. Gauss (monathl. Correspond.)

3. Secunda aequationum (III) est $\alpha f\delta' = BfD - B'f'D' + B''f''D''$

seu analogice cum hac expressione etiam est $0 = B\vartheta D - B'\vartheta'D' + B''\vartheta''D''$

Si pro f, f', f'' eorum valores ex (V) substituuntur, et si in primo membro primae aequationis, quum jam in admodum parvam quantitatem α multiplicatum est, ϑ' pro f', differentia amborum aequationum erit

$$\alpha\delta' = \frac{\mu^2}{6\vartheta'}\left(BD\vartheta^3 - B'D'\vartheta'^3 + B''D''\vartheta''^3\right)\left(\frac{1}{D'^3} - \frac{1}{r'^3}\right)$$

et haec aequatio conjuncta cum (VI), dat post eliminationem quantitatis δ' sequentem expressionem

$$D'^6 r'^6(r'^2 - D'^2) - 2TD'^4 r'^3 \cos(L' - \lambda')(r'^3 - D'^3) - T^2\sec^2\beta(r'^3 - D'^3)^2 = 0$$

ubi brevitatis causa est $T = \frac{\mu^2}{6\alpha\vartheta'}\left(BD\vartheta^3 - B'D'\vartheta'^3 + B''D''\vartheta''^3\right)$

Quum haec aequatio per $(r' - D')$ divisibilis sit, ea est pro r' septimi gradus et continet tertiam resolutionem, quam celeb. Lagrange publici juris fecit. Aliam adhuc dedit Berl. Jahrb. 1785

4. Si ponimus $m = \frac{C'\partial}{A'\partial''}$ et hinc $\delta'' = m\delta$ erit analogice cum (VI)

$r^2 = D^2 + \delta^2 \sec^2\beta + 2D\delta\cos(L-\lambda)$, $\quad r''^2 = D''^2 + m^2\delta^2\sec^2\beta'' + 2mD''\delta\cos(L''-\lambda'')$

et pro chorda inter ambas extremas observationes

$$k^2 = (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2 \text{ vel}$$

$k^2 = r^2 + r''^2 - 2m\delta^2\{\cos(\lambda-\lambda'') + tg\beta\, tg\beta''\} - 2mD\delta\cos(\lambda''-L) - 2D''\delta\cos(\lambda-L'') - 2DD''\cos(L-L'')$

et hae tres aequationes conjunctae cum nota expressione pro parabola

$6\mu\partial'' = (r''+r+k)^{\frac{3}{2}} - (r''+r-k)^{\frac{3}{2}}$ ubi $\mu = 0.017202$, dant quatuor incognitas r, r'', δ et k; et haec est quarta solutio nostri problematis quam dedit celeb. Olbers.

5. Secunda aequationum (III) est etiam

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''f''D'' + BfD}{f+f''}\left(\frac{f+f''}{f'}\right)$$

Si ponimus $P = \frac{f}{f''}$ et $Q = 2r'^3\left(\frac{f+f''}{f'} - 1\right)$, erit

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''D'' + BDP}{1+P}\left(1 + \frac{Q}{2r'^3}\right) \text{ - - - - - (VIII)}$$

Si autem est ∂' elongatio in secunda observatione (vera, nondum reducta), et z' annua parallaxis, est

$\cos\partial' = \cos\beta'\cos(\lambda'-L')$ $\quad r' = D'\frac{\sin\partial'}{\sin z'}$ $\quad \delta' = D'\frac{\cos\beta'\sin(\partial'+z')}{\sin z'}$

Si hi valores pro r' δ' in aequatione (VIII) substituuntur et brevitatis causa ponitur $tg\sigma = \frac{-\frac{\alpha}{B'}\cos\beta'\sin\partial'}{1+\frac{\alpha}{B'}\cos\beta'\cos\partial'}$ et $\varepsilon = \frac{B'D'}{BD\cos\sigma}\left(1+\frac{\alpha}{B'}\cos\beta'\cos\partial'\right)$

obtinemus $\frac{Q\sin^4 z'}{2D'^3\sin^3\partial'} = \frac{\varepsilon(P+1)\sin(z'-\sigma)}{P + \frac{B''D''}{BD}} - \sin z'$

Si autem ponimus, ad adhuc majorem simplificationem

$$tg\omega = \frac{\sin\sigma}{\frac{\varepsilon(P+1)}{P+\frac{B''D''}{BD}} - \cos\sigma}\,, \qquad c = \frac{1}{2D'^3\sin^3\partial'\sin\sigma}$$

ultima aequatio evadit

$$c.Q.\sin\omega\sin^4 z' = \sin(z'-\omega-\sigma) \text{ - - - - - - (IX)}$$

et huic aequationi innititur quinta solutio nostri problematis, quam dedit Gauss in sua Theoria motus corporum coelestium. –

Ceterum facile videmus $A\cos\beta'\cos\beta''$ esse sextuplo volumini pyramidis ~~est~~ aequale, cujus vertex in Sole et cujus basis est triangulum, quod a terra in prima, et a planeta in secunda et tertia observatione in plano coeli formatur, et ita pro ceteris $B\cos\beta\cos\beta''$ $C\cos\beta\cos\beta'$ - - - - praesupposito, radium sphaere esse aequalem unitati. ——

Quartam parum solutionem accuratius considerare volumus. Si ex datis in (IX) 4. quatuor aequationibus quantitates $r, r'', \delta, \varkappa$ per quamcunque methodum et hinc quoq. $\delta'' = m\delta$ inventae sunt, elementa parabolica cometes inveniuntur sequenti ratione.

Heliocentrica longitudo et latitudo l, b, et l'', b'' in prima et ultima aequatione, inveniuntur ex sequentibus expressionibus

$$\left.\begin{aligned} r\cos b\cos(L-l) &= \delta\cos(L-\lambda)+D \\ r\cos b\sin(L-l) &= \delta\sin(L-\lambda) \\ r\sin b &= \delta\,tg\,\beta \\ \text{et}\quad r''\cos b''\cos(L''-l'') &= \delta''\cos(L''-\lambda'')+D'' \\ r''\cos b''\sin(L''-l'') &= \delta''\sin(L''-\lambda'') \\ r''\sin b'' &= \delta''\,tg\,\beta'' \end{aligned}\right\} \text{------ (a)}$$

et concordantia valorum r, r'' ex his aequationibus cum jam prius inventis servit ad comprobationem calculi. ——

Si nunc est ☊ longitudo nodi ascendentis et n inclinatio orbitae, erit $\pm tg\,b = tg\,n\sin(l-☊)$, $\pm tg\,b'' = tg\,n\sin(l''-☊)$ vel

$$\left.\begin{aligned} \pm tg\,b &= tg\,n\sin(l-☊) \\ \pm\frac{tg\,b''-tg\,b\cos(l''-l)}{\sin(l''-l)} &= tg\,n\cos(l-☊) \end{aligned}\right\} \text{--- (b)}$$

ex quibus his ultimis aequationibus $l-☊$ vel ☊ et n inveniuntur, signum superius si motus cometae est directus, inferius si est retrogradus. Si dein sunt v, v'' longitudines in orbita, erit

$$\left.\begin{aligned} tg(v-☊) &= \frac{tg(l-☊)}{\cos n} \\ tg(v''-☊) &= \frac{tg(l''-☊)}{\cos n} \end{aligned}\right\} \text{------ (c)}$$

ubi $v-☊$, $v''-☊$ in eodem quadrante sumi debent in quo fuerint $l-☊$, $l''-☊$. ——

Si dein est ω longitudo perihelii et q distantia perihelii a foco, erit (theoria parabolae)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{q}}\cos\frac{v-\omega}{2} &= \frac{1}{\sqrt{r}} \\ \frac{1}{\sqrt{q}}\sin\frac{v-\omega}{2} &= \frac{ctg\frac{v''-v}{2}}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sin\frac{v''-v}{2}\sqrt{r''}} \end{aligned}\right\} \text{--- —— (d)}$$

Tandem quaeritur e tabulis Barkerianis motus medius M et M'' qui correspondet verae anomaliae $v-\omega$, $v''-\omega$ vel $\omega-v$, $\omega-v''$ (per aequationem $75\,tg\frac{v}{2}+25\,tg^3\frac{v}{2}=ct$) dein est, si T est tempus transitus

transitus per perihelium

T = tempori primae observat. $\mp Mnq^{\frac{3}{2}}$, T = tempori tertiae observat. $\mp M''nq^{\frac{3}{2}}$ ubi log. n = 0.0498723 et signa superiora valent si apud motum directum $v > \omega$, $v'' > \omega$, vel si apud motum retrogradum $v < \omega$, $v'' < \omega$ est. Concordantia amborum valorum T dat secundam comprobationem calculi. —

Ex. Pro cometa anni 1799 habemus tres sequentes observationes quae in observatorio et in circulo multiplicatore institutae sunt.

	temp. medi Paris		
1799. Aug. 30	11h 9' 42"	λ = 125° 48' 39".3	β = 41° 53' 52".2
Sept. 2	10 36 8	λ' = 132 53 48.5	β' = 45 54 48.1
Sept. 4	10 7 51	λ'' = 138 56 31.2	β'' = 48 32 27.8

L = 337° 29' 8".7 $\quad R$ = 1.0087218
L' = 340 22 26.9 $\quad R'$ = 1.0079991
L'' = 342 17 47.8 $\quad R''$ = 1.0074854

hinc ϑ = 1.980350 dies, ϑ' = 4.957049 dies, ϑ'' = 2.976690 dies

ergo $m = \frac{\vartheta'''}{\vartheta'} = 0.787752$, et illae quatuor aequationes evadunt

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = 1.01752 - 1.71693\delta + 1.80493\delta^2 \\ r''^2 = 0.01503 - 1.45724\delta + 1.41564\delta^2 \\ K^2 = 0.00716 - 0.04739\delta + 0.08627\delta^2 \\ 135.84219 = \left(\frac{r''+r+K}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r''+r-K}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \end{array}\right\} \text{- - - -}$$

His aequationibus satis fit fere per δ = 0.71469 ex quo

r = 0.8440, r'' = 0.8346, — K = 0.1317, $\delta''' = m\delta$ = 0.562998

hinc l = 26° 37' 40".8, b = 49° 26' 23".1, — l'' = 6° 45' 39".7, b'' = 49° 46' 46".9

ergo cometa directus

Ex hoc sequitur ☊ = 100° 51' 53".4 $\quad n$ = 49° 51' 7".9

et argumenta latitudinis $v -$ ☊ = 83° 40' 9".6, $v'' -$ ☊ = 92° 38' 55".0

et longitudo perihelii ω = 4° 32' 8".2

distantia minima q = 0.8337741

vera anomalia in prima observatione v = 12° 39' 35".6 hinc si T est tempus inter primam observationem et transitum per perihelium $T = \frac{(cq)^{\frac{3}{2}}}{2\mu}\left(\text{tg}\frac{v}{2} + \frac{1}{3}\text{tg}^3\frac{v}{2}\right)$ = 6.97118 = 6d 23h 18' 30"

30 August — 11 9 42

tempus transitus per perihelium 6 Sept. 10h 28' 12"

In prioribus 2.) habuimus

$$\alpha = -\frac{B'D'}{\delta'} + \frac{B''D''\vartheta'' + BD\vartheta}{\vartheta'\delta'}\left(1 + \frac{\mu^2\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right)$$

et ibidem 3.) erat $0 = BFD - B'F'D' + B''F''D''$

Si in hac aequatione substituitur ex aequatione (V) valor pro F.

$F' = \frac{p\vartheta}{2dt\cos c}\left(1 - \frac{\mu^2\vartheta^2}{6R'^3}\right)$ etc, illam fere aequalem ponere possumus

$$0 = BD\vartheta - B'D'\vartheta' + B''D''\vartheta'' + B'D'\vartheta' \cdot \frac{\mu^2\vartheta\vartheta''}{2R'^3}$$

Si igitur substituimus in praecedenti valore pro α, valorem pro $BD\vartheta + B''D''\vartheta''$ ex ultima aequatione, erit, si negliguntur altiores potentiae quantitatis μ^2,

$$\frac{\alpha}{B'} \cdot \frac{2}{\mu^2 \cdot \vartheta\vartheta''} = -\left(\frac{1}{D'^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\frac{D'}{\delta'} \text{ - - - - - } (A)$$

et si hae aequatio conjungitur cum sequenti

$$r'^2 = D'^2 + \delta'^2 \sec^2\beta' + 2D'\delta'\cos(L' - \lambda') \text{ - - - } (B)$$

possumus ex his duabus aequationibus valores duarum incognitarum δ', r' invenire, et dein erit

$$\delta = -\frac{A'}{B'} \cdot \frac{\vartheta'}{\vartheta} \cdot \delta' \quad \text{et} \quad \delta'' = -\frac{C'}{B'} \cdot \frac{\vartheta'}{\vartheta''} \cdot \delta'$$

<u>Ex.</u> Nos applicabimus praecedentia ad sequentes tres observationes Vestae

1807	tempus med. Paris		
24. April	9h 5' 16".5	$\lambda = 174°\ 7'\ 33".2$	$\beta = +10°\ 37'\ 24".1$
29. April	8 43 42.2	$\lambda' = 173\ 44\ 21.3$	$\beta' = 11\ 19\ 42.6$
4. Maji	8 22 51.2	$\lambda'' = 173\ 33\ 33.0$	$\beta'' = 11\ 0\ 39.2$

$L = 213°\ 42'\ 55".5$ ... $\log D = 0.0028540$

$L' = 218\ 33\ 22.4$ ... $\log D' = 0.0034240$

$L'' = 223\ 23\ 15.5$ ... $\log D'' = 0.0039670$

hinc $\vartheta = 4.9855208$ dies, $\vartheta' = 9.9705405$ dies, $\vartheta'' = 4.9850197$ dies

$$\log \alpha = 5.3424727$$

$\log A = 7.6214048$ — $\log B = 7.9368564_n$ — $\log C = 7.6514234$

$\log A' = 7.6537430$ — $\log B' = 7.9651452_n$ — $\log C' = 7.6756959$

$\log A'' = 7.6808882$ — $\log B'' = 7.9887417_n$ — $\log C'' = 7.6956918$

Hinc dant duae ultimae aequationes (A) et (B)

$$r'^2 = 1.0158930 + \overline{0.1553219}\,\delta' + \overline{0.0170896}\,\delta'^2$$

$$\frac{1}{D'^2\delta'} - \frac{D'}{r'^3\delta'} = \overline{0.6483616}$$

ubi isti signati numeri v.g. $\overline{0.155\ldots}$ sunt jam logarithmi

Ex his duabus aequationibus sequitur

$$\log r' = 0.3477013, \quad \log \delta' = 0.1390755$$

et ex hoc $\log. \delta = 0.1286815$, $\log. \delta'' = 0.1560780$

Nos videmus similitudinem hujus methodi cum priori. Etiam hic obtinemus primos approximatos valores pro $r', \delta, \delta', \delta''$ sed sine suppositione orbitæ parabolicæ, hinc præcisis determinatio harum quantitatum ad inventionem primorum approximatorum ellipticorum elementorum orbitæ servire potest.

Ex δ et δ'' primæ et ultimæ observationis nimirum invenitur per aequationes (a) heliocentricus locus planetæ vel l, b, r, et l'', b'', r'' et ex hoc longitudo nodi Ω, et inclinatio orbitæ n ex aequationibus (b), quas etiam ita exprimere possumus

$$tg\left(\frac{l''+l}{2} - \Omega\right) = \frac{\sin(b''+b)}{\sin(b''-b)}\, tg\, \frac{l''-l}{2}$$

$$tg\, n = \frac{tg\, b''}{\sin(l''-\Omega)} = \frac{tg\, b}{\sin(l-\Omega)}$$

ubi $tg\, n$ est vel positiva vel negativa, si ad eclipticam reductus motus heliocentricus est directus vel retrogradus. Si ita n et Ω sunt notæ, argumentum latitudinis invenitur per sequentes expressiones

$$tg\, u = \frac{tg(l-\Omega)}{\cos n} \qquad \sin u = \frac{\sin b}{\sin n} \qquad \cos u = \cos b \cos(l-\Omega)$$

$$tg\, u'' = \frac{tg(l''-\Omega)}{\cos n} \qquad \sin u'' = \frac{\sin b''}{\sin n} \qquad \cos u'' = \cos b'' \cos(l''-\Omega)$$

$$\sin(u''+u) = \frac{\sin(l''+l-2\Omega)\cos b'' \cos b}{\cos n} \qquad \sin(u''-u) = \frac{\sin(l''-l)\cos b'' \cos b}{\cos n}$$

et nunc sumus in statu determinandi elliptica elementa, nam inventæ n et Ω referuntur tantum ad situm, non ad formam orbitæ. Antequam autem transimus ad determinationem horum elementorum, volumus adhuc dare unam methodum immediate inveniendi valores pro n, Ω et $u''-u$.

Sint $x'. y'. z'$ coordinatæ loci heliocentrici planetæ et x' in linea nodorum, erit $x' = r \cos u$ $\quad y' = r \sin u \cos n$, $\quad z' = r \sin u \sin n$

Si autem eligimus alias coordinatas $x. y. z.$ ubi axis x in longitudine N, et axis y in longitudine $N+90$ jacet, et z tandem perpendiculariter insistit plano xy quod planum sit planum eclipticæ erit

$$x = y' \sin(N-\Omega) + x' \cos(N-\Omega)$$

$$y = y' \cos(N-\Omega) - x' \sin(N-\Omega)$$

Si in his aequationibus priores valores quantitatum x', y' substituantur, et evolvuntur similes expressiones pro x'', y'', z'' tertiae observationis, obtinemus

$$x''z - yz'' = rr'' \sin(u''-u) \sin n \sin(N-\Omega)$$
$$xz'' - x''z = rr'' \sin(u''-u) \sin n \cos(N-\Omega)$$
$$xy'' - x''y = rr'' \sin(u''-u) \cos n$$

et quum, si $\int s''$ sunt notae, etiam $x, x'' \ldots$ notae sunt, duae primae harum aequationum dant

$$(N-\Omega) \text{ et } rr'' \sin(u''-u) \sin n$$

et tertia n et $rr'' \sin(u''-u)$

Si $x\, x''$ sint in linea aequinoctiorum, $N=0$, hinc

$$xz'' - y''z = rr'' \sin(u''-u) \sin n \sin \Omega$$
$$xz'' - x''z = rr'' \sin(u''-u) \sin n \cos \Omega$$
$$xy'' - x''y = rr'' \sin(u''-u) \cos n$$

Si secunda observatio, ad quam pertinent x'', y'', z'' et u'' post primam est instituta, est $u''>u$. Si ergo scimus esse $u''-u < 180°$ quantitas $rr'' \sin(u''-u) \sin n$ erit positiva ergo quoque quantitas $(N-\Omega)$ sine ambiguitate signorum determinari potest. Si dein est $xy''-x''y$ positivum vel negativum, motus planetae est directus vel retrogradus. Si autem ignotum est an $u''-u$ minor vel major quam $180°$ sit, ex his expressionibus tantummodo generatim longitudinem lineae nodorum invenire possumus, sine discrimine an ista nodus sit ascendens vel descendens. Valor quantitatis n tandem semper est positivus et nunquam major quam $180°$. Si autem n major est quam $90°$, motus planetae est retrogradus. Ceterum adhuc notare possumus, uti $\cos n$ est cosinus inclinationis orbitae versus tertium planum xy, ita quoque esse $\sin n \sin(N-\Omega)$ et $\sin n \cos(N-\Omega)$ cosinus inclinationum orbitae versus ambo altera plana coordinata, uti et $rr'' \sin(u''-u)$ esse dupplicem aream trianguli rectilinei, quod contentum est inter ambos radios $r\, r''$, uti tandem $zy''-yz''$, $xz''-x''z$, $xy''-x''y$ dupplices areas projectionum hujus trianguli ad ista tria plana coordinata.

Ex inventis quantitatibus r, r', r'' differentiis argumentorum latitudinis vel veris anomaliis et datis intervallis temporum, elementa ellyptica

elliptica diversis modis derivari possunt. — Nos hic tantummodo praecipuas methodos breviter indicabimus (Vid Gauss theoria mot. corp. coelest.)

1.) Videre volumus quomodo e differentia verae anomaliae $v'-v=2h$, radiis r r' et intervallo temporis, elliptica elementa orbitae inveniri possint. —

Sit $e'-e=2g$ differentia duarum excentricarum anomaliarum, dein est, si a semiaxin majorem et $a\varepsilon$ excentricitatem designat $\frac{r}{a}=1-\varepsilon\cos e$ et hinc etiam $r'+r=2a-2a\varepsilon\cos\frac{e'+e}{2}\cos g$, sed habemus

$$\sin\frac{v}{2}=\sin\frac{e}{2}\sqrt{\frac{a(1+e)}{r}} \quad \text{et} \quad \cos\frac{v}{2}=\cos\frac{e}{2}\sqrt{\frac{a(1-e)}{r}}$$

ergo est propter $\cos h=\cos\frac{v'}{2}\cos\frac{v}{2}+\sin\frac{v'}{2}\sin\frac{v}{2}$

$$\frac{(rr')^{\frac{1}{2}}}{a}\cdot\cos h=\cos g-\varepsilon\cos\frac{e'+e}{2} \quad \text{---------} (I)$$

Si substituimus hunc valorem pro $\varepsilon\cos\frac{e'+e}{2}$ in praecedenti aequatione est

$$\cos g=\frac{(rr')^{\frac{1}{2}}\cos h\pm\sqrt{rr'\cos^2 h+2a(2a-r-r')}}{2a} \quad \text{vel}$$

$$a=\frac{r+r'-2\cos h\cos g\sqrt{rr'}}{2\sin^2 g} \quad \text{---------} (II)$$

Si praeterea t est intervallum temporis et $\mu=0.0172021$, erit

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}=e'-e-\varepsilon(\sin e'-\sin e)=2g-2\varepsilon\sin g\cos\frac{e'+e}{2}$$

et si in hac aequatione valorem pro $\varepsilon\cos\frac{e'+e}{2}$ ex (I) substituimus erit

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}=2g-\sin 2g+2\cos h\sin g\sqrt{\frac{rr'}{a^2}}$$

vel tandem si pro a valor ex (II) substituitur et brevitatis causa

$\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}}+\sqrt{\frac{r}{r'}}}{2\cos h}=1+2l$ et $\frac{\mu t}{(2\cos h.\sqrt{rr'})^{\frac{3}{2}}}=m$ ponitur erit

$$\pm m=\left(l+\sin^2\frac{g}{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(l+\sin^2\frac{g}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}\right) \quad \text{---------} (III)$$

ubi m habet signum superius vel inferius, si $\sin g$ est positivus ~~et~~ aut negativus. —

Aequatio (III) continet tantummodo quantitatem incognitam $g=\frac{e'-e}{2}$, igitur ex ea hanc quantitatem determinare possumus. Ut hoc commodius fieri possit, sit $x=\sin^2\frac{1}{2}g$, ergo est ultima aequatio

$$\pm m=(l+x)^{\frac{1}{2}}+(l+x)^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}\right)$$

Sit $X=\frac{2g-\sin 2g}{\sin^3 g}$ dein est si haec expressio differentiatur,

$$2(x-x^2)\frac{dX}{dx}=4-(3-6x)X$$

si ergo

Si ergo ponitur $X = \frac{4}{3}(1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots)$ obtinetur si hic valor pro X ejusq. differentiale in ultima aequatione substituitur et factores aequalium potentiarum quantitatis x sibi aequales ponuntur, $\alpha = \frac{6}{5}$, $\beta = \frac{8}{7}\alpha$, $\gamma = \frac{10}{9}\beta$, $\delta = \frac{12}{11}\gamma$ ergo

$$X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5}x + \frac{4.6.8}{3.5.7}x^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}x^3 + \ldots\ldots$$

Si hinc ponitur $X = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x - \xi)}$ est $\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{16}{9X}$

Ex ultima expressione pro quolibet parvo valore quantitatis x, quantitas ξ facile inveniri potest; si nimirum in eo praecedentem valorem quantitatis X substituimus, erit, si quintae et altiores potentiae quantitatis x negliguntur,

$$\xi = 0.0571429\,x^2 + 0.0330158\,x^3 + 0.0205417\,x^4 \ldots\ldots (A)$$

Si autem x notabiliter est major, ad determinationem quantitatis ξ sequentem possumus applicare methodum:

Prius erat $\xi = \frac{xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9}}{X}$ et numerator hujus fractionis evadit, si prius inventus valor pro X substituitur, aequalis $\frac{8}{105}x^2 A$, ubi $A = 1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{3.8.10}{9.11}x^2 + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3 + \ldots\ldots$

ergo quoq. est ille numerator $xX - \frac{5}{6}X + \frac{10}{9} = \frac{8}{105}x^2 A$ vel

$$X = \frac{\frac{4}{3}\left(1 - \frac{12}{175}Ax^2\right)}{1 - \frac{6}{5}x} \quad \text{et hinc} \quad \xi = \frac{\frac{2}{35}Ax^2\left(1 - \frac{6}{5}x\right)}{1 - \frac{12}{175}Ax^2}$$

Alia deductio quantitatis ξ secundam theoriam motus corporum coelestium p. 97. est sequens:

Habuimus $X = \frac{4}{3} + \frac{4.6}{3.5}x + \frac{4.6.8}{3.5.7}x^2 + \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}x^3 + \frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11}x^4 + \ldots\ldots$

Hanc seriem transformare licet in fractionem continuam sequentem:

$$X = \cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \cfrac{\frac{6}{5}x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \cfrac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \cfrac{\frac{6.4}{9.11}x}{1 - \cfrac{\frac{7.10}{11.13}x}{1 - \cfrac{\frac{3.6}{13.15}x}{1 - \cfrac{\frac{9.12}{15.17}x}{1 - \text{etc}}}}}}}}$$

Lex secundum quam coëfficientes $\frac{6}{5}$, $-\frac{2}{5.7}$, $\frac{5.8}{7.9}$ & progrediuntur, obvia est; scilicet terminus n^{tus} hujus seriei fit pro n pari =

aequalis $\frac{n \cdot n-3}{2n+1 \cdot 2n+3}$, pro n impari autem $= \frac{n+2 \cdot n+5}{2n+1 \cdot 2n+3}$

Quodsi ~~an~~ iam statuimus

$$\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{2}{5\cdot 7}x}{1-\cfrac{\frac{5\cdot 8}{7\cdot 9}x}{1-\cfrac{\frac{1\cdot 4}{9\cdot 11}x}{1-\ldots}}}} = x-\xi$$

fit $X = \frac{1}{\frac{3}{4}-\frac{9}{10}(x-\xi)}$ atque $\xi = x - \frac{5}{6} + \frac{16}{9X}$, sive

$$\xi = \frac{\sin^3 g - \frac{3}{4}(2g-\sin 2g)(1-\frac{6}{5}\sin^2 g)}{\frac{9}{10}(2g-\sin 2g)}.$$

Numerator hujus expressionis est quantitas ~~numer~~ ordinis septimi, denominator ordinis tertii, adeoque ξ ordinis quarti, siquidem g tanquam quantitas ordinis primi, sive x tanquam ordinis secundi spectatur. Hinc concluditur, formulam hanc ad computum numericum exactum ipsius ξ haud esse idoneam, quoties g angulum non valde considerabilem exprimat: tunc autem ad hunc finem, commode adhibentur formulae sequentes, quae ab invicem per ordinem commutatum numeratorum in coëfficientibus fractis differunt, et quarum prior e valore supposito ipsius $x-\xi$ haud difficile derivatur:

$$\xi = \cfrac{\frac{2}{35}x^2}{1+\frac{2}{35}x-\cfrac{\frac{46}{63}x}{1-\cfrac{\frac{4}{99}x}{1-\cfrac{\frac{70}{143}x}{1-\cfrac{\frac{18}{195}x}{1-\cfrac{\frac{108}{255}x}{1-\text{etc}}}}}}}$$

sive

$$\xi = \cfrac{\frac{2}{35}x^2}{1-\frac{18}{35}x-\cfrac{\frac{4}{63}x}{1-\cfrac{\frac{46}{99}x}{1-\cfrac{\frac{18}{143}x}{1-\cfrac{\frac{70}{195}x}{1-\cfrac{\frac{40}{255}x}{1-\text{etc}}}}}}}$$

In tabula tertia huic celeberrimi operi adnexa pro cunctis valoribus ipsius x a 0 usque ad 0.3 per singulas partes millesimas

valoris respondentis ipsius ξ ad septem figuras decimales computati inveniuntur. Haec tabula primo aspectu monstrat exiguitatem ipsius ξ pro modicis valoribus ipsius g; ita e. g. pro $\varepsilon'-\varepsilon = 10^\circ$ sive $g = 5^\circ$, ubi $x = 0.00195$ fit $\xi = 0.0000002$.

Nostra prior aequatio erat $m = (l+x)^{\frac{1}{2}} + \dfrac{(l+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4} - \frac{9}{10}(x-\xi)}$

Statuendo itaq. $\dfrac{m}{y} = \sqrt{(l+x)}$ atq. $h' = \dfrac{m^2}{\frac{5}{6}+l+\xi}$ illa aequatio erit $h' = \dfrac{(y-1)y^2}{\frac{1}{9}+y}$ .... (IV)

Quum autem ξ semper tantummodo parvum valorem reque, tu unitatis habeat, resolutio nostri problematis erit sequens: In approximatione prima negligantur penitus haec quantitas ξ atque ponatur $h' = \dfrac{m^2}{\frac{5}{6}+l}$ dein quaeratur y ex (IV) et $x = \dfrac{m^2}{y^2} - l$. Cum hoc valore quantitatis x quaeratur ξ ex (A) et cum hoc h' ex $h' = \dfrac{m^2}{\frac{5}{6}+l+\xi}$ et y ex (IV), et iterum x ex $x = \dfrac{m^2}{y^2} - l$ et cum hoc novo valore quantitatis x iterum potest quaeri ξ ex (A) et haec methodus tamdiu continuari, donec novus valor quantitatis x ab immediate praecedenti non amplius divergit. Si ita habemus x etiam g ex aequatione $x = \sin^2 \frac{1}{2}g$ est notum. Magis commoda evadit haec resolutio, si habetur tabula, quae pro quolibet valore x det correspondentem valorem ξ, uti diximus de tabula celeb. Gauss. —

Ex. Sit $h = 31^\circ 27' 38''.32$, $\log r = 0.4282792$, $\log r' = 0.4062033$, $t = 259.8847$[illegible] dein est $\log. m^2 = 9.3536651$ et $l = 0.0863565$9, et primus valor $h' = \dfrac{m^2}{\frac{5}{6}+l} = 0.2451451$ hinc $\log. y^2 = 0.1722683$, $x = 0.06527749$ ex quo $\xi = 0.0002531$ et hinc correctus valor $h' = \dfrac{m^2}{\frac{5}{6}+l+\xi} = 0.2450779$, ex quo $\log. y^2 = 0.1722363$, $x = 0.06529078$ et iterum $\xi = 0.0002532$

Si habemus primum approximatum valorem pro y, ex aequatione (IV) pro duobus assumtis limitibus quantitatis y, valorem pro h quaerere possumus, inter quos dein cadit verus valor quantitatis y. Sic est pro hoc exemplo

h	$\log y^2$
0.245	0.1721887
0.246	0.1727218

et

et eadem ratione $\overset{x}{\begin{matrix}0.065\\0.066\end{matrix}}$ $\overset{\xi}{\begin{matrix}0.0002509\\0.0002588\end{matrix}}$. —

2.) Si hac ratione $g = \frac{e'-e}{2}$ inventum est, determinatio elementorum ellipticorum nullam amplius habebit difficultatem. Invenitur ni, mirum semiaxis major a ex aequatione (II) h. e. ex aequatione

$$a = \frac{2(1+\sin^2 \frac{1}{2}g)\cos h . \sqrt{rr'}}{\sin^2 g} \text{ vel etiam } a = \frac{2m^2 \cos h . \sqrt{rr'}}{y^2 \sin^2 g} = \frac{\mu^2 t^2}{4y^2 rr' \cos h \sin^2 g}$$

semiaxis minor $b = \sqrt{ap}$ invenitur ex $b \sin g = \sin h \sqrt{rr'}$ vel $\sqrt{p} = \frac{y rr' \sin 2h}{\mu t}$. — Si est $\varepsilon = \sin \varphi$, hinc $b = a \cos \varphi$ erit

$$\cos \varphi = \frac{\sin g \operatorname{tg} h}{2(1+\sin^2 \frac{1}{2}g)}$$

Si praeterea conjungitur aequatio (I) cum nota

$r' - r = 2a\varepsilon \sin g \sin \frac{e'+e}{2}$ et cum superius adducta $r'+r = 2a - 2a\varepsilon \cos \frac{e'+e}{2} \cos g$

obtinemus $\operatorname{tg} \frac{e'+e}{2} = \frac{(r'-r)\sin g}{(r'+r)\cos g - 2\cos h . \sqrt{rr'}}$, et eadem ratione

invenitur $\operatorname{tg} \frac{v'+v}{2} = \frac{(r'-r)\sin h}{2\cos g \sqrt{rr'} - (r'+r)\cos h}$

Quum jam noscimus $\frac{v'-v}{2} = h$ et nunc $\frac{v'+v}{2}$, etiam habemus valores quantitatum v' et v, ex quibus dein situs perihelii invenitur. Tandem est medius motus intra tempus t ex praecedentibus aequatis

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2g - 2\varepsilon \cos \frac{e'+e}{2} \sin g$$

et aequalitas ambarum expressionum serviet ad comprobationem calculi. Tandem est epocha mediae anomaliae quae pertinet ad medium inter ambo tempora observationum, $\frac{e'+e}{2} - \varepsilon \sin \frac{e'+e}{2} \cos g$ et anomaliae mediae ipsae, quae pro his temporibus valent, sunt

$$M = e - \varepsilon \sin e \quad \text{et} \quad M' = e' - \varepsilon \sin e'$$

quarum differentia hinc aequalis esse debet $\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}$. —

3.) Adhuc notari potest, sectorem ellipticum inter r, r' et arcum ellipticum, aequalem esse $\frac{1}{2}\mu t . \sqrt{p}$ et triangulum inter r', r et chordam $\frac{1}{2} rr' \sin 2h$ hinc nos habere $\frac{\text{Sector}}{\text{Triangul}} = \frac{\mu t \sqrt{p}}{rr' \sin 2h} = y$

Si igitur y'' est ratio sectoris ad triangulum in 1 et 2, et y in 2 et 3 observatione erit, quum est $rr' \sin(v'-v) = rr' \sin 2h'' = 2f''$

$$\sqrt{p} = \frac{2y''f''}{\mu t''} \quad \text{et} \quad \sqrt{p} = \frac{2yf}{\mu t} \text{ et hinc } \frac{f''}{f} = \frac{t'' y}{t y''}$$

Praeterea est aequatio linearum secundi ordinis

$\frac{p}{r} = 1+\varepsilon\cos v$, $\frac{p}{r'} = 1+\varepsilon\cos v'$; $\frac{p}{r''} = 1+\varepsilon\cos v''$.

Si hae aequationes multiplicantur respective per $\sin(v''-v')$, $-\sin(v''-v)$, $\sin(v'-v)$ summa horum productorum dabit

$$p = \frac{\sin(v''-v') - \sin(v''-v) + \sin(v'-v)}{\frac{1}{r}\sin(v''-v') - \frac{1}{r'}\sin(v''-v) + \frac{1}{r''}\sin(v'-v)}$$

Numerator hujus fractionis est etiam

$$2\sin\tfrac{1}{2}(v''-v')\cos\tfrac{1}{2}(v''-v) - 2\sin\tfrac{1}{2}(v''-v')\cos\left(\tfrac{v''+v'}{2}-v\right) =$$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}(v''-v')\sin\tfrac{1}{2}(v''-v)\sin\tfrac{1}{2}(v'-v),$$ hinc est

$$p = \frac{2rr'r''\sin\frac{1}{2}(v''-v')\sin\frac{1}{2}(v''-v)\sin\frac{1}{2}(v'-v)}{f-f'+f''}$$ vel

$$p = \frac{2rr'r''\sin h\sin h'\sin h''}{f-f'+f''}$$

et $f-f'+f''$ evidenter est area trianguli plani inter puncta extrema radiorum r, r', r''.

Quum autem, uti facile videre possumus, denominator ultimae expressionis est tertii ordinis, si h, h', h'' sunt quantitates primi ordinis, haec expressio ad determinationem quantitatis p immediate non cum securitate applicari potest. —

4.) Datur autem adhuc alia notatu digna methodus, ex datis duobus radiis r r' et differentia verarum et excentricarum anomaliarum $v'-v=2h$, $e'-e=2g$, et intermedio tempore t inveniendi elementa orbitae. — Habuimus nimirum, si a denotat semiaxim majorem et $a\varepsilon$ excentricitatem,

$$\sin\tfrac{v}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{r}{a}} = \sin\tfrac{e}{2}\cdot\sqrt{1+\varepsilon} \quad \text{.......... (1)}$$

$$\cos\tfrac{v}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{r}{a}} = \cos\tfrac{e}{2}\cdot\sqrt{1-\varepsilon} \quad \text{.......... (2)}$$

$$\sin\tfrac{v'}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{r'}{a}} = \sin\tfrac{e'}{2}\cdot\sqrt{1+\varepsilon} \quad \text{.......... (3)}$$

$$\cos\tfrac{v'}{2}\cdot\sqrt{\tfrac{r'}{a}} = \sin\tfrac{e'}{2}\cdot\sqrt{1-\varepsilon} \quad \text{.......... (4)}$$

Sit nunc $2x = v'+v$ et $2y = e'+e$. — Nunc multiplicetur (1) per $\sin\frac{x+g}{2}$ et (2) per $\cos\frac{x+g}{2}$ et addantur haec producta, eadem ratione multiplicetur (3) per $\sin\frac{x-g}{2}$ et (4) per $\cos\frac{x-g}{2}$ et addantur producta, ambarum summarum differentia dabit

$$\cos\tfrac{h+g}{2}\left\{\sqrt{\tfrac{r'}{a}}-\sqrt{\tfrac{r}{a}}\right\} = 2\cos\tfrac{\varphi}{2}\sin g\sin\tfrac{x-y}{2} \quad \text{...... (1')}$$

ubi $\varepsilon = \sin\varphi$. — Eadem ratione dabunt

$(1)\sin\frac{x-g}{2}+(2)\cos\frac{x-g}{2}-(3)\sin\frac{x+g}{2}-(4)\cos\frac{x+g}{2}$

$(1)\cos\frac{x+g}{2}-(2)\sin\frac{x+g}{2}-(3)\cos\frac{x-g}{2}+(4)\sin\frac{x-g}{2}$

$(1)\cos\frac{x-g}{2}-(2)\sin\frac{x-g}{2}-(3)\cos\frac{x+g}{2}-(4)\sin\frac{x+g}{2}$

ordinatim aequationes

$$\cos\frac{h-g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}\right\}=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin g\sin\frac{x+y}{2}\ \ldots\ldots (2')$$

$$\sin\frac{h+g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}\right\}=2\cos\frac{\varphi}{2}\sin g\cos\frac{x-y}{2}\ \ldots\ldots (3')$$

$$\sin\frac{h-g}{2}\left\{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}\right\}=2\sin\frac{\varphi}{2}\sin g\cos\frac{x+y}{2}\ \ldots\ldots (4')$$

Si autem est $tg(45^\circ+\omega)=\sqrt[4]{\frac{r'}{r}}$, erit

$$tg\,2\omega=\frac{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}}{2\sqrt[4]{\frac{rr'}{a^2}}}\qquad \cos 2\omega=\frac{2\sqrt[4]{\frac{rr'}{a^2}}}{\sqrt{\frac{r'}{a}}-\sqrt{\frac{r}{a}}}$$

et si praeterea ponimus

$$X=\sin g\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt[4]{\frac{a^2}{rr'}}\quad\text{et}\quad Y=\sin g\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^2}{rr'}}$$

aequationes (1') ...... (4') erunt

$$\cos\frac{h+g}{2}\,tg\,2\omega=X.\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos\frac{h-g}{2}\,tg\,2\omega=Y.\sin\frac{x+y}{2}$$

$$\sin\frac{h+g}{2}\,Sec.\,2\omega=X\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin\frac{h-g}{2}\,Sec.\,2\omega=Y\cos\frac{x+y}{2}$$

et quum in his aequationibus $h.\,g$ et ω sint cognitae inveniuntur $x.\,y$ et $X.\,Y$. Si hi valores sunt inventi erit

$$tg\frac{\varphi}{2}=\frac{Y}{X}$$

$$a=\frac{X^2\sqrt{rr'}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin^2 g}=\frac{Y^2\sqrt{rr'}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2 g}$$

et si p est semiparameter, $\sqrt{p}=\frac{\sin h\cos\frac{\varphi}{2}}{X}\cdot\sqrt[4]{rr'}=\frac{\sin h\sin\frac{\varphi}{2}}{Y}\cdot\sqrt[4]{rr'}$

et ad comprobationem calculi $b=a\cos\varphi=\frac{p}{\cos\varphi}=\frac{\sin h}{\sin g}\cdot\sqrt{rr'}$

Si praeterea x et y sunt notae, etiam est $v=x-h$ et $v'=x+h$ notum ex quo longitudo perihelii invenitur. — Eadem ratione obtinemus $e=y-g$ et $e'=y+g$. — Praeterea est medius motus in tempore t aequalis $\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}}$ vel $2(g-e\cos y\sin g)$

Tandem est epocha mediae anomaliae, quae pertinet ad tempus medii inter ambas observationes $y-e\sin y\cos g$ et

ad

et ad comprobationem calculi est differentia mediarum anomaliarum $\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = e' - e - (\varepsilon \sin e' - \varepsilon \sin e)$

5.) Tandem datur adhuc alia methodus e duobus datis radiis r, r' differentia verarum anomaliarum $v' - v = 2h$ et intervallo temporis observationum t saltem approximatos valores elementorum ellipticorum inveniendi.

Ante omnia volumus quaerere primo integrale

$$dy = \varphi(x)dx$$

inter limites $x = a$ et $x = a + m$, praesupposito, $\varphi(x)$ esse generatim aliquam adhuc incognitam functionem quantitatis x, cujus autem speciales valores $\varphi(x) = A, B, C, D \ldots\ldots$ pro $x = 0, a, b, c, d \ldots\ldots$ dati sunt. His suppositis, est igitur quaesitum integrale

$$y = \int \varphi(a+m)dx - \int \varphi(a)dx$$

h. e. si evolvitur haec expressio

$$y = m\varphi(a) + \frac{m^2}{1.2} d\varphi(x) + \frac{m^3}{1.2.3} d^2\varphi(a) + \ldots\ldots$$

vel quod idem est

$$y = mA + \frac{m^2}{1.2} dA + \frac{m^3}{1.2.3} d^2A + \ldots\ldots \quad (I)$$

Si nunc supponimus, deductum integrale habere sequentem formam $y = xA + x_1 B + x_2 C + x_3 D + \ldots\ldots \quad (II)$ tantummodo adhuc incogniti factores $x, x_1, x_2 \ldots$ determinari debent, ut satisfaciamus proposito problemati. — Ad hunc finem notemus, esse

$$B = A + a\,dA + \frac{a^2}{1.2} d^2A + \frac{a^3}{1.2.3} d^3A + \ldots$$

et eadem ratione

$$C = A + b\,dA + \frac{b^2}{1.2} d^2A + \frac{b^3}{1.2.3} d^3A + \ldots$$

$$D = A + c\,dA + \frac{c^2}{1.2} d^2A + \frac{c^3}{1.2.3} d^3A + \ldots$$

Si hi valores quantitatum $B, C, D \ldots$ in aequatione (II) substituuntur, et si hanc expressionem pro y quoad singula membra comparamus cum aequatione (I) invenimus sequentes series:

$$x + x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots = m$$

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 + \ldots\ldots = \tfrac{1}{2} m^2$$

$$a^2 x_1 + b^2 x_2 + c^2 x_3 + \ldots\ldots = \tfrac{1}{3} m^3$$

$$a^3 x_1 + b^3 x_2 + c^3 x_3 + \ldots\ldots = \tfrac{1}{4} m^4 \text{ etc.}$$

et quum numerus harum aequationum est idem cum numero quantitatum incognitarum $x, x_1, x_2, \ldots\ldots$ has ultimas ex prioribus per notas eliminationes determinare possumus. — Si tandem substituimus hac ratione inventos valores quantitatum

$x, x_1, x_2 \ldots\ldots$ in aequatione (II) obtinebimus quaesitum integrale $y = \int\varphi(x)dx$. Si haberemus v. c. tantum duos valores $\varphi(x) = A$ et B pro $x=0$ et a, dum est $m=a$ et ultimae series erunt

$$x + x_1 = a, \quad x_1 = \frac{a}{2} \text{ hinc } x = x_1 = \frac{a}{2}$$

et aequatio (II) dabit $y = \frac{a}{2}(A+B)$ vel sic dictum medium arithmeticum. Pro tribus valoribus $\varphi(x) = A, B, C$ pro $x = 0, a, b$, m est $= b$ hinc

$$x + x_1 + x_2 = b$$
$$a x_1 + b x_2 = \frac{1}{2}b^2$$
$$a^2 x_1 + b^2 x_2 = \frac{1}{3}b^3$$

hinc

$$y = \frac{Ab(3a-b)}{6a} + \frac{Bb^3}{6a(b-a)} + \frac{Cb(3a-2b)}{6(a-b)} \text{ et s. p.}$$

Aliam demonstrationem harum expressionum invenire possumus in resolutione problematis, inveniendi aequationem lineae curvae, quae pro abscissis $x = 0, a, b, c$, habet respectivas ordinatas $y = A, B, C \ldots$

Simpliciores evadunt hae expressiones, si ponitur

$$b - a = c - b = d - c \text{ etc}$$

h. e. si subsequentes valores quantitatis x aequales assumuntur. Sic invenitur pro integrali inter $x=a$ et $x=a+m$ secundum ordinem

$$\int\varphi(x)dx = \frac{m}{2}(\varphi a + \varphi(a+m))$$

vel $$\frac{m}{6}(\varphi a + 4\varphi(a+\tfrac{1}{2}m) + \varphi(a+m))$$

vel $$\frac{m}{8}(\varphi a + 3\varphi(a+\tfrac{1}{3}m) + 3\varphi(a+\tfrac{2}{3}m) + \varphi(a+m))$$

vel $$\frac{m}{90}(7\varphi a + 32\varphi(a+\tfrac{1}{4}m) + 12\varphi(a+\tfrac{2}{4}m + 32\varphi(a+\tfrac{3}{4}m) + 7\varphi(a+m))$$

et s. p. (III)

6.) Ut praecedentia applicemus ad nostrum problema, sit ρ radius ellipticus qui pertinet ad veram anomaliam V, dum est area sectoris elliptici, qui describitur tempore t, aequalis $\frac{1}{2}\int\rho^2 dV$, hoc integrale sumtum a $V=v$ usque ad $V=v'$. Si igitur p designat semiparametrum orbitae, erit $\frac{1}{2}\mu t.\sqrt{p} = \int\rho^2 dV$ et posito brevitatis causa $v' - v = 2h$ erit secundum primam aequationum (III) $\int\rho^2 dv = h(r^2 + r'^2) = \frac{2hrr'}{\cos 2\omega}$ posito $tg(45° + \omega) = \frac{r'}{r}$, et primus approximatus valor quantitatis $\sqrt{p}$ erit

$$\sqrt{p} = \frac{2hrr'}{\mu t \cos 2w}$$

et nos volumus hunc valorem aequalem ponere 3α

Eadem ratione est secundum aequationem (III) secundam adhuc accuratius $\int \xi^2 dv = \frac{1}{3}h(r^2 + r'^2 + 4R^2)$ ubi R est radius vero anomaliae $\frac{v+v'}{2}$.

Si autem ponimus in expressione pro p quam dedimus in 8.) $h' = h$, $v' = v+h$, $v'' = v+2h$, erit

$$p = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}h \sin h}{(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})\sin h - \frac{1}{R}\sin 2h}, \text{ vel}$$

$$\frac{\cos h}{R} = \frac{\cos w}{\sqrt{rr'}\cos 2w} - \frac{2\sin^2\frac{1}{2}h}{p},$$

si brevitatis causa ponitur, $\delta = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}h\sqrt{rr'}\cos 2w}{\cos w}$, est

$$R = \frac{\cos h\sqrt{rr'}\cos 2w}{\cos w(1-\frac{\delta}{p})}$$

hinc secundus approximatus valor

$$\sqrt{p} = \alpha + \frac{\varepsilon}{(1-\frac{\delta}{p})^2} \text{ ------ (A)}$$

ubi $\varepsilon = 2\alpha\left(\frac{\cos h \cos 2w}{\cos w}\right)^2$

Si praeterea ponitur $\sqrt{p} = q+u$ ubi q est approximatus valor quantitatis $\sqrt{p}$, hinc u admodum parva quantitas cujus altiores potentias negligi possunt, erit si evolvitur aequatio (A)

$$\sqrt{p} = \frac{\varepsilon q^5 + (q^2-\delta)(\alpha q^2 + 4\delta q - 5\alpha\delta)q}{(q^2-\delta)(q^3 + 3\delta q - 4\alpha\delta)}$$

et in hac expressione possumus pro q prius inventum primum valorem seu 3α ponere. Si brevitatis causa ponitur

$$\beta = \frac{\delta}{27\alpha^2} \text{ et } \gamma = \frac{\varepsilon}{(1-3\beta)\alpha} \text{ obtinemus}$$

$$\sqrt{p} = \frac{\alpha(1+\gamma+21\beta)}{1+5\beta} \text{ ------ (I)}$$

et haec est quaesita expressio pro $\sqrt{p}$. Si vellemus hanc expressionem minus accuratam, seu commodiorem pro applicatione, possemus ponere $\cos w = \cos 2w = 1$ et obtentam expressionem in seriem evolvere, quae progrediatur secundum potentias quantitatis h, per quod habebimus

$$p = p'\left(1 - \frac{4}{3}h^2 + \frac{4}{3}\frac{h^2\sqrt{rr'}}{p'}\right) \text{ ------ (II)}$$

ubi $\sqrt{p'} = \frac{2hrr'}{\mu t}$ est.

Si evolvitur eadem in 1) datus valor pro $\sqrt{p}$ in seriem, quae secundum potentias quantitatis $\sin 2h$ progreditur et ponitur $\sqrt{p''} = \frac{rr'\sin 2h}{\mu t}$, erit $\sqrt{p} = \left(1 + \frac{\sin^2 2h.\sqrt{rr'}}{6p''}\right)\sqrt{p''}$ ------ (III)

vel brevius $p = p'' + \frac{1}{3}\sin^2 2h\sqrt{rr'}$ ------ (IV)

Ambae praecedentes determinationes elementorum autem praesupponunt tantum approximatam cognitionem quantitatum $\delta.\delta''$ vel $r.r'$, $v''-v$, et uti vidimus, non suppeditant medium hanc approximationem veritati appropinquandi. Ambae solutiones sunt praeterea fundatae supra secunda aequationum (III) nimirum supra $\alpha\delta'' = -B'D' + BD\frac{f}{f'} + B''D''\frac{f''}{f'}$ et suppositum est in prima approximatione $\frac{f}{f''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$ et $\frac{f''}{f'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}$

Si autem consideramus f, f', f'' qua quantitates primi ordinis, quantitas α autem est saltem tertii ordinis, hinc sub priori suppositione pro $\frac{f}{f''}$ et $\frac{f''}{f'}$ ex praecedenti aequatione valor quantitatis δ'' ~~numquam~~ accurate determinari potest, quum error ~~[illegible]~~ secundi ordinis qui est commissus in $\frac{f}{f''}$ et $\frac{f''}{f'}$ in valore pro δ'' jam errorem ordinis zeri producit.

1.) Si autem huic aequationi damus formam quam assumsimus 5.) nimirum $\alpha\delta'' = -B'D' + \frac{BDf + B''D''f''}{f + f''}.\left(\frac{f+f''}{f'}\right)$, ostendi potest, valorem fractionis $\frac{BDf + B''D''f''}{f+f''}$, qui ex non penitus accurata suppositione $\frac{f}{f''} = \frac{\vartheta}{\vartheta''}$ sequitur, tantum errorem quarti ordinis, imo, si tempora ϑ et ϑ'' aequalia sunt tantum errorem quinti ordinis habiturum esse, ex quo sequitur, prius inductam incertitudinem in δ'' non provenire ex eo, quod positum est $\frac{f''}{f} = \frac{\vartheta''}{\vartheta}$, sed ex eo praeterea quod quantitates f' et ϑ' sibi proportionales assumtas esse, nam per hanc ultimam positionem pro $\frac{f+f''}{f'}$ minus accuratus valor $\frac{\vartheta+\vartheta''}{\vartheta'} = 1$ introductus est, a quo verus valor aliqua quantitate secundi ordinis differt. — Nimirum erat

$$f - f' + f'' = \frac{4rr'r''\sin h\sin h'\sin h''}{p},$$

si haec expressio dividitur per f' et notatur, esse

$$f = r'r''\sin 2h = 2r'r''\sin h\cos h$$

et eadem ratione $f' = 2rr''\sin h'\cos h'$, $f'' = 2rr'\sin h''\cos h''$; erit

$$\frac{f+f''}{f'} = 1 + \frac{ff''}{2p.rr'r''\cos h\cos h'\cos h''}$$
$$= 1 + \frac{\mu^2\vartheta\vartheta''}{2yy''rr'r''\cos h\cos h'\cos h''}$$

habuimus nimirum $\sqrt{p} = \frac{y''f''}{\mu\vartheta''}$, $\sqrt{p} = \frac{yf}{\mu\vartheta}$ ubi y est ratio sectoris ad triangulum

Quum nunc cosinus angulorum $h. h'. h''$ uti et quantitates $y. y''$ ab unitate tantummodo quantitatibus secundi ordinis differunt, comittitur error, si pro $\frac{f+f''}{f'}$ approximatus valor

$$1 + \frac{\mu^2\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}$$ assumitur, quarti ordinis, et si igitur praecedens aequatio ita assumitur:

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{BD\vartheta + B''D''\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\mu^2\vartheta\vartheta''}{2rr'r''}\right)$$

pro δ' sequitur error, qui tantummodo est secundi ordinis si intervalla temporum $\vartheta. \vartheta''$ fere aequalia sunt, et facile videmus hunc errorem quoque non notabiliter augeri, si in ultima aequatione r'^3 pro $r. r'. r''$ ponitur; ex quo etiam videmus, formam quam obtinuit nostra aequatio, praecedentibus, nimirum

$$\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''D'' + BD\mathfrak{P}}{1+\mathfrak{P}}\left(1 + \frac{\mathfrak{Q}}{2r'^3}\right)$$, ad determinationem quantitatis δ' esse admodum idoneam.

2.) Si ponimus nimirum, uti ibi, $\mathfrak{P} = \frac{f}{f''}$ et $\mathfrak{Q} = 2r'^3\left(\frac{f+f''}{f'} - 2\right)$ erit adducta aequatio $\alpha\delta' = -B'D' + \frac{B''D'' + BD\mathfrak{P}}{1+\mathfrak{P}}\left(c + \frac{\mathfrak{Q}}{2r'^3}\right)$ et habebimus pro veris valoribus quantitatum $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$

$$\frac{1}{\mathfrak{P}} = \frac{\vartheta y}{\vartheta y''} \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q} = \frac{\mu^2 r'^2\vartheta\vartheta''}{rr''yy''\cos h\cos h'\cos h''} \text{ - - - - - - (I)}$$

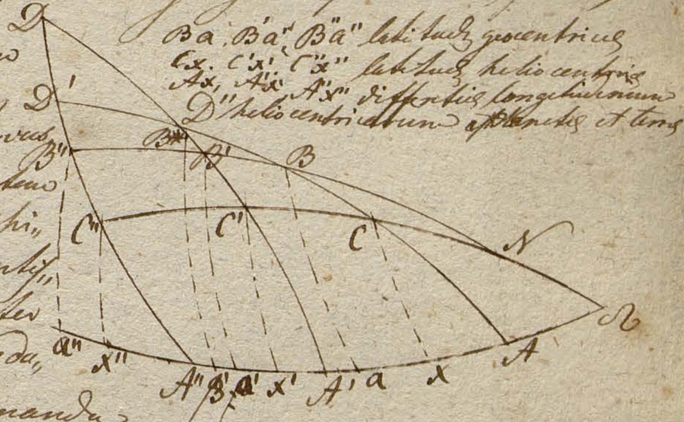
pro quibus in prima approximatione ponere possumus

$$\frac{1}{\mathfrak{P}} = \frac{\vartheta''}{\vartheta}, \quad \text{et } \mathfrak{Q} = \mu^2\vartheta\vartheta'' \text{ - - - - - (II)}$$

et per hanc suppositionem secundum praecedentia in valore pro δ' ergo etiam in illo pro δ et δ'' tantummodo errores secundi ordinis comittuntur, si tempora $\vartheta\ \vartheta''$ sibi fere aequalia ponuntur. Si nunc cum his approximatis valoribus pro $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ in (II) aliqua ratione quantitates $r r' r''$ et $h, h' h''$ obtinentur, possumus deinde quantitates y, y'' invenire secundum priora, quibus iterum approximatos valores pro $\mathfrak{P}. \mathfrak{Q}$ quibus eruimus denuo correctos valores pro y et y'' et sic porro, donec novi valores harum quantitatum non amplius differunt ab immediate praecedentibus.

Praecedentia sufficient ad delineandam viam, quam elegit Gauss in suo praeclaro opere ad resolutionem huius problematis; restat adhuc hanc methodum omnibus cum circumstantiis indicandi.

Ego hic fere omnia iisdem verbis uti celeb. Gauss adferam. p. 149



„Disquisitiones praecedentes eum in finem allatae sunt, ut principia quibus methodus nostra innititur, verusque eius quasi nervus eo clarius perspiciatur. Tractatio ipsa autem methodum in forma prorsus diversa exhibebit, quam post applicationes frequentissimas, tanquam commodissimam inter plures alias a nobis tentatas commendare possumus. — Quum in determinanda orbita incognita e tribus observationibus totum negotium semper ad aliquot hypotheses, aut potius successivas approximationes reducatur, pro lucro eximio habendum erit, si calculum ita adornare successerit, ut iam ab initio ~~observatio~~nes operationes quam plurimas, quae non a P et Q sed unice a combinatione quantitatum cognitarum pendeant, ab ipsis hypothesibus separare liceat. Tunc manifesto has operationes praeliminares, singulis hypothesibus communes, semel tantum exequi oportet, hypothesesque ipsae ad operationes quam paucissimas reducuntur. Perinde maximi momenti erit, si in singulis hypothesibus usque ad ipsa elementa progredi haud opus fuerit, horumque computum usque ad hypothesin postremam reservare liceat. Utroque respectu methodus nostra quam exponere iam aggredimur, nihil desiderandum relinquere videtur. —

Ante omnia tres locos heliocentricos terrae in sphaera caelesti A, A', A'' cum tribus locis geocentricis respondentibus corporis caelestis B, B', B'' per circulos maximos iungere, atque tum positionem horum circulorum maximorum respectu eclipticae (si quidem eclipticam pro plano fundamentali adoptamus)

tum situm punctorum B, B', B'' in ipsis computare oportet. Sint $\alpha, \alpha', \alpha''$ tres corporis coelestis ~~[illegible]~~ longitudines geocentricae, β, β', β'' latitudines, l, l', l'' longitudines heliocentricae

(Schubert II. V. p. 265) Delambre II. V. 561 terrae, cujus latitudinem statuimus $= 0$. Sint porro $\gamma, \gamma', \gamma''$ circulorum maximorum ab A, A', A'' respective ad B, B', B'' ductorum inclinationes ad eclipticam, quam inclinationem ut in ipsarum determinatione normam fixam sequamur, perpetuo respectu ipsius eclipticae partis mensurabimus, quae a punctis A, A', A'' secundum ordinem signorum sita est, ita ut ipsarum magnitudo, a 0 usque ad 360° numeretur, sive quod eodem redit in parte boreali a 0 usque ad 180° in australi a 0 usque ad −180°. Arcus AB, A'B', A''B'' quos semper intra 0 et 180° statuere licebit, designamus per $\delta, \delta', \delta''$. Pro determinatione ipsarum γ, δ habemus formulas

1) $$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\alpha - l)}, \quad \operatorname{tg}\delta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - l)}{\cos\gamma}$$

quibus si placet ad calculi confirmationem adjici possunt sequentes, $\sin\delta = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$, $\cos\delta = \cos\beta\cos(\alpha - l)$

Pro determinandis $\gamma', \delta', \gamma'', \delta''$ manifesto formulae prorsus analogae habentur. Quodsi simul fuerit $\beta = 0$, $\alpha - l = 0$ vel $= 180°$ i.e. si corpus coeleste simul in oppositione vel conjunctione atque in ecliptica fuerit, γ fieret indeterminata: at supponemus hunc casum in nulla trium observationum locum habere.

Si loco eclipticae aequator tamquam planum fundamentale adoptatum est, ad positionem trium circulorum maximorum respectu aequatoris determinandam, praeter inclinationes insuper requiruntur rectascensiones intersectionum cum aequatore: nec non praeter distantias punctorum B, B', B'' ab his intersectionibus, etiam distantias punctorum A, A', A'' ab iisdem computare oportebit.

2) Negotium secundum erit determinatio situs relativi illorum trium circulorum maximorum inter se, qui pendebit a situ intersectionum mutuarum et ab inclinationibus. Quae si absque ambiguitate ad notiones claras ac generales reducere cupimus, ita ut non opus sit pro singulis casibus diversis ad figuras peculiares recurrere, quasdam dilucidationes praeliminares praemittere

oportet

oportebit. Primo scilicet in quovis circulo maximo duae directiones oppositae aliquo modo distinguendae sunt, quod fit dum alteram tanquam progressivam seu positivam, alteram tanquam retrogradam seu negativam consideramus. Quod cum ~~[illegible]~~ per se prorsus arbitrarium ~~sit~~ sit, ut normam certam stabiliamus, semper directiones ab A, A', A'' versus B, B', B'' ceu positivas considerabimus; ita e.g. si intersectio circuli primi cum secundi per distantiam positivam a puncto A exhibetur, haec capienda subintelligetur ab A versus B (ut D'' in figura nostra), si vero negativa esset ipsam ab altera parte ipsius A sumere oporteret. Secundo vero etiam duo hemisphaeria in quae omnis circulus maximus sphaeram integram dirimit, denominationibus idoneis distinguenda sunt: et quidem hemisphaerium superius vocabimus quod in superficie inferiori sphaerae circulum maximum directione progressiva permeanti ad dextram est, alterum inferius. Plaga itaque superior analoga erit hemisphaerio boreali respectu eclipticae vel aequatoris, inferior australi. —

His rite intellectis, ambas duorum circulorum maximorum intersectiones commode ab invicem distinguere licebit: in una scilicet circulus primus e secundi regione inferiori in superiorem tendit, vel quod idem est secundus e primi regione superiori in inferiorem, in altera intersectione opposita locum habent. Per se quidem prorsus arbitrarium est, quasnam intersectiones in problemate nostro eligere velimus: sed ut hic quoque iuxta normam invariabilem procedamus, eas semper adoptabimus, (D, D', D'' in fig.) ubi respective circulus tertius in primi AB, secundus in primi plagam superiorem transit. Istarum intersectionum determinabitur per ipsarum distantias a punctis A' et A'', A et A'', A et A', quas simpliciter per A'D, A''D, A D', A''D', A D'', A'D'' designabimus. Quibus ita factis circulorum inclinationes mutuae erunt anguli, qui respective in

his

$A'DA'' = \varepsilon$
$AD'A'' = \varepsilon'$
$AD''A' = \varepsilon''$

in his intersectionum punctis D, D', D'' inter circulorum se secantium partes eas continentur quae in directione progressiva jacent: has inclinationes semper inter 0 et 180° accipiendas, per $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ denotabimus. Determinatio harum novem quantitatum incognitarum e cognitis manifesto pendet a resolutione trianguli $A'DA''$, est nimirum:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(A'D + A''D) = \sin\tfrac{1}{2}(l''-l')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$$
$$\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(A'D + A''D) = \cos\tfrac{1}{2}(l''-l')\sin\tfrac{1}{2}(\gamma''-\gamma')$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(A'D - A''D) = \sin\tfrac{1}{2}(l''-l')\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$$
$$\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(A'D - A''D) = \cos\tfrac{1}{2}(l''-l')\cos\tfrac{1}{2}(\gamma''-\gamma')$$

E primis duabus aequationibus innotescent $\tfrac{1}{2}(A'D+A''D)$ et $\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon$, e duabus ultimis $\tfrac{1}{2}(A'D-A''D)$ et $\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$; hinc $A'D$, $A''D$ et ε. Ambiguitas determinationi arcuum $\tfrac{1}{2}(A'D+A''D)$, $\tfrac{1}{2}(A'D-A''D)$ per tangentes adhaerens conditione ea deciditur, quod $\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon$ et $\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$ positivi evadere debent, consensusque inter $\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon$ et $\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon$ toti calculo confirmando inserviet. —

Determinatio quantitatum AD', $A''D'$, ε', AD'', $A'D''$, ε'' prorsus simili modo perficitur, neque opus erit octo aequationes ad hunc calculum adhibendas huc transcribere quippe quae ex prioribus aequationibus sponte prodeunt si

$A'D$	$A''D$	ε	$l''-l'$	γ''	γ'
cum AD'	$A''D'$	ε'	$l''-l$	γ''	γ
vel cum AD''	$A'D''$	ε''	$l'-l$	γ'	γ

respective commutantur. —

Nova adhuc totius calculi confirmatio derivari potest e relatione mutua inter latera angulosque trianguli sphaerici inter puncta $DD'D''$ formati, unde demanant aequationes generalissime verae, quemcunque situm haec puncta habeant:

$$\frac{\sin(AD'-AD'')}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin(A'D-A'D'')}{\sin\varepsilon'} = \frac{\sin(A''D-A''D')}{\sin\varepsilon''}$$

Denique si loco eclipticae aequator tamquam planum fundamentale electus est, calculus mutationem non subit, nisi quod pro terrae locis heliocentricis A, A', A'' substituere oportet ea aequatoris puncta, ubi a circulis AB, $A'B'$, $A''B''$ secatur; accipiendae sunt itaque pro l, l', l'' ascensiones rectae harum intersectionum, nec non pro $A'D$ distantia puncti D ab intersectione secunda, etc

3.) Negotium tertium jam in eo consistit, ut duo loci geocentrici extremi corporis coelestis i.e. puncta B, B'' per circulum maximum jungantur, hujusque intersectio cum circulo maximo A'B' determinetur. Sit B* haec intersectio, atque $\delta'-\sigma$ ejus distantia a puncto A', nec non α^* ejus longitudo, β^* latitudo. Habemus itaque propterea quod B, B*, B'' in eodem circulo maximo jacent, aequationem satis notam

$$0 = tg\beta \sin(\alpha''-\alpha^*) - tg\beta^* \sin(\alpha''-\alpha) + tg\beta'' \sin(\alpha^*-\alpha)$$

Si nimirum x est inclinatio circuli B B* B'' versus eclipticam et y arcus eclipticae qui inter hunc (prolongatum) circulum et perpendiculum a B ad eclipticam contentus est, erit:

$$tg\,x = \frac{tg\beta}{\sin y} = \frac{tg\beta^*}{\sin(y+\lambda^*-\lambda)} = \frac{tg\beta''}{\sin(y+\lambda''-\lambda)} \text{ et}$$

eliminando y ex his aequationibus, obtinetur praecedens expressio. Si in hac expressione pro $tg\beta^*$ substituitur $tg\beta^* = tg\gamma' \sin(\alpha^*-l')$ erit

$$0 = \begin{cases} \cos(\alpha^*-l')\{tg\beta \sin(\alpha''-l') - tg\beta'' \sin(\alpha-l')\} \\ -\sin(\alpha^*-l')\{tg\beta \cos(\alpha''-l') + tg\gamma' \sin(\alpha''-\alpha) - tg\beta'' \cos(\alpha-l')\} \end{cases}$$

Quare quum sit $tg(\alpha^*-l') = \cos\gamma'\, tg(\delta'-\sigma)$, habebimus

$$tg(\delta'-\sigma) = \frac{tg\beta \sin(\alpha''-l') - tg\beta'' \sin(\alpha-l')}{\cos\gamma'(tg\beta \cos(\alpha''-l') - tg\beta'' \cos(\alpha-l') + \sin\gamma' \sin(\alpha''-\alpha))}$$

statuatur

$$tg\beta \sin(\alpha''-l') - tg\beta'' \sin(\alpha-l') = S$$
$$tg\beta \cos(\alpha''-l') - tg\beta'' \cos(\alpha-l') = T \sin t$$
$$\sin(\alpha''-\alpha) = T \cos t$$

eritque

$$tg(\delta'-\sigma) = \frac{S}{T \sin(t+\gamma')}$$

Ambiguitas in determinatione arcus $\delta'-\sigma$ per tangentem inde oritur, quod circuli maximi A'B', BB'' in duobus punctis se intersecant. nos pro B* semper adoptabimus intersectionem puncto B' proximam ita ut σ semper cadat inter limites $-90°$ et $90°$ unde ambiguitas illa tollitur. Plerumque tunc valor arcus σ (qui pendet a curvatura motus geocentrici) quantitas satis modica erit, et quidem

generaliter loquendo, secundi ordinis si temporum intervalla tanquam quantitates primi ordinis spectantur.

Quasnam modificationes calculo applicandas sint, si pro ecliptica aequator tamquam planum fundamentale electus est, sponte patet. —

Ceterum manifestum est, situm puncti B^* indeterminatum manere, si circuli BB'', $A'B'$ omnino coinciderent: tunc casum, ubi quatuor puncta A', B, B', B'' in eodem circulo maximo jacerent, a disquisitione nostra excludimus. Conveniet autem in eligendis observationibus eum quoq. casum evitare, ubi situs horum quatuor punctorum a circulo maximo parum distat; tunc enim situs puncti B^*, qui in operationibus sequentibus magni momenti est, per levissimos observationum errores nimis afficeretur, nec praecisione necessaria determinari posset. Perinde punctum B^* indeterminatum manere patet, sive quoties puncta B, B'' in unum coincidunt, in quo casu ipsius circuli BB'' positio indeterminata fieret, sive etiam quoties sibi opposita sunt, sed de hoc casu non loquimur, quum methodus nostra ad observationes tantum intervalla completentes non sint extendenda. —

4.) Sint in sphaera coelesti C, C', C'' tria corporis coelestis loca heliocentrica, quae respective in circulis maximis AB, $A'B'$, $A''B''$ ~~sita erunt~~ et quidem inter A et B, A' et B', A'' et B'' sita erunt: praeterea puncta C, C', C'' in eodem circulo maximo jacebunt, puta in eo, quem planum orbitae in sphaera coelesti projicit. Designabimus per r, r', r'' tres corporis coelestis distantias a Sole; per ϱ, ϱ', ϱ'' ejusdem distantias a terra; per R, R', R'' vel D, D', D'' terrae distantias a Sole. —

Porro statuimus arcus(*) $C'C''$, CC'', CC' respective $= 2f$, $2f'$, $2f''$ atq. duplicia rectilinea triangula $r'r''\sin 2f = n$, $rr''\sin 2f' = n'$, $rr'\sin 2f'' = n''$

(*) differentiis longitud. heliocentr. in orbita.

Habemus itaq. $f' = f + f''$, $AC + CB = \delta$, $A'C' + C'B' = \delta'$, $A''C'' + C''B'' = \delta''$

necnon $\frac{\sin\delta}{r} = \frac{\sin AC}{\varrho} = \frac{\sin CB}{R}$, $\frac{\sin\delta'}{r'} = \frac{\sin A'C'}{\varrho'} = \frac{\sin C'B'}{R'}$

$\frac{\sin\delta''}{r''} = \frac{\sin A''C''}{\varrho''} = \frac{\sin C''B''}{R''}$. Hinc patet simulac situs punctorum C, C', C'' innotuerit, quantitates r, r', r'', ϱ, ϱ', ϱ'' determinabiles fore. —

5.) Ostendendum adhuc est, quomodo hic situs punctorum C, C', C'' e quantitatibus $\frac{n''}{n} = b$, $2\left(\frac{n+n''}{n'}-1\right)r'^2 = \mathfrak{Q}$ et ci possit, si hae quantitates secundum priora quae nota supponuntur. (: n, n', n'' sunt nostra priores f, f', f'':)

Si circuli maximi B''B*B et C''C'C se intersecant in puncto N, erit

$NC'' - NC' = 2f$, $NC'' - NC = 2f'$, $NC' - NC = 2f''$ et hinc

$o = \sin 2f \sin NC - \sin 2f' \sin NC' + \sin 2f'' \sin NC''$

Sint nunc c, c', c'' perpendiculares distantiae punctorum C, C', C'' a circulo B''B*B et eadem ratione d, d', d'' distantiae punctorum D, D', D'' ab eodem circulo BB*B''. Quum sin c, sin c', sin c'' respective proportionales sint sin NC, sin NC', sin NC'' habebimus

$o = \sin 2f \sin c - \sin 2f' \sin c' + \sin 2f'' \sin c''$ vel per rr'r'' multiplicando $o = nr\sin c - n'r'\sin c' + n''r''\sin c''$

Porro patet, esse sin c ad sin d, ut sinus distantiae puncti C a B ad distantiam puncti D a B, utraque distantia secundum eandem directionem mensurata. Habetur itaque

$$-\sin c = \frac{\sin d' \sin CB}{\sin(A'D' - \delta')}, \quad -\sin c' = \frac{\sin d \sin C'B^*}{\sin(A'D - \delta'' + \sigma)}$$

$$-\sin c'' = \frac{\sin d' \sin C''B''}{\sin(A''D' - \delta''')} = \frac{\sin d \sin C''B''}{\sin(A''D - \delta''')}$$

Dividendo itaque aequationem priorem $o = nr\sin c$ etc per $r''\sin c''$, et substituendo praecedentes valores pro sin c etc erit

$$o = n \cdot \frac{r \sin CB}{r'' \sin C''B''} \cdot \frac{\sin(A''D' - \delta''')}{\sin(A'D' - \delta')} - n' \cdot \frac{r' \sin C'B^*}{r'' \sin C''B''} \cdot \frac{\sin(A''D - \delta''')}{\sin(A'D - \delta'' + \sigma)} + n''$$

Quod si hic arcum C''B'' per z designamus, pro r, r', r'' valores suos substituimus, brevitatisque causa ponimus

$$\frac{\mathfrak{Q}\sin d' \sin(A''D' - \delta''')}{\mathfrak{Q}''\sin d'' \sin(A'D' - \delta')} = a, \quad \frac{\mathfrak{Q}'\sin d'' \sin(A''D - \delta''')}{\mathfrak{Q}''\sin d''' \sin(A'D - \delta'' + \sigma)} = b$$

aequatio nostra ita se habebit

$$o = an - bn' \cdot \frac{\sin(z - \sigma)}{\sin z} + n''$$

coëfficientem b etiam per formulam sequentem computare licet, quae ex aequationibus modo allatis facile deducitur:

$$a \times \frac{\mathfrak{Q}'\sin d'' \sin(A'D'' - \delta')}{\mathfrak{Q}\sin d' \sin(A'D'' - \delta'' + \sigma)} = b$$

Calculi confirmandi causa haud inutile erit, utraque formula uti. Quoties $\sin(A'D'' - \delta'' + \sigma)$ major est quam $(A'D - \delta'' + \sigma)$, formula poste-

posterior a tabularum erroribus inevitabilibus minus afficitur, quam prior, adeoque huic praeferenda erit, si forte parvula discrepantia illinc explicanda in valoribus ipsius b se prodiderit; contra formulae priori magis fidendum erit quoties $\sin(A'D''-\delta''+\sigma)$ minor est quam $\sin(A''D-\delta+\sigma')$; si magis placet, medium idoneum inter ambos valores adoptabitur. ——

Ex nostra aequatione $0 = an - et$ et ex $P = \frac{n''}{n'}$ sequitur

$$(n+n'')\frac{P+a}{P+1} = bn'\frac{\sin(z-\sigma)}{\sin z};$$ hinc vero et ex

$$Q = 2\left(\frac{n+n''}{n'}-1\right)r'^3$$ atque $$r' = \frac{R'\sin\delta''}{\sin z}$$ elicitur

$$\sin z + \frac{Q\sin^4 z}{2R'^3\sin^3\delta''} = b\frac{P+1}{P+a}\sin(z-\sigma)$$ sive

$$\frac{Q\sin^4 z}{2R'^3\sin^3\delta''} = \left(b\frac{P+1}{P+a}-\cos\sigma\right)\sin(z-\sigma) - \sin\sigma\cos(z-\sigma)$$

Statuendo itaque brevitatis causa $\frac{1}{2R'^3\sin^3\delta''\sin\sigma} = c$ introducendoque angulum auxiliarem ω talem ut fiat $\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\sigma}{b\frac{P+1}{P+a}-\cos\sigma}$ prodit aequatio $cQ\sin\omega\sin^4 z = \sin(z-\omega-\sigma)$ ex qua incognitam z eruere oportebit. (Hanc aequationem prius jam sed via analytica obtinuimus). —

Ut angulus ω commodius computetur formulam praecedentem pro $\operatorname{tg}\omega$ ita exhibere convenit $\operatorname{tg}\omega = \frac{(P+a)\operatorname{tg}\sigma}{P\left(\frac{b}{\cos\sigma}-1\right)+\left(\frac{b}{\cos\sigma}-a\right)}$

Quamobrem statuendo $\frac{\frac{b}{\cos\sigma}-a}{\frac{b}{\cos\sigma}-1} = d$, $\frac{\operatorname{tg}\sigma}{\frac{b}{\cos\sigma}-1} = e$ habebimus ad determinandum ω formulam simplicissimam

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{e(P+a)}{P+d}$$

Computum quantitatum a, b, c, d, e a solis quantitatibus datis pendentem, tamquam negotium quartum consideramus. Quantitates b, c, e ipsae non erunt necessariae verum soli ipsarum logarithmi. — Ceterum datur casus specialis, ubi haec praecepta aliqua mutatione indigent. Quoties scilicet circulus maximus BB'' cum $A'B''$ coincidit, adeoque puncta B, B'' respective cum D', D, quantitates a, b valores infinitos nanciscerentur. — Statuendo in hoc casu

$$\frac{R\sin\delta\sin(A'D''-\delta'+\sigma)}{R'\sin\delta''\sin(A'D''-\delta')}=\pi$$

habebimus loco aequationis ($0=an-bn'\sin z\ldots$) hancce

$$0=\pi n-\frac{n'\sin(z-\sigma)}{\sin z},\ \text{unde, faciendo}\ \operatorname{tg}\omega=\frac{\pi\sin\sigma}{\mathfrak{b}+(1-\pi\cos\sigma)},\qquad (A)$$

eadem aequatio ($c\,R\sin\omega\sin^4 z=$ etc) elicitur.

Perinde in casu speciali, ubi $\sigma=0$, fit c infinita atque $\omega=0$, unde factor $c\sin\omega$ in aequatione $c\,R\sin\omega\sin^4 z=\ldots$ indeterminatus esse videtur: nihilominus revera determinatus est, ipsiusque valor $=\frac{\mathfrak{b}+a}{2R^3\sin^3\delta''(b-1)(\mathfrak{b}+d)}$ uti levis attentio docebit. In hoc itaque casu fit $\sin z=R'\sin\delta''\sqrt[3]{\frac{2(b-1)(\mathfrak{b}+d)}{2(\mathfrak{b}+a)}}$.

Aequatio $c\,R\sin\omega\ldots$, quae evoluta ad ordinem octavum ascenderet, in forma sua non mutata expeditissime tentando solvitur. Ceterum e theoria aequationum facile ostendi potest, (quod tamen fusius evolvere brevitatis causa hic supersedemus), hanc aequationem vel duas vel quatuor solutiones per valores reales admittere. In casu priori valor alter ipsius $\sin z$ positivus erit, alterum negativum rejicere oportebit, quia per problematis naturam r' negativus evadere nequit. In casu posteriori inter valores ipsius $\sin z$ vel unus positivus erit, tresque reliqui negativi — ubi igitur haud ambiguum erit quemnam adoptare oporteat — vel tres positivi cum uno negativo; in hoc casu e valoribus positivis ii quoque si qui adsunt rejici debent, ubi z major evadit quam δ'', quoniam per aliam problematis conditionem essentialem ϱ' adeoque etiam $\sin(\delta''-z)$ quantitas positiva esse debet.

Quoties observationes mediocribus temporum intervallis ab invicem distant, plerumque casus postremus locum habebit, ut tres valores positivi ipsius $\sin z$ aequationi satisfaciant. Inter has solutiones praeter veram reperiri solet aliqua ubi z parum differt a δ'', modo excessu, modo defectu; hoc

phaenomenon sequenti modo explicandum est. Problematis nostri tractatio analytica ei soli conditioni superstructa est, quod tres corporis coelestis in spatio loci jacere debeant in rectis, quarum situs per locum absolutum terrae positionemque observatam determinatur. Jam per ipsius rei naturam loci illi jacere quidem debent in iis rectarum partibus, unde lumen ad terram descendit: sed aequationes analyticae hanc restrictionem non agnoscunt, omniaque locorum systemata, quae quidem cum Kepleri legibus consentiunt, perinde complecti debent, sive ab hac terrae parte in illis rectis jaceant, sive ab illa, sive denique cum ipsa terra coincidant. Jam hic ultimus casus utique problemati nostro satisfaciat, cum terra ipsa ad normam illarum legum moveatur. Hinc patet, aequationes comprehendere debere solutionem, in qua puncta C, C', C'' cum punctis A, A', A'' coincidant (: quatenus variationes minutissimas locis terrae ellipticis a perturbationibus et parallaxi inductas negligimus:) aequatio itaque (: $cQ \sin \omega$ .....) semper admitteret deberet solutionem $z = \delta''$ si pro P, Q valores veri locis terrae respondentes acciperentur. Quatenus autem illis quantitatibus valores tribuuntur ab his non multum discrepantes (: quod semper supponere licet, quoties temporum intervalla modica sunt:), inter solutiones hujus aequationis necessario aliqua reperiri debet quae proxime ad valorem $z = \delta''$ accedit. Plerumque quidem in eo casu, ubi haec aequatio solutiones per valores positivos ipsius z admittit, tertia ex his (praeter veram eamque, de qua modo diximus) valorem ipsius z majorem quam δ'' sistet, adeoque analytice tantum possibilis, physice vero impossibilis erit: tunc itaque quamnam adoptare oporteat ambiguum esse nequit. Attamen attingere utique potest, ut aequatio illa duas ~~positi-vas~~ solutiones idoneas diversas admittat, adeoque problemati

nostro per duas orbitas prorsus diversas satis fieri licet. Ceterum in tali casu orbita vera a falsa facile dignoscitur, quam primum observationes alias magis remotas ad examen revocare licuerit. —

6.) Simulac angulus z erutus est, statim habetur r' per aequationem $r' = \frac{R'\sin\delta'}{\sin z}$. Porro ex aequationibus $P = \frac{n''}{n}$ atque ~~P+~~ $0 = an - bn' \ldots\ldots$ ~~dx~~ elicimus

$$\frac{n'r'}{n} = \frac{(P+a)R'\sin\delta'}{b\sin(z-\sigma)} \quad \text{et} \quad \frac{n'r'}{n''} = \frac{1}{P}\cdot\frac{n'r'}{n}$$

Iam ut formulas, secundum quas situs punctorum C, C'' e situ puncti C' determinandus est, tali modo tractemus, ut ipsarum veritas generalis pro iis quoque casibus, quos nostra figura non monstrat, statim eluceat, observamus sinum distantiae puncti C' a circulo maximo CB (positive sumtae in regione superiori, negative in inferiori) aequalem fieri producto ex $\sin\varepsilon''$ in sinum distantiae ~~D'~~ ~~AA'~~ puncti C' a D'' secundum directionem progressivam mensuratae, adeoque aequale $-\sin\varepsilon''\sin C'D'' = -\sin\varepsilon''\sin(z - A'D'' - \delta')$; perinde fit, sinus distantiae puncti C'' ab eodem circulo maximo $= -\sin\varepsilon''\sin C''D'$. Manifesto autem iidem sinus sunt ut $\sin CC' : \sin CC''$ sive ut $\frac{n''}{rr''}$ sive ut $n''r'' : n'r'$. —

Statuendo itaque $C''D' = \zeta''$ habemus, si hi ambo sinus per se dividuntur $r''\sin\zeta'' = \frac{n'r'}{n''}\cdot\frac{\sin\varepsilon''}{\sin\varepsilon'}\sin(z + A'D'' - \delta')$

Prorsus simili modo statuendo $CD' = \zeta$ eruitur

$$r\sin\zeta = \frac{n'r'}{n}\cdot\frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'}\sin(z + AD - \delta')$$

Praeterea erat in n. 4.)

$$r\sin CB = R\sin\delta$$
$$r''\sin C''B'' = R''\sin\delta'' \text{ sed}$$
$$CB = \zeta - AD' + \delta$$
$$C''B'' = \zeta'' - A''D' + \delta'' \text{ sive}$$
$$r\sin(\zeta - AD' + \delta) = R\sin\delta$$
$$r''\sin(\zeta'' - A''D' + \delta'') = R''\sin\delta''$$

litt 7.) Ut ex his aequationibus inveniantur r, r'', ζ, ζ'' sit

$$p = \frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\varepsilon'} \cdot \sin(z + A'D - \delta')$$

$$p'' = \frac{n'r'}{n''} \cdot \frac{\sin\varepsilon''}{\sin\varepsilon'} \cdot \sin(z + A'D'' - \delta'')$$

$b = AD' - \delta$, $c = R\sin\delta$, $b'' = A''D' - \delta''$, $c'' = R''\sin\delta''$ hinc erit

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{p\sin b}{p\cos b - c}, \quad r = \frac{p}{\sin\zeta}$$

$$\operatorname{tg}\zeta'' = \frac{p''\sin b''}{p''\cos b'' - c''}, \quad r'' = \frac{p''}{\sin\zeta''}$$

ubi ζ, ζ'' semper ita assumi debent, ut r, r'' sint positivi.

8.) Arcubus ζ, ζ'' inventis, punctorum C, C', C'' positio data erit, poteritque distantia $CC'' = 2f'$ ex ζ, ζ'' et ε' determinari. Sint u, u'' inclinationes circulorum maximorum $AB, A''B''$ ad circulum maximum CC'' (quae in figura respective erunt anguli $C''CD'$ et $180° - CC''D'$) habebimus aequationes sequentes

(Analogiae Neperi)

$$\sin f' \sin\tfrac{1}{2}(u'' + u) = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta'')$$

$$\sin f' \cos\tfrac{1}{2}(u'' + u) = \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \sin\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'')$$

$$\cos f' \sin\tfrac{1}{2}(u'' - u) = \sin\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(\zeta + \zeta'')$$

$$\cos f' \cos\tfrac{1}{2}(u'' - u) = \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon \cos\tfrac{1}{2}(\zeta - \zeta'')$$

Duae priores dabunt $\frac{1}{2}(u'' + u)$ et $\sin f'$, duae posteriores $\frac{1}{2}(u'' - u)$ et $\cos f'$. Angulos $\frac{1}{2}(u'' + u)$ et $\frac{1}{2}(u'' - u)$ qui in ultima demum hypothesi ad determinandum situm plani orbitae adhibebuntur, in hypothesibus primis negligere licebit. —

Prorsus simili modo f ex ε, $C'D$ et $C''D$ nec non f'' ex ε'', CD'', $C'D''$ derivari possent; sed multo commodius ad hunc finem formulae sequentes adhibentur

$$\sin 2f = r \sin 2f' \cdot \frac{n}{n'r'}$$

$$\sin 2f'' = r'' \sin 2f' \cdot \frac{n''}{n'r'}$$

ubi logarithmi quantitatum $\frac{n}{n'r'}$ et $\frac{n''}{n'r'}$ jam e calculis praecedentibus adsunt. Totus denique calculus confirmationem novam inde nanciscetur, quod fieri debet $2f + 2f'' = 2f'$; si qua forte differentia prodeat, nullius momenti certe esse poterit

si quidem omnes operationes quam accuratissime peractae fuerint. Interdum tamen, calculo septem decimalibus subducto, ad aliquot minuti secundi partes decimas assurgere poterit, quam si operae pretium videtur facillimo negotio inter $2f$. $2f''$ ita dispertiemur ut logarithmi Sinuum aequaliter augeantur vel diminuantur, quo pacto aequationi $p = \frac{r \sin 2f''}{r'' \sin 2f} = \frac{n''}{n}$ omni quam tabulae permittunt, praecisione satisfactum erit. Quoties f et f'' parum differunt, differentiam illam inter $2f$ et $2f''$ aequaliter distribuisse sufficiet. —

Pro computandis distantiis planetae a terra $\varsigma, \varsigma', \varsigma''$ habemus formulas

$$\varsigma = \frac{R \sin(AD - \zeta)}{\sin(\zeta - AD + \delta)} = \frac{r \sin(AD' - \zeta)}{\sin \delta}$$

$$\varsigma' = \frac{R' \sin(\delta' - z)}{\sin z} = \frac{r' \sin(\delta' - z)}{\sin \delta'}$$

$$\varsigma'' = \frac{R'' \sin(A''D' - \zeta'')}{\sin(\zeta'' - A''D' + \delta'')} = \frac{r'' \sin(A''D' - \zeta'')}{\sin \delta''}$$

Ceterum si observationes ab initio statim per methodum aliquam ab Aberratione purgatae fuissent, hicce calculus omittendus, neque adeo necessarium foret, valores distantiarum $\varsigma, \varsigma', \varsigma''$ eruere, nisi forte ad confirmandum, an ii, quibus calculus Aberrationum superstructus est, satis exacti fuerint. Denique sponte patet totum istum calculum, tunc quoque supprimendum esse, quando Aberrationem omnino negligere placuerit. —

9.) Praemissis omnibus his praeparatoriis erimus facile in statu, elementa orbitae omni cum exactitudine, quam permittunt observationes, quibus superstruitur calculus, determinandi. — Ut totam operationem facilius perspicere possimus volumus illam breviter hic indicare. —

Primo quaeruntur quantitates y, δ ex n. 1. dein AD, $A''D$, ε ex 2, σ ex 3 et a, b, c ex 5. Hisce cum quantitatibus transimus nunc ad primam hypothesin. Cum $P = \frac{\Omega''}{\Omega}$ et $Q = \mu^2 \vartheta \vartheta''$ quaeruntur quantitates ω et z ex aequatione (A) data in fine n. 5.) dein r', $\frac{n r'}{n'}$ et $\frac{n'' r'}{n'}$ ex 6.) et cum his ultimis factoribus invenitur p, p'' et ζr, $\zeta'' r''$ ex 7.) et f uti f et f'' ex n 8.)

Si hac ratione innotuerint pro duabus primis observationibus quantitates r, r', ϑ'' et f'' queritur secundum superius indicatam aequationem valor quantitatis y'' seu η'' et eadem ratione pro ambabus ultimis observationibus ex r', r'', ϑ et f quantitatem y seu η. —
Si nossemus ita η'' et η, correcti valores P et Q sunt sequentes $P' = \frac{\vartheta''}{\vartheta} \cdot \frac{\eta}{\eta''}$, $Q' = \frac{\mu r'^3 \vartheta \vartheta''}{r r'' \eta \eta'' \cos f \cos f' \cos f''}$ et si hi valores a prius assumtis $P = \frac{\vartheta''}{\vartheta}$ et $Q = \mu \vartheta \vartheta''$ adhuc multum differunt, queruntur in nova secunda hypothesi cum his novis P', Q', uti prius cum P et Q iterum ω et z ex 5.), r', $\frac{n' r'}{n}$, $\frac{n' r'}{n''}$ ex 6.), ζ, r, ζ'', r'' ex 7.) et f, f', f'' ex 8.) et dein iterum ex r, r', ϑ'', h'' quantitas η'' et ex r', r'', ϑ, h, quantitas η, per quid iterum novi, veritati adhuc propiores valores pro P et Q obtinentur, quibuscum, si adhuc ab immediate precedentibus notabiliter discrepant, tertia hypothesis calculari et generatim operatio tamdiu continuari potest, donec novi valores pro P, Q a precedentibus non amplius differant. Sed fere semper, si intervalla ϑ, ϑ'' sunt media et si preterea sibi aequalia sunt, non necessaria erit tertia hypothesis, et sepe jam cum prima satis approximata resultata obtinentur. —

10.) In ultima demum hypothesi elementa ipsa calculabuntur secundum methodum superius allatam vel ex f, r', r'' vel ex f'', r, r' perducendo scilicet ad finem calculum alterutrum quem in hypothesibus antecedentibus tantummodo usque ad η vel η'' prosequi oportuerat: si utrumque perficere placuerit, harmonia numerorum resultantium novam totius laboris confirmationem suppeditabit. Attamen prestat, quamprimum f, f', f'' eruta sunt, elementa e sola combinatione loci primi cum tertio derivare, puta ex f', r, r'' atque temporis intervallo, tandemque ad majorem calculi certitudinem locum medium in orbita secundum elementa inventa determinare. —
Hoc itaque modo sectionis conicae dimensiones innotescunt, puta excentricitas, semiaxis major sive semiparameter, positio perihelii respectu locorum heliocentricorum C, C', C'', motus medius, atque anomalia media pro epocha arbitraria, siquidem orbita elliptica est, vel tempus transitus per perihelium

si orbita est hyperbolica vel parabolica. Superest itaq tantummodo, ut positio locorum heliocentricorum in orbita respectu nodi ascendentis, positio hujus nodi respectu puncti aequinoctialis atq inclinatio orbitae ad eclipticam (vel aequatorem) determinentur. Haec omnia per solutionem trianguli sphaerici ΩAC efficere licet. Sit Ω longitudo nodi ascendentis i inclinatio orbitae, g et g'' argumenta latitudinis in prima et tertia observatione deniq $l-\Omega = h$, $l''-\Omega = h''$ erunt nimirum in triangulo ΩAC latera $AD'-\zeta$, g, h anguliq his respective oppositi i, $180°-\gamma$, u



Habemus itaq

$$\sin\tfrac{1}{2}i\,\sin\tfrac{1}{2}(g+h) = \sin\tfrac{1}{2}(AD'-\zeta)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+u)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}i\,\cos\tfrac{1}{2}(g+h) = \cos\tfrac{1}{2}(AD'-\zeta)\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-u)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i\,\sin\tfrac{1}{2}(g-h) = \sin\tfrac{1}{2}(AD'-\zeta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+u)$$
$$\cos\tfrac{1}{2}i\,\cos\tfrac{1}{2}(g-h) = \cos\tfrac{1}{2}(AD'-\zeta)\cos\tfrac{1}{2}(\gamma-u)$$

Duae primae aequationes dabunt $\tfrac{1}{2}(g+h)$ et $\sin\tfrac{1}{2}i$ duae reliquae $\tfrac{1}{2}(g-h)$ et $\cos\tfrac{1}{2}i$ ex g innotescet situs perihelii respectu nodi ascendentis, ex h situs nodi in ecliptica, deniq innotescet i sinu et cosinu se mutuo confirmantibus. — Ad eundem scopum pervenire possumus adjumento trianguli $\Omega A''C''$ ubi tantummodo in formulis praecedentibus characteres $g, h, A, \zeta, \gamma, u$ in $g'', h'', A'', \zeta'', \gamma'', u''$ mutare oportet. — Ut toti labori adhuc alia confirmatio concilietur, haud abs re erit, calculum utroq modo perficere: unde si quae levisculae differentiae inter valores ipsius i, Ω atq longitudinis perihelii in orbita prodeunt, valores medios adoptare conveniet. Raro tamen hae differentiae ad 0."1 vel 0."2 ascendent, siquidem omnes calculi septem figuris decimalibus accurate elaborati fuerant. Ceterum quoties loco eclipticae aequator tanquam planum fundamentale adoptatus est, nulla hinc in calculo differentia oritur, nisi quod loco punctorum A, A'', intersectiones aequatoris cum circulis maximis AB, $A''B''$ accipiendae sunt.

Progredimur jam ad illustrationem hujus methodi per aliquod exemplum.

Assumamus tres sequentes observationes Vestae:

1807	med. temp. Paris		
24 April.	9ʰ 5′ 16.″5	λ = 174° 7′ 33.″2	β = + 11° 37′ 24.″1
29 —	8 43 42.2	λ' = 173 44 21.3	β' = 11 19 42.6
4 Maji	8 22 51.2	λ'' = 173 33 33.0	β'' = 11 0 39.2

$l = 218° 42' 55''.5$ $l' = 218° 33' 22''.4$ $l'' = 225° 23' 15''.5$

$\log. D = 0.0028540$ $\log D' = 0.0034240$ $\log D'' = 0.0089670$

ergo $\delta = 4.9855208$ dies $\delta' = 9.9705405$ dies $\delta'' = 4.9850197$ dies

$\log \alpha = 5.3424727$, $\log A = 7.6214048$, $\log A' = 7.6537430$, $\log A'' = 7.6808882$

$\log B = 7.9368564_n$, $\log B' = 7.9651452_n$ $\log B'' = 7.9887417_n$

$\log. C = 7.6514234$, $\log C' = 7.6756959$, $\log C'' = 7.6956918$

hinc $\log. r' = 0.3477013$, $\log d'' = 0.1390755$, $\log d' = 0.1286815$, $\log d''' = 0.1506780$

Ex 1.) et 2.)

$\gamma = 162° 6' 41''.45$	$\gamma' = 164° 7' 59''.97$	$\gamma'' = 165° 42' 49''.00$
$\delta' = 40\ 59\ 23.20$	$\delta'' = 45\ 55\ 46.59$	$\delta''' = 50\ 42\ 47.46$
$AD = 36\ 10\ 38.89$,	$A'D = 40\ 50\ 35.57$	$\varepsilon = 2\ 1\ 4.02$
$AD' = 32\ 4\ 18.47$	$A'D' = 41\ 22\ 17.47$	$\varepsilon' = 4\ 28\ 41.94$
$AD'' = 32\ 30\ 18.17$	$A'D'' = 37\ 8\ 17.87$	$\varepsilon'' = 2\ 27\ 38.46$
ex 3.) $\sigma = 0\ 5\ 46.54$	$\alpha^* = 173\ 50\ 8.01$	$\beta^* = 11\ 18\ 35.33$

ex 5.) $\log. a = 9.9469946$, $\log b = 9.9765739$. $\log c = 2.8941157$

Et omnes praecedentes quantitates sunt invariabiles, quum non dependeant a P et Q.

<u>1. Hypothesis</u> $P = \frac{\delta''}{\delta}$, $Q = \mu^2 \delta \delta''$ vel

$\log. P = 9.9999564$. $\log Q = 7.8665402$

hinc ex 5.) $\omega = 17° 46' 21''.51$ et aequatio (A)

$\sin(z - 17° 52' 8''.05) = 1.7591789 \sin^4 z$ ex qua $z = 19° 0' 6''.28$

et ex 6.) $\log r' = 0.3477619$, $\log. \frac{n r'}{n} = 0.6480249$, $\log. \frac{n' r'}{n''} = 0.6480685$

ex 7.) $\zeta = 8° 18' 53''.69$, $\zeta'' = 4° 15' 27''.51$

$\log. r = 0.3486400$. $\log r'' = 0.3463668$

ex 8.) $f' = 1° 31' 7''.32$ $f = 0° 45' 39''.28$. $f'' = 0° 45' 28''.47$

$u = 167° 41' 45''.31$ $u'' = 163° 16' 52''.51$

Differentia inter f' et $f + f''$ est 0''.43. Nos igitur hic dispertiendo hunc parvum errorem, assumimus

$f' = 1° 31' 7''.32$, $f = 0° 45' 39''.07$, $f'' = 0° 45' 28''.25$

Cum hisce valoribus pro r, r', r'' et f, f', f'' dat secunda et tertia observatio

$\mathfrak{l}$ (quant. auxil.) $= 0.0000443$, $\log m^2 = 5.9233158$, $h' = 0.0001005713$

$\log \eta = 0.0000485$, $x = 0.000039495$ $\xi = 0.00000000089$

hinc est correct. $\log. \eta = 0.0000485$ ubi prius.

Prima et secunda observatio dant eadem ratione

$\mathfrak{l} = 0.0000439$, $\log. m^2 = 5.9207179$ $h' = 0.0000999715$, $\log \eta'' = 0.0000482$

hinc correcti valores pro P, Q, log. $P' = 9.9999567$, log $Q' = 7.8665894$
ergo $x = \log. P' - \log P = 0.0000003$, $y = \log. Q' - \log. Q = 0.0000492$
Cum his novis valoribus pro P, Q calculatur nunc
2. Hypothesis in qua invenitur $\omega = 17^\circ\ 46'\ 21''.75$

$\sin(z - 17^\circ\ 52'\ 8''.29) = 1.7593344 \sin^4 z$ .... $z = 19^\circ\ 0'\ 7''.22$

log. $r' = 0.3471561$, log $\frac{n'r'}{n} = 0.6480192$, log $\frac{n'r'}{n''} = 0.6480625$
$\zeta = 8^\circ\ 18'\ 54''.54$, $\zeta'' = 11^\circ\ 15'\ 28''.51$, log. $r = 0.3480342$, log $r'' = 0.3463612$
$f' = 1^\circ\ 31'\ 7''.40$, $f = 0^\circ\ 45'\ 39''.32$, $f'' = 0^\circ\ 45'\ 28''.51$
$u = 167^\circ\ 41'\ 44''.69$, $u'' = 163^\circ\ 16'\ 51''.89$.

Differentia inter f' et $f + f''$ est iterum $0''.48$, ergo possumus assumere $f' = 1^\circ\ 31'\ 7''.40$, $f = 0^\circ\ 45'\ 39''.11$, $f'' = 0^\circ\ 45'\ 28''.29$
Cum hoc dat secunda et tertia observatio
$l = 0.0000412$, log $m^2 = 5.9233329$, $h' = 0.00010057592$, log. $\eta = 0.0000485$
ex prima et secunda
$l = 0.0000439$, log $m^2 = 5.9267353$, $h' = 0.0000999755$, log $\eta'' = 0.0000482$
hinc novi correcti valores
log. $P'' = 9.9999567$, log $Q'' = 7.8665892$, et quum hi valores ab immediate praecedentibus fere non amplius divergant, non amplius necessarius est computus novae hypotheseos. — Ergo est
$2f = 1^\circ\ 31'\ 18''.22$ $2f' = 3^\circ\ 2'\ 14''.80$, $2f'' = 1^\circ\ 30'\ 56''.58$
log $r = 0.3480342$ log. $r' = 0.3471561$ log $r'' = 0.3463612$
ex quibus log. $\rho = 0.1363270$. log. $\rho' = 0.2477860$, log $\rho'' = 0.2580862$
et log. curtata distantia, 0.1273284, 0.1381612, 0.1500167
Ad invenienda elementa ex prima et tertia observatione, habemus
log. $r = 0.3480342$, log $r'' = 0.3463612$
$\frac{v''-v}{2} = 1^\circ\ 31'\ 7''.40$ $t = 9.9705405$ hinc
$l = 0.0001766$, log $m^2 = 6.5243749$, log $x = 6.1975011$
$\frac{e''-e}{2} = 1^\circ\ 26'\ 18''.66$ semi differentia excentricarum anomaliarum
ergo log. $a = 0.3726628$, log. $p = 0.3689094$, $\varepsilon = 0.0920261$
$\frac{e''+e}{2} = 308^\circ\ 8'\ 27''.13$, $e = 306^\circ\ 42'\ 8''.47$ $e'' = 309^\circ\ 34'\ 45''.79$
$\frac{v''+v}{2} = 303^\circ\ 52'\ 0''.23$, $v = 302^\circ\ 20'\ 52''.83$, $v'' = 305^\circ\ 23'\ 7''.63$
ubi a, p, ε semiaxis major, semi parameter excentricitas et v, e vera et excentrica anomalia est.
Hinc est etiam medius motus in tempore t

$$\frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 2(g - \varepsilon \sin g \cos \tfrac{e''+e}{2}) = 9768''.7232$$

et media anomalia pro prima observatione

$$M = e - \varepsilon \sin e = 310^\circ\ 55'\ 47''.105$$

et in ultima $M'' = e' - \varepsilon \sin e' = 313\ 38\ 35.827$

Differentia $= 2^\circ\ 42'\ 48''.722 = 9768''.722$ uti prius.

Si autem quaerimus ex r, r', g, h et t alia methodo priori elliptica elementa erit $\omega = -0^\circ\ 1'\ 39''.34$. $x = -56^\circ\ 7'\ 59''.77$ $y = -51^\circ 51'\ 32''.87$

$\log X = 8.4119879$ $\log Y = 7.0757912$

$v = 302^\circ\ 20'\ 52''.83$ $v' = 305^\circ\ 23'\ 7''.63$, $\varphi = 5^\circ\ 16'\ 48''.64$

$e = 306\ 42\ 8.47$ $e' = 309\ 34\ 45.79$ $\varepsilon = 0.0920261$

$\log a = 0.3726028$ etc uti prius

Praeterea erat $AD' = 32^\circ\ 4'\ 18''.47$, $\gamma = 162^\circ\ 6'\ 41''.45$, $\zeta = 8^\circ\ 18'\ 54''.54$

$u = 167^\circ\ 41'\ 44''.69$ ergo ex ultimis aequationibus in 10.)

$h = 110^\circ\ 37'\ 15''.74$, $g = 87^\circ\ 54'\ 35''.50$, $i = 7^\circ\ 6'\ 46''.42$, $\Omega = 103^\circ 5' 39''.76$

hinc quoq. elongatio perihelii a nodo $= 145^\circ\ 33'\ 42''.68$

et longitudo perihelii $= 248\ 39\ 22.43$

Si haec longitudo perihelii addatur ad mediam anomaliam primae observationis, habemus pro tempore primae observationis mediam longitudinem in orbita pro 1807 April 24.378663

Quum autem sit diurnus tropicus motus 979.8963, debemus ab hac longitudine subtrahere $6'\ 11''.050$ ut obtineamus mediam longitudinem $199^\circ\ 28'\ 58''.485$ pro 1807 April. 24.00 –

Si subtrahimus adhuc $31^\circ 18'\ 8''.642$, obtinemus

$168^\circ\ 10'\ 50''.443$ pro media longitud. pro 1806 Decemb. 31. med. merid. Paris

Ut videamus, uti accurate observationes per haec elementa repraesentantur, habemus cum inventis valoribus pro i et Ω

	pro prima	pro tertia observatione
argum. latitud.	$87^\circ\ 54'\ 35''.50$	$90^\circ\ 56'\ 56.90$
L	213 42 55.5	223 23 15.5
log. R	0.0028540	0.0039670
log. r	0.3480342	0.3463612
heliocent. longitud.	$190^\circ\ 59'\ 16''.95$	$194^\circ\ 2'\ 56''.51$
latitud.	7 6 29.29	7 6 42.90
geocentr. longitud.	174 7 33.18	173 33 32.95
observatio	174 7 33.2	173 33 33.0
Error	+ 0''.02	+ 0''.05
geocent. latitud.	$11^\circ\ 37'\ 24''.07$	$11^\circ\ 0'\ 39''.19$
observatio	11 37 24.1	11 0 39.20
Error	+ 0''.03	+ 0''.01

Ut praecedentes expressiones in omnibus casibus bene applicentur, accedere debent aliquae notationes. —

1.) Si planum orbitae cum ecliptica coincidit, tres observationes, h.e. tres geocentricae longitudines, non amplius sufficiunt ad determinationem quatuor elementorum a, ε, longitudinis perihelii et epochae; sed necessariae sunt quatuor geocentricae longitudines. Ex hoc sequitur, quod orbitam, cujus inclinatio versus eclipticam admodum parva est, praecedentem methodum non cum securitate applicabilem esse, quia minimi errores observationum qui semper inevitabiles sunt, ad resultatum finale maximum influxum habent. Ex hac causa celeb. Gauss hunc casum in suo opere specialiter tractavit. —

2.) Tandem observationes geocentricae debent ante applicationem ad determinationem elementorum, corrigi propter Nutationem, praecessionem etc quia hae observationes solent dari per apparentes ascensiones rectas et declinationes. Cum autem ecliptica ad hos calculos commodior est, quaeruntur ex his apparentibus ascensionibus rectis et declinationibus cum obliquitate eclipticae per notas expressiones, apparentes longitudines et latitudines, et hae ultimae dein liberantur a Nutatione, praecessione, parallaxi et Aberratione. Nutatio longitudinis est 18.''9 sin ☊, et per praecessionem omnes tres longitudines planetae reducuntur ad commune punctum vernum, quod v.c. pro epocha mediae observationis locum habuit. Latitudo per nutationem et praecessionem non mutatur. Ad computum parallaxis longitudinis et latitudinis uti ad determinationem Aberrationis necessaria est saltem approximata cognitio distantiae ρ planetae a terra: si dein est dλ, dβ diurnus geocentricus motus planetae in longitudine et latitudine dein est correcta longitudo et latitudo

$\lambda + (0.00571)\rho\, d\lambda$ $\qquad$ $\beta + (0.00571)\rho\, d\beta$

Si dein quaeritur e tabulis solaribus longitudo Solis ☉, sine nutatione, et si reducitur dein per praecessionem ad superius pro planeta electam epocham, erit longitudo terrae L, qua cum prius inventa longitudine planetae superstruitur determinatio elementorum

$L = ☉ + 180° + 20.''25$ ubi 20.''25 (fere) constans Aberratio terrae est

Si autem distantiam ρ adhuc non noscimus, commodissimum erit, negligendi hanc et alias parvas correctiones apud primam de-

termi

determinationem orbitae, eo magis, quum, uti videbimus, accurata determinatio elementorum plus quam tribus observationibus superstrui, et hinc praecedentia tantummodo qua approximatio considerari debet, quae quidem tribus assumtis observationibus penitus, sed, quum hae, uti omnes nostrae observationes, non sine errore sint, non ceteris observationibus satisfacit.—

3.) Praecedens methodus adhuc supponit, intervalla temporum ϑ, ϑ'' non esse admodum magna et sibimet invicem fere aequalia. Praeterea haec methodus etiam tum adhuc dat resultata, quibuscum possumus esse contenti: Gauss in suo opere habet $\vartheta = 126$ dies et $\vartheta'' = 134$ dies.

Si vellemus respicere praecipue secundam conditionem, nimirum aequalitatem intervallorum temporum, erit quum hoc rarissime accidere solet, medium necessarium, observationes inaequalium temporum ad aequalia reducendi. Sequens methodus servit ad hunc finem:—

Sit λ aliqua functio quantitatis m, quae transit in l, l', l'' si m transit in $m+n, m+n', m+n'' \ldots$; ubi v. c. $\lambda, l, l' \ldots$ sint observatae ascensiones rectae vel longitudines —— pro temporibus $m, m+n, m+n' \ldots$

His suppositis est uti scimus

$$l = \lambda + n.\frac{d\lambda}{dm} + \frac{n^2}{1.2}\frac{d^2\lambda}{dm^2} + \ldots$$

Brevitatis causa sit $a = \frac{d\lambda}{dm}$, $b = \frac{d^2\lambda}{1.2.dm^2}$, $c = \frac{d^3\lambda}{1.2.3.dm^3}$ ——

hinc $l = \lambda + an + bn^2 + cn^3 + \ldots\ldots\ldots$ (I)

et eadem ratione

$l' = \lambda + an' + bn'^2 + cn'^3 + \ldots\ldots\ldots$ (I')

$l'' = \lambda + an'' + bn''^2 + cn''^3 + \ldots\ldots\ldots$ (I'') etc

Si bina et bina harum aequationum a se invicem subtrahantur, et ponitur $dl = \frac{l'-l}{n'-n}$, $dl' = \frac{l''-l'}{n''-n'}$, $dl'' = \frac{l'''-l''}{n'''-n''}$, erit

$dl = a + b(n'+n) + c(n'^2+n'n+n^2) + d(n'^3+n'^2n+n'n^2+n^3) + \ldots\ldots$ (II)

$dl' = a + b(n''+n') + c(n''^2+n''n'+n'^2) + \ldots\ldots$

$dl'' = a + b(n'''+n'') + c(n'''^2+n'''n''+n''^2) + \ldots\ldots$

Si hae ultimae aequationes eadem ratione tractantur et ponitur $d^2l = \frac{dl'-dl}{n''-n}$, $d^2l' = \frac{dl''-dl'}{n'''-n'}$, $d^2l'' = \frac{dl'''-dl''}{n''''-n''}$, erit

$d^2l = b + c(n''+n'+n) + d(n''^2+n''n'+n''n+n'^2+n'n+n^2) + \ldots$ (III)

$d^2l' = b + c(n'''+n''+n') + d(n'''^2+n'''n''+n'''n'+n''^2+n''n'+n'^2) + \ldots$

et si iterum est $d^3l = \frac{d^2l'-d^2l}{n'''-n}$ erit

$d^3 l = c + d(n''' + n'' + n' + n) + \ldots\ldots$ — (IV)

Si in (I) pro a substituitur $a = dl - b(n'+n) - \ldots$ ex (II)

et pro b — — — $b = d^2l - c(n''+n'+n) - \ldots$ ex (III)

etc.

obtinetur $\lambda = l - ndl + nn'd^2l - nn'n''d^3l + nn'n''n'''d^4l - \ldots$ (A)

Si eadem ratione substituuntur in (II) pro b et c .. quantitates $b = d^2l - c(n''+n'+n) - \ldots$ ex (III)

$c = d^3l - d(n'''+n''+n'+n) - \ldots$ ex (IV) etc

obtinetur

$a = dl - (n'+n)d^2l + (nn'+nn''+n'n'')d^3l - (nn'n''+nn'n'''+nn''n'''+n'n''n''')d^4l \ldots$ (B)

et eadem ratione

$b = d^2l - (n+n'+n'')d^3l + (nn'+nn''+nn'''+n'n''+n'n'''+n''n''')d^4l$ — — (C)

Lex factorum seriei (A) per se patet. In secunda serie (B) factor pro $d^x l$ est summa omnium per $(x-1)$ tuplices combinationes primarum x quantitatum $n, n', n'' \ldots$ ortorum productorum. In tertia serie (C) factor quantitatis $d^x l$ est summa omnium per $n-2$ tuplices combinationes primarum x quantitatum $n, n', n'' \ldots$ ortorum productorum. etc.

Si substituuntur hi valores pro $\lambda, a, b, c \ldots$ quos invenimus in aequationibus (A) (B), (C) ..., in aequationibus (I), (I'), (I'') ... aequatio (I) debit valorem pro l, (I') pro l', (I'') pro l'' e. s. p. uti debet esse. —

Assumto igitur, λ esse longitudinem, latitudinem etc pro aliqua epocha, et λ' esse longitudinem, latitudinem etc pro tempore quod distat ab hac epocha tempore m, erit

$\lambda' = \lambda + m.\left(\frac{d\lambda}{dm}\right) + \frac{m^2}{1.2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) + \ldots\ldots$ ubi m est negativum si epocha est post tempus m. —

Si in hac serie substituuntur pro λ, $\left(\frac{d\lambda}{dm}\right)$; $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) \ldots$ h. e. pro $\lambda, a, b, c \ldots$ superius inventi valores, obtinemus

$\lambda' = l + (m-n)dl + (m-n)(m-n')d^2l + (m-n)(m-n')(m-n'')d^3l + \ldots\ldots$ (D)

Si igitur sunt $l, l', l'' \ldots$ observati loci planetae pro temporibus $n, n', n'' \ldots$, per hanc aequationem (D) valorem cujuslibet alius observationis λ pro tempore m invenire possumus, et quum m arbitrarie eligi potest, etiam observati loci $\lambda', \lambda'_1, \lambda'_{11}$ pro aequaliter a se invicem distantibus temporibus m, m_1, m_{11} indicari possunt. —

Ut hoc per exemplum declaremus, assumamus sequentes observationes cometae anni 1781:

		med. temp. Vien.	geocentrica longitudo	distantia a polo
1781. Novemb.	14.	8h 29' 44"	305° 14' 45"	34° 42' 51"
	17	8 29 44	306 57 32	45 42 48
	19	8 29 44	306 51 26	50 45 12
	22	8 29 44	306 44 53	56 10 59
	25	8 29 44	306 41 37	60 1 17

Si quaeruntur ex his loci geocentrici cometae pro 14. 16. 18 Nov. 8^h 29' 44" et si exprimuntur omnia λ in secundis, et omnia n in minutis, erit pro distantia polari

$l = 34° 42' 51''$ $l' = 45° 42' 48''$, $l'-l = 39597$, $l''-l' = 18144$

$dl = 9''.1659720$, $dl' = 6.3000000$, $d^2l = -0''.0003980$, $d^2l' = -0.0002466$

$d^3l = 0.0000001315$, $d^4l = -0.000000000000032$

Pro longitudinibus autem est $l = 307° 14' 45''$ $l'-l = -1033''$
$l' = 306\ 57\ 32$ $l''-l' = -366''$

$dl = -0.2391204$, $d^2l = 0.0000156$, $dl' = -0.1270833$, $d^2l' = 0.0000050$

$d^3l = -0.00000000915$ et praeterea $n'-n = 4320'$, $n''-n' = 2880'$

$n'''-n'' = 4320'$, $n''-n = 7200$, $n'''-n' = 7200$, $n'''-n = 11520$

Erit ergo pro distantiis a polo

$$\lambda' = 34° 42' 51'' + 9''.1569720(m-n) - 0.0003980(m-n)(m-n')$$
$$+ 0.0000001315(m-n)(m-n')(m-n'') - 0.000000000000032(m-n)(m-n')(m-n'')(m-n''')$$

et pro longitudinibus

$$\lambda' = 307° 14' 45'' - 0.2391204(m-n) + 0.0000156(m-n)(m-n') - 0.00000000915(m-n)(m-n')(m-n'')$$

Et pro 18 Novemb. est $m-n = 5760'$, $m-n' = 1440'$, $m-n'' = -1440'$, $m-n''' = -5760'$

hinc quaesita distantia a polo $34° 42' 51'' + 52796'' - 3302'' - 157'' - 2'' = 48° 25' 6''$

et quaesita longitudo $307\ 14\ 45 - 1377 + 129 + 11 = 306\ 54\ 8$

et eadem ratione obtinebimus

16. Novemb. longitudo $= 307° 1' 55''$ distantia a polo $= 42° 34' 14$
14. Novemb. ------ $307\ 14\ 45$ ------ $34\ 42\ 51$

uti prius

Praecedentes disquisitiones adhibuit Laplace ad aliam solutionem nostri problematis, quam breviter hic indicare volumus.

Commodius illi videbatur, pro applicatione observationum immediate ad solutionem, prius ex iis resultata deducere, quae fundata sunt in arbitrario numero observationum. Ad hoc resultatum eligit geocentricam longitudinem et latitudinem pro qualibet epocha, et earum prima et secunda differentialia per correspondentem potentiam temporis divisa. Nos vidimus quomodo haec per methodum allatam inveniri possunt. Si nimirum est λ quaesita geocentrica longitudo pro epocha m, et si sunt l, l', l'' observatae longitudines pro temporibus $m+n, m+n', m+n''$ ....., erit, si retinemus priorem significationem quantitatum dl, dl', dl'' .... d^2l, d^3l ....

$$\lambda = l - n\,dl + nn'\,d^2l - nn'n''\,d^3l + \ldots\ldots$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dm}\right) = dl - (n+n')\,d^2l + (nn'+nn''+n'n'')\,d^3l + \ldots\ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) = d^2l - (n+n'+n'')\,d^3l + \ldots$$

et similes expressiones quoque habebimus pro geocentricis latitudinibus,

B

si $\lambda, l, l' \ldots$ in $\beta, b, b' \ldots$ mutantur. Hae expressiones erunt eo accuratiores, quo minora sunt temporum intervalla. Optimum erit, epocham in medio temporum observationum, et ubi fieri potest ex ambobus partibus epochae aequidistantes observationes eligere. Adhuc notari potest, esse, si pro unitate temporum t medius motus terrae circa Solem assumitur, $dt = \frac{360.60^2\, dm}{T}$ ubi T est annus sidereus terrae. Pro $\frac{360.60^2}{T} = 3548''.1866$ scribatur h, hinc erit

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{1}{h}\left(\frac{d\lambda}{dm}\right) \qquad \left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right) = \frac{1}{h^2}\left(\frac{d^2\lambda}{dm^2}\right) \text{ etc.}$$

1.) Si retinemus significationes priores (ab initio motus elliptici), sunt notae aequationes motus cometae aut planetae, si negligitur ejus massa respectu massae Solis, quae ultima aequalis unitati ponitur

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{r^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{------ (I)}$$

et eadem ratione pro terra, si coordinatarum planum xy in ecliptica jacet

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + \frac{X}{R^3} &= 0 \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + \frac{Y}{R^3} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{------ (II)}$$

Si prima aequationum (I) multiplicatur per $\sin\lambda$, secunda per $\cos\lambda$ erit earum differentia

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{d^2x \sin\lambda - d^2y \cos\lambda}{dt^2} + \frac{x \sin\lambda - y\cos\lambda}{r^3} \\ \text{et ita etiam} \quad 0 &= \frac{d^2X \sin\lambda + d^2Y \cos\lambda}{dt^2} + \frac{X\sin\lambda - Y\cos\lambda}{R^3} \end{aligned}\right\} \text{-- (III)}$$

Si δ est ad eclipticam projecta distantia planetae a terra, et L longitudo Solis, $x = X + \delta\cos\lambda$, $y = Y + \delta\sin\lambda$, $z = \delta\,\mathrm{tg}\,\beta$ et $X = R\cos L$, $Y = R\sin L$. Quaesitis valoribus pro d^2x, d^2y et substitutis in prima (III) aequationum, obtinemus

$$0 = \frac{d^2X \sin\lambda - d^2Y\cos\lambda}{dt^2} + \frac{X\sin\lambda - Y\cos\lambda}{r^3} - 2\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right) - \delta\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)$$

vel, quum $Y\cos\lambda - X\sin\lambda = R\sin(L-\lambda)$ est,

$$\left(\frac{d\delta}{dt}\right) = \frac{R\sin(L-\lambda)}{2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{1}{2}\delta.\ \frac{\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)} \text{ ----- (IV)}$$

Multiplicata prima aequationum (I) per $\mathrm{tg}\,\beta\cos\lambda$, secunda per $\mathrm{tg}\,\beta\sin\lambda$ et subtracta a summa horum productorum tertia aequatione, erit

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\lambda + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\lambda + \frac{x\cos\lambda + y\sin\lambda}{r^3} = \left(\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{z}{r^3}\right)\mathrm{ctg}\,\beta$$

vel, substitutis pro x, y, z, d^2x, d^2y, d^2z suis valoribus

$$\left(\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{X}{r^3}\right)\cos\lambda\, tg\beta+\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{Y}{r^3}\right)\sin\lambda\, tg\beta =$$
$$=\frac{2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\left(\frac{d\delta}{dt}\right)+\delta\left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)+2\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 tg\beta}{\cos^2\beta}+\delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 tg\beta$$

Multiplicata autem prima aequationum (III) per $\cos\lambda$, et secunda per $\sin\lambda$ earum summa dat $\frac{d^2X\cos\lambda+d^2Y\sin\lambda}{dt^2}=-\left(\frac{X\cos\lambda+Y\sin\lambda}{R^3}\right)$ vel

$$\left(\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{X}{r^3}\right)\cos\lambda+\left(\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{Y}{r^3}\right)\sin\lambda=(X\cos\lambda+Y\sin\lambda)\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)$$
$$=R\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\cos(L-\lambda)$$

Hinc est praecedens aequatio

$$R\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{R^3}\right)\cos(L-\lambda)\, tg\beta=\frac{2\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)+\delta\left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)+2\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 tg\beta}{\cos^2\beta}+\delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 tg\beta,$$ vel

si pro $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ valor ex (IV) substituitur, et brevitatis causa ponitur

$$A=\frac{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\left(\frac{d^2\beta}{dt^2}\right)+2\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 tg\beta+\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^3\sin\beta\cos\beta-\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)}{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\beta\cos\beta\cos(L-\lambda)+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\sin(L-\lambda)}$$

$$R^3=r^3(1+AR^2\delta)\quad\ldots\ldots\ (V)$$

Quum autem habeamus $r^2=\delta^2\sec^2\beta+2R\delta\cos(L-\lambda)+R^2$ obtinemus, si aequationem (V) elevamus ad quadratum et pro r^6 suum valorem ex ultima aequatione ponimus,

$$(1+AR^2\delta)^2\cdot(\delta^2\sec^2\beta+2R\delta\cos(L-\lambda)+R^2)=R^6\quad\ldots\ldots\ (VI)$$

quae aequatio est septimi gradus respectu incognitae quantitatis δ. Invento ita ex aequatione (VI) valore pro δ, obtinemus valores pro x, y, z ex praecedentibus expressionibus, et valorem pro $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)$ ex $\left(\frac{d\delta}{dt}\right)=-\frac{\frac{1}{2}\delta}{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}\cdot\left\{\left(\frac{d^2\lambda}{dt^2}\right)+A\sin(L-\lambda)\right\}$

ubi tandem differentialia quantitatum x, y, z respective per expressiones

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)=\left(\frac{dR}{dt}\right)\cos L-R\left(\frac{dL}{dt}\right)\sin L+\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\cos\lambda-\delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\sin\lambda$$
$$\left(\frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{dR}{dt}\right)\sin L+R\left(\frac{dL}{dt}\right)\cos L+\left(\frac{d\delta}{dt}\right)\sin\lambda+\delta\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)\cos\lambda$$
$$\left(\frac{dz}{dt}\right)=\left(\frac{d\delta}{dt}\right)tg\beta+\delta\left(\frac{d\beta}{dt}\right)\sec^2\beta$$

ubi facile valores pro $\left(\frac{dL}{dt}\right)$, $\left(\frac{dR}{dt}\right)$ ex prioribus (mot. ellipt.) determinari possunt. Si nimirum $\mathcal{E}$ est excentricitas orbitae terrae et V vera anomalia terrae a perihelio computata erit

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)=\frac{\sqrt{1-\mathcal{E}^2}}{R^2}\quad\text{et}\quad\left(\frac{dR}{dt}\right)=\frac{\mathcal{E}\sin V}{\sqrt{1-\mathcal{E}^2}}$$

Restat adhuc derivatio elementorum orbitae ex his quantitatibus.

Sector ellipticus, quem ad eclipticam projectus radius vector tempore dt describit, est uti scimus, $\frac{xdy-ydx}{2}$ et haec expressio ubi et sequens $x\left(\frac{dy}{dt}\right)-y\left(\frac{dx}{dt}\right)$ est vel positiva vel negativa, quando motus cometae est

vel directus vel retrogradus.
Si praeterea n est inclinatio orbitae, et k longitudo nodi, et $0=z-py-qx$ aequatio plani orbitae, erit $p=\tan n\cos k$ $\quad q=\tan n\sin k$
Ex hoc sequitur $\left(\frac{dz}{dt}\right)=p\left(\frac{dy}{dt}\right)-q\left(\frac{dx}{dt}\right)$ et hinc quoque

$$y\left(\frac{dz}{dt}\right)-z\left(\frac{dy}{dt}\right)=q.\left\{x\left(\frac{dy}{dt}\right)-y\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}$$
$$x\left(\frac{dz}{dt}\right)-z\left(\frac{dx}{dt}\right)=p.\left\{x\left(\frac{dy}{dt}\right)-y\left(\frac{dx}{dt}\right)\right\}$$

Si primam harum aequationum dividatur per secundam, obtinemus $\frac{p}{q}$ seu $\tan k$, et si hac ratione k innotuerit, qualibet harum aequationum dabit etiam $\tan n$. Angulus k autem e sua tangente ita determinabitur, ut $n<90°$ sit.
Ex praecedentibus (mot. ellipt.) videmus, celeritatem cometae pro distantia a Sole r esse aequalem $\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}$, ubi a designat semiaxin majorem et esse generalem expressionem hujus celeritatis $\frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt}$.
Obtinemus itaque axin majorem per aequationem $\frac{1}{a}=\frac{2}{r}-\frac{1}{dt^2}(dx^2+dy^2+dz^2)$
Si praeterea $a\varepsilon$ est excentricitas, et φ angulus quem format tangens orbitae cum radio vectore, erit

$$a(1-\varepsilon^2)=\left(2r-\frac{r^2}{a}\right)\sin^2\varphi$$
et
$$\cos\varphi=\frac{dr}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}$$

Posito in hac ultima aequatione pro $\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$ praecedenti valore $dt.\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}}$, obtinemus $\quad a(1-\varepsilon^2)=2r-\frac{r^2}{a}-\frac{dr^2}{dt^2}$ vel quum $r^2=x^2+y^2+z^2$ sit, $\quad a(1-\varepsilon^2)=2r-\frac{r^2}{a}-\frac{1}{dt^2}(xdx+ydy+zdz)^2$
et ex hac aequatione valor pro ε determinari poterit.
Signum expressionis $\frac{xdx+ydy+zdz}{dt}$ erit negativum, si cometa appropinquatur Soli, et vice versa. —
Si tandem est u, v excentrica et vera anomalia, et t tempus inter epocham et transitum planetae per suum perihelium erit

$$\cos u=\frac{a-r}{a\varepsilon},\quad \tan\frac{v}{2}=\tan\frac{u}{2}.\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\qquad t=a^{\frac{3}{2}}(u-\varepsilon\sin u)$$

ex quibus expressionibus quantitates u, v et t inveniuntur. Si addatur vel subtrahatur hoc tempus ab epocha, obtinemus tempus transitus cometae per suum Perihelium.
Si praeterea ψ ex angulus axis x cum in eclipticam projecto radio vectore, erit $\tan\psi=\frac{y}{x}$ et quum noscamus angulum k, quem axis x cum linea nodorum facit, erit $\psi-k$ angulus lineae nodi

nodorum cum projectione radii r. Si dein ψ' est angulus lineæ nodorum cum radio vectore ipso, est $tg\,\psi' = \frac{tg(\psi-\kappa)}{\cos n}$ et quum vera anomalia v, seu angulus quem radius vector cum axi majori facit, ex prioribus etiam data est, $\psi'-v$ erit angulus inter lineam nodorum et lineam apsidum, seu elongatio perihelii a nodo, ex qua longitudo perihelii $\psi'-v+\kappa$ et tunc quoque omnia elementa determinata erunt. —

Multo simpliciores evadunt præcedentes solutiones, si orbita planetæ vel circularis vel rectilinea assumitur, suppositiones quarum prima apud non admodum excentricas orbitas, et ultima generatim pro prima rudi approximatione e observationibus primis post apparitionem sæpius suam utilitatem habere ~~[illegible]~~ [1)] possunt, itaque eas simpliciter adducere voluimus.

Si supponimus orbitam planetæ circularem, primo problema inveniendi elementa hujus orbitæ, qua problema pure geometricum considerari potest. — Si nimirum situs planetæ versus Solem per tres rectangulares coordinatas x, y, z determinatur, conditio, orbitam esse in plano, quod per centrum Solis transit dabit aequationem $z + py + qx = c$ et conditio orbitam esse circularem cujus radius a $z^2 + y^2 + x^2 = a^2$ conjunctio ambarum aequationum dat orbitam planetæ quoad suam magnitudinem et situm. Si nimirum retinemus præcedentem significationem quantitatum $\varrho, \beta, \lambda, R, L$, erit

$x = \varrho \cos\beta \cos\lambda + R\cos L, \quad y = \varrho\cos\beta\sin\lambda + R\sin L, \quad z = \varrho\sin\beta$

Si hi valores substituuntur in ambabus præcedentibus aequationibus, et brevitatis causa ponitur

$A = \cot\beta\sin\lambda,\ B = \cot\beta\cos\lambda,\ C = \frac{R\sin L}{\sin\beta},\ D = \frac{R\cos L}{\sin\beta}$ et $E = R\cos\beta\cos(L-\lambda)$,

erit $\varrho^2 + 2E\varrho + R^2 = a^2$

$$\varrho + \frac{pC + qD}{1 + pA + qB} = c$$

Secunda observatio dabit duas similes aequationes inter ϱ', p, q, a

et tertia ϱ'', p, q, a

ita, ut ex his sex aequationibus, h. e. igitur ex tribus geocentricis observationibus, sex incognitæ quantitates a, p, q et $\varrho, \varrho', \varrho''$ more solito determinari possunt.

1.) Si autem in resolutione hujus problematis etiam respicimus notas leges motus, duæ aequationes ad determinationem elementorum sufficiunt. —

Si nimirum prius inventi valores pro x, y, z substituuntur in aequatio, ne $x^2+y^2+z^2=a^2$ et brevitatis causa ponitur $A=R\cos\beta\cos(L-\lambda)$ erit

$$\rho=\sqrt{a^2-(R^2-A^2)}-A \text{ ...... (I)}$$

pro secunda observatione est eadem ratione $A'=R'\cos\beta'\cos(L'-\lambda')$

$$\rho'=\sqrt{a^2-(R'^2-A'^2)}-A' \text{ ...... (II)}$$

Si autem k est chorda, quae extremitates radiorum r in ambabus obser, vationibus conjungit, erit $k^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$, vel

$$k^2=2a^2-2\rho\rho'(\cos\beta\cos\beta'\cos(\lambda-\lambda')+\sin\beta\sin\beta')-2\rho R\cos\beta\cos(L'-\lambda)-2\rho' R\cos\beta'\cos(L-\lambda')-2RR'\cos(L-L') \text{ .. (III)}$$

Praeterea est area sectoris circularis inter ambas observationes $s=a^2 \operatorname{Arc\,sin}\frac{k}{2a}$ et si $\mu=3548.''1866$ et t intervallum temporis est, habemus $s=\frac{\mu t\sqrt{a}}{2}$ ergo est, si ambae expressiones pro s sibi aequales ponuntur

$$\frac{\mu t}{2a^{3/2}}=\operatorname{Arc\,sin}\frac{k}{2a} \text{ .... (IV)}$$

et aequationes (I), (II), (III), (IV) tantummodo continent incognitas quantitates a, ρ, ρ' ergo sunt plus quam sufficientes ad determina, tionem harum quantitatum.

Si omnia praecedentia conjungimus, est

$$A=R\cos\beta\cos(L-\lambda), \quad B=2R'\cos\beta\cos(L-\lambda)$$
$$A'=R'\cos\beta'\cos(L'-\lambda'), \quad B'=2R'\cos\beta'\cos(L-\lambda')$$
$$\operatorname{tg} C=\frac{\cos(\lambda-\lambda')}{\operatorname{tg}\beta}$$

Si his quantitates auxiliares sunt computatae, erit

$$\sin m=\frac{\sqrt{R^2-A^2}}{a}, \quad \rho=a\cos m-A$$
$$\sin m'=\frac{\sqrt{R'^2-A'^2}}{a}, \quad \rho'=a\cos m'-A'$$
$$k^2=2a^2-2\rho\rho'\sin\beta\frac{\sin(C+\beta')}{\cos C}-B\rho-B'\rho'-2RR'\cos(L-L')$$
$$\frac{k}{2a}-\sin\frac{\mu t}{2a^{3/2}}=0$$

Assumitur igitur arbitrarius valor pro a et quaeritur cum hoc m, m' ρ, ρ', k^2. Si pro invento valore quantitatis k ultima expressio eva, dit zerus, a bene assumtum, In contrario casu hic calculus cum alio valore pro a repeti debet, et ita invenitur verus valor pro a. Inventis hac ratione a, ρ, ρ' ex his facile secundum praecedentia inclina, tionem orbitae et lineam nodorum determinare possumus, differen, tia argumentorum latitudinis erit $2h=\frac{\mu t}{a^{3/2}}$ et motus diurnus in minutis secundis $\frac{\mu}{a^{3/2}}$.

Si applicamus praecedentia ad duas observationes Vestae 24. et 29 Aprilis 1807 quas prius dedimus, habebimus:

$t = 4.9850197$, $\log A = 9.8807012$, $\log B = 0.1492157$
$\log A' = 9.8457471$, $\log B' = 0.1797447$

$C = 78^\circ\ 22'\ 34''.97$, $\log \sqrt{R^2 - A^2} = 9.8197078$, $\log \sqrt{R'^2 - A'^2} = 9.8598422$

$\log. 2\ \frac{\sin\beta \sin(C+\beta')}{\cos C} = 0.3010147$, $2RR'\cos(L-L') = 2.0218832$

1 Hypothesis .... $a = 2$ dat $m = 19^\circ\ 16'\ 34''.8$, $m' = 21^\circ\ 13'\ 42''.2$

$\log \varrho = 0.0523367$, $\log \varrho' = 0.0656700$, $K^2 = 0.0035973$

$\log \frac{K}{2a} = 8.1759283$
$\log \sin \frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 8.1806569$
error $= 0.0047286$

2 Hypothesis .... $a = 2.2$ dat $m = 17^\circ\ 27'\ 51''.85$, $m' = 19^\circ\ 13'\ 6''.14$

$\log \varrho = 0.1267106$, $\log \varrho' = 0.1387286$, $K^2 = 0.0033423$

$\log \frac{K}{2a} = 8.1185700$
$\log \sin \frac{\mu t}{a^{\frac{3}{2}}} = 8.1185717$
error $= 0.0000017$

hinc correctum $a = 2.200055$ vel $\log . a = 0.3424376$
et correctum $\log . \varrho = 0.1267373$, $\log \varrho' = 0.1387549$
Ex his sequuntur heliocentricae longitudines et latitudines

$\sin b = \frac{\varrho}{a} \sin \beta$, $\sin(L-l) = \frac{\varrho \cos\beta}{a \cos b} \sin(L-\lambda)$

$l = 191^\circ\ 12'\ 39''.1$, $l' = 192^\circ\ 43'\ 28''.9$
$b = 7\ \ 2\ \ 33.9$ $b' = 7\ \ 3\ \ 33.1$ ex his inclinatio orbitae $= 7^\circ\ 4'\ 45''$ et longitudo nodi ascendentis $= 107^\circ\ 3'\ 17''.8$. —

Adhuc simplicior evadit tota solutio, si orbita planetae assumitur rectilinea. —

Sit $x = B'y - p$ ...... (I) aequatio projectionis hujus lineae in plano ecliptico, ubi initium coordinatarum est terra in prima observatione et ubi axis x jacet in linea quae terram et ad eclipticam projectum planetam in prima observatione conjungit. Linea quae terram et ad eclipticam projectum planetam, in secunda, tertia et quarta observatione conjungit, intersecet axin x, seu lineam quae terram et planetam in prima observatione conjungit, in punctis, quorum distantia a puncto initiali axis x respective aequalis est a, b, c; hinc habebimus pro valoribus harum distantiarum

$$a = \frac{R\sin(\lambda'-L) - R'\sin(\lambda'-L')}{\sin(\lambda'-\lambda)}$$

$$b = \frac{R\sin(\lambda''-L) - R''\sin(\lambda''-L'')}{\sin(\lambda''-\lambda)}$$

$$c = \frac{R\sin(\lambda'''-L) - R'''\sin(\lambda'''-L''')}{\sin(\lambda'''-\lambda)}$$

si praeterea brevitatis causa ponitur

$A = ctg(\lambda' - \lambda)$, $B = ctg(\lambda'' - \lambda)$, $C = ctg(\lambda''' - \lambda)$

erit aequatio lineae, quae terram cum ad eclipticam projecto planetae conjungit, h. e. erit aequatio quantitatum $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$

in prima observatione $y = 0$, in secunda $x = Ay - a$

in tertia - - - $x = By - b$, in quarta $x = Cy - c$

ergo quoque sunt coordinatae puncti in quo linea c. projectam orbitam secat: in prima observatione $\xi = -p$ et $v = 0$

secunda $\xi' = \frac{aP - Ap}{A - P}$ $v' = \frac{a - p}{A - P}$

tertia $\xi'' = \frac{bP - Bp}{B - P}$ $v'' = \frac{b - p}{B - P}$

quarta $\xi''' = \frac{cP - Cp}{C - P}$ $v''' = \frac{c - p}{C - P}$

Si deinde nominamus (1.2) tempus inter primam et secundam observationem, et eadem ratione cum ceteris intervallis temporum, erit

$\frac{v' - v}{v'' - v} = \frac{(1.2)}{(1.3)}$ et $\frac{v' - v}{v''' - v} = \frac{(1.2)}{(1.4)}$

Substitutis igitur in his ambabus observationibus praecedentibus valores pro v, v', v'', v''' ex iis quantitates P et p determinare possumus, inveniuntur hac ratione sequentes expressiones

$$P = \frac{(1.2)(c-b)A - (1.3)(c-a)B + (1.4)(b-a)C}{(1.2)(c-b) - (1.3)(c-a) + (1.4)(b-a)}$$

et $$p = \frac{(1.3)(1.4)(C-B)a - (1.2)(1.4)(C-A)b + (1.2)(1.3)(B-A)c}{(1.3)(1.4)(C-B) - (1.2)(1.4)(C-A) + (1.2)(1.3)(B-A)}$$

Inventis autem P et p, aequatio (I) projectae orbitae est data et ulterior determinatio elementorum nullam habet difficultatem. Si adhuc ~~x~~ M nominamus angulum quem orbita projecta cum axi x format, facile invenitur

$$\sin M = \frac{(1.2)(b-c) - (1.3)(a-c) + (1.4)(a-b)}{(1.3)(1.4)(C-B) - (1.2)(1.4)(C-A) + (1.2)(1.3)(B-A)}$$

Quum autem suppositio lineae rectae etiam apud admodum propinquas observationes tantummodo approximativa est vera, licebit etiam in calculis adhibere abbreviationes, quae non notabilem influxum in resultatum finale habent. Igitur pro prima approximata determinatione orbitae cometae, quae tantum calculatur e primis observationibus institutis, ut cometa post aliquot dies, si coelum v. c. fuerit obscurum, iterum inveniri possit, sequens methodus

non sine utilitate adhiberi potest. —
Si nimirum orbita planetæ qua linea recta assumitur, quantitates h, h', h'' (: theor. Gauss) sunt areæ triangulorum rectilineorum, quæ sunt contenta inter orbitam et radios trium observationum, et quum hæc triangula habeant communem altitudinem, quia eorum communis vertex in centro solis est, areæ horum triangulorum se habent uti eorum bases. Quum autem motus in linea recta intra tale parvum intervallum temporis, quo uniformis præsupponi potest, hæ bases se habent, ergo etiam illæ areæ, uti intervalla temporum observationum. Si igitur retinemus priores significationes, erit

$$\delta = \frac{\vartheta'}{\vartheta}\cdot\frac{A'D'}{\alpha} - \frac{\vartheta''}{\vartheta}\cdot\frac{A''D''}{\alpha} - \frac{AD}{\alpha} \quad \text{et} \quad \delta'' = \delta\cdot\frac{\vartheta}{\vartheta''}\cdot\frac{C'}{A'}$$

Si hanc methodum applicamus ad observationes Vestæ, ubi jam dati sunt valores quantitatum constantium

$$A,\ A',\ A'',\ C'' \text{ et } \vartheta,\ \vartheta',\ \vartheta''$$

invenitur $\log\delta = 0.1690281$ $\quad\log\delta'' = 0.1910246$

Est autem $x = \delta\cos\lambda + D\cos L$, $\quad y = \delta\sin\lambda + D\sin L$, $\quad z = \delta\,\mathrm{tg}\,\beta$

hinc pro prima observatione

$$x = -2.3053417,\quad y = -0.4076899,\quad \log z = 9.4822528$$

et eadem ratione pro ultima observatione

$$x'' = -2.2760672,\quad y'' = -0.5190821,\quad \log z'' = 9.4801173$$

Ergo habemus

$$zy'' - yz'' = -0.0344219$$
$$xz'' - x''z = -0.0054542$$
$$xy'' - x''y = +0.2687321$$

atque inclinatio orbitæ $n = 7°\ 23'\ 21''.6$

longitudo nodi ascendentis $\Omega = 99°\ 0'\ 13''.5$

(: Vide quoque Berliner Jahrbuch 1785 et 1786)

Correctio fere jam notorum elementorum

Si observationes et quantitates, quibus praecedentes disquisitiones superstructae sunt, penitus perfectae et inerroneae essent, etiam tribus observationibus derivata elementa essent plane accurata, exceptis parvis deviationibus, quae fluunt ex imperfectitudine nostrorum tantum approximatorum logarithmorum, et in praecedentibus neglectis massis et perturbationibus caeterorum corporum coelestium. Quum autem omnes nostrae observationes, uti nostri calculi, tantummodo sint approximationes ad veritatem, nostrum erit nos veritati, quantum fieri potest, appropinquandi. —

E natura materiae, quam hic tractamus, jam sequitur, inevitabiles errores observationum in derivata resultata eo majorem et notabiliorem influxum habere, quo minora sunt intervalla temporum harum observationum, vel potius, quo minores sunt heliocentrici motus planetae in his intervallis. Quum autem omnes praecedentes methodi hanc suppositionem continent, et continere debent, debemus nunc investigare, quomodo ex hac ratione jam inventis approximatis elementis, illa elementa inveniri possint, quae etiam tribus valde a se invicem distantibus observationibus, vel etiam pluribus observationibus satisfaciant.

Ante omnia hae novae observationes cum aliqua disquisitione eligi debent, nimirum e numero omnium datarum observationum tantummodo illae ad calculum revocari debent, quarum bonitati fidem tribuere possumus. Ad hunc finem e pluribus singulis observationibus, quae sibimet invicem sunt admodum propinquae, una solum derivari debet, quae quasi est medium omnium praecedentium, et igitur magis idonea erit ad nostros calculos, quam singulae praecedentes observationes. ——

Si nimirum cum jam fere notis elementis loci geocentrici singularum observationum calculantur, differentiae horum computatorum et verorum, observatorum locorum in decursu plurium dierum erunt constantes, vel saltem temporibus proportionales. Sint v.c. $\alpha, \alpha', \alpha''$ observatae ascensiones rectae vel declinationes pro temporibus t, t', t'' et $\alpha+\delta, \alpha'+\delta', \alpha''+\delta''$ eaedem ex elementis computatae quantitates, $\delta, \delta', \delta''$ designabunt, si observationes quae nullis erroribus subjectae praesupponuntur, errores elementorum et erit tum, si quantitates $\delta, \delta', \delta''$ quae constantes assumi possunt, maxime probabilis error cujuslibet ex his elementis calculati loci aequalis $\Delta = \frac{\delta+\delta'+\delta''+\ldots}{n}$ ubi n est numerus observationum. Si autem observationes ipsae inter se non sunt ejusdem ponderis, et si v.c. a, a', a'' designant gradum bonitatis primae, secundae et tertiae observationis, medius maxime probabilis valor elementorum non amplius erit ut prius, medium arithmeticum ex omnibus singulis erroribus sed erit $\Delta = \frac{a^2\delta+a'^2\delta'+a''^2\delta''+\ldots}{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}$ et si ita nossimus quantitatem Δ, assumemus pro veris ascensionibus rectis, vel declinationibus, vel in prima observatione $\alpha+\delta-\Delta$ in secunda $\alpha'+\delta'-\Delta$ in tertia $\alpha''+\delta''-\Delta$ et dein semper idem erit, quam harum observationum pro sequentibus disquisitionibus assumimus. —

Supponere igitur volumus, nos habere tres tales correctas, a se invicem valde distantes observationes, et videbimus, quomodo ope harum jam nota approximata elementa corrigere possimus. — Ad solutionem hujus problematis dantur plures viae, quarum tantummodo praecipuas indicare volumus. —

Pro duabus extremis observationibus quaerantur ex elementis logarithmi curtatarum distantiarum planetae a terra $x = \log. \delta$, $x'' = \log. \delta''$ et ex his loci heliocentrici et radii vectores planetae, et ex his situs orbitae et heliocentrica lon-

longitudo in orbita, et ex his omnia cetera elementa, quae elementa igitur accurate repraesentabunt illas extremas observationes. Hisce cum novis elementis, calculetur nunc locus geocentricus pro tertia observatione, et hac ratione obtinetur differentia X observatae et computatae longitudinis, et differentia Y ambarum latitudinum, et si X et Y non forsitan sunt aequales zero, cum duabus aliis suppositionibus pro x, x'' adhuc duo alii errores X' Y' et X'' Y'' obtinentur, et quibus denuo valores pro x, x'' (regul. fals.) inveniuntur, et ex his denuo, omnibus tribus observationibus satisfacientia elementa determinabuntur. Clarum est, pro duabus extremis observationibus non tales eligi deberi, quae in heliocentrica longitudine duobus, quatuor, sex angulis rectis et vel fere iisdem quantitatibus a se invicem distant, quia ex talibus observationibus situs orbitae non determinari potest.

1.) Alia adhuc commodior methodus est sequens:
Ex jam fere notis elementis quaerantur pro duabus extremis observationibus certae distantiae planetae a terra, et ex his longitudines in orbita et radii vectores r, r''. — Ope situs orbitae, qui simul per hunc calculum invenitur, quaeratur pro media observatione longitudo in orbita et radius vector r'. Hac ratione obtinentur pro omnibus tribus observationibus quantitates r, r', r'' et $2f, 2f', 2f''$ etc., ut habeamus $f' = f + f''$ et $n = r'r'' \sin 2f$, $n' = rr'' \sin 2f'$, $n'' = rr' \sin 2f''$
Dein incipiatur duplex calculus elementorum ex r, r', f'', ϑ'' et r', r'', f, ϑ, hic calculus autem tantummodo continuatur usque ad aequationem $f = \frac{(y-1)y^2}{\frac{1}{9}+y}$ quae dabit y, quod y in primo computu fit η'' in secundo η.
Nunc habebimus tres expressiones pro p, nimirum
$\sqrt{p} = \frac{\eta'' h''}{\mu \vartheta''}$, $\sqrt{p} = \frac{\eta h}{\mu \vartheta}$ et $p = \frac{4rr'r'' \sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''}$
et hi tres valores debent esse identici, si prima approximata elementa sunt accurata, h. e. deberemus habere in hoc casu

$$X = \eta h \partial'' - \eta'' h'' \partial = 0$$

et

$$Y = h - h' + h'' - \frac{4 r r' r'' \mu^2 \partial \partial'' \sin f \sin f' \sin f''}{\eta \eta'' h h''} = 0$$

Si nunc X et Y non sunt aequalis zero, repetatur tota computatio adhuc duabus vicibus, cum duabus aliis curtatis distantiis pro duabus extremis observationibus, per quod dein verae curtatae distantiae et ex his vera elementa orbitae habentur, quae satisfacient his tribus observationibus. —

2.) Ad abbreviationem horum calculorum in secunda et tertia hypothesi, tantummodo unam ambarum prius assumtarum curtatarum distantiarum mutare et ita procedere possumus: Ex jam notis approximatis elementis, calculentur pro ambabus extremis observationibus curtatae distantiae δ et δ'' et ex his elementa et geocentricus locus M (nimirum ejus longitudo et latitudo seu ejus ascensio recta et declinatio) in tertia observatione. — In secunda hypothesi, pro qua assumitur $\delta + m$ et δ'' quaerantur eadem ratione elementa ex quibus dein pro tertia observatione locus geocentricus $M+\alpha$. Tandem in tertia hypothesi pro qua assumitur δ et $\delta'' + m''$ quaerantur iterum elementa, et ex iis pro tertia observatione locus geocentricus $M+\beta$. —

Quum nunc quantitates m, m'', α, β sunt parvae, assumere possumus in quarta hypothesi, pro qua assumere volumus $\delta + xm$, et $\delta'' + ym''$, geocentricum calculatum locum tertiis observationis evadere $M + \alpha x + \beta y$ et quum et longitudo geocentrica, et geocentrica latitudo talem aequationem dent, ex his duabus aequationibus, valores pro x et y, h. e. verae curtatae distantiae ambarum extremarum observationum inveniuntur, ex quibus dein vera elementa calculari possunt, quae his tribus observationibus penitus satisfaciunt. — Haec methodus etiam ad plures quam tres observationes extendere possumus. Si nimirum in prima hypothesi per ex δ, δ'' derivata elementa quaerantur geocentrici loci tertiae, quartae et quintae observationis, qui sint M, M', M'', et si eadem ratione sint calculati geocentrici loci in secunda hypothesi $M+\alpha$, $M'+\alpha'$, $M''+\alpha''$ et in tertia $M+\beta$, $M'+\beta'$, $M''+\beta''$, habebimus, si N, N', N''

sint observati loci, sequentes, propriè duplices aequationes:
$M+\alpha x+\beta y=N$, $M'+\alpha' x+\beta' y=N'$, $M''+\alpha'' x+\beta'' y=N''$ etc
e quibus dein facile maxime probabiles valores quantitatum x, y secundum in praecedentibus allatam methodum inveniri, et ex his illa elementa derivari possunt, quae omnibus fundamentalibus observationibus satisfaciant. — Gauss p. 222 et 223.

3.) Haec ultima methodus, uti videmus, etiam facile immediate ad parabolica elementa applicari potest, sed tamen erit commodius, pro his, sequenti modo procedere: —
Ex approximatis elementis, quaerantur pro duabus extremis observationibus curtati radii vectores r, r'' in secunda hypothesi, sint hi radii $r+m, r''$ in tertia hypothesi sint hi radii $r, r''+m''$. — Ex his assumtis distantiis a Sole et observata geocentrica longitudine et latitudine, calculentur pro qualibet harum hypothesium elementa parabolica, dein inveniuntur in qualibet harum trium hypothesium tempora $T, T+t, T+t''$, quae diffluere deberent inter ambas extremas observationes, et haec tempora cum revera observato intervallo temporis $\mathfrak{T}$ comparata, dant aequationem primam sequentis formae pro determinandis x et y. $\frac{tx}{m}+\frac{t''y}{m''}=\mathfrak{T}-T$ ------

Vid. Olbers Abhandlung die Bahn eines Cometen etc p. 96 et 101.

Schubert Vol. 2. p. 542.

Ad inveniendam secundam aequationem calculetur pro tertia seu media observatione in qualibet harum trium hypothesium, geocentrica longitudo, vel si latitudo sese magis mutabat, geocentrica latitudo, quae respective sit in his tribus hypothesibus $M, M+\alpha, M+\beta$. — Si dein N est observata longitudo aut latitudo secunda aequatio erit $\frac{\alpha x}{m}+\frac{\beta y}{m''}=N-M$. —
Inventis ita x et y, verae curtatae distantiae a Sole in ambabus primis observationibus sunt $r+x, r''+y$, e quibus dein vera elementa inveniri possunt; quae has tres observationes accurate repraesentabunt. Haec methodus etiam continuari potest pro pluribus observationibus, uti et ap-
plica-

Schubert ita: Sint inventa tempora t et t' quae correspondent elementis N et $\mathfrak{J}$. Formando aliam hypothesin, $N, \mathfrak{J}+i$, invenietur $t+k$ et $t'+\varkappa$ loco t et t'. Tertia hypothesis $N+n$ et $\mathfrak{J}$ dabit $t+l$ et $t'+\lambda$ loco t et t'. Sint tempora observata $t+\varepsilon=\mathfrak{T}$, $t'+\varepsilon=\mathfrak{T}'$ et veri valores nodi et inclinationis $N+x$, $\mathfrak{J}+y$, supponere possumus variationes temporum elapsorum esse proportionales variationibus elementorum. Quum nunc i producat variationem temporis $t=k$ et temporis $t'=\varkappa$, y mutabit tempus t quantitate $\frac{ky}{i}$ et t' quant. $\frac{\varkappa y}{i}$. Eadem ratione inveniuntur variationes temporum t, t' per x, $\frac{lx}{n}$, $\frac{\lambda x}{n}$. — Vera elementa hinc $N+x$ et $\mathfrak{J}+y$ dabunt $\mathfrak{T}=t+\frac{ky}{i}+\frac{lx}{n}$, $\mathfrak{T}'=t'+\frac{\varkappa y}{i}+\frac{\lambda x}{n}$ substituendo $\mathfrak{T}=t+e$, $\mathfrak{T}'=t'+\varepsilon$ erit

$e = \frac{lx}{n} + \frac{ky}{i}$, $\varepsilon = \frac{\lambda x}{n} + \frac{\varkappa y}{i}$ e quibus
$x = \frac{n(\varepsilon K - e\varkappa)}{kl - \varkappa l}$, $y = \frac{i(el - \varepsilon l)}{k\lambda - \varkappa\lambda}$. —

$\operatorname{tg} u = \frac{\sin A \operatorname{tg}(L-K)}{\sin(A+n)}$

$\varrho = \frac{R \sin B \sin(L-K) \sin n}{\sin\beta \sin(B-n)}$

$r = \frac{R \sin B \sin(L-K)}{\sin(B-n) \sin n}$

et $r \sin n \sin u = \varrho \sin\beta$

ubi erat

$\operatorname{tg} A = \frac{\cos(L-K) \operatorname{tg}\beta}{\sin(L-\lambda)}$

$\operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda-K)}$

applicari potest in computu orbitae ellipticae, sed hic accedere debet quarta hypothesis et nimirum elliptica. (Vid. Berl. Jahrb. 1820 p. 226)

Huc pertinent quoque disquisitiones, quem influxum parvi errores loci geocentrici planetae in ejus situm heliocentricum et vice versa exserunt. —

Ad hunc finem resumere volumus quatuor aequationes ex theoria heliocentrici et geocentrici loci quae dant

$\operatorname{tg} u$, ϱ, r. et $\sin u$

Prima harum aequationum dat

$$du = \frac{\varrho \sin u}{r \sin\beta \sin(L-K)} \left\{ d\lambda \sin\beta \cos\beta \cos(L-\lambda) + d\beta \sin(L-\lambda) \right\}$$

et si eadem ratione ex secunda aequatione quaeritur $d\varrho$, et hi valores du et $d\varrho$ in differentiali quartae aequationis

$$dr \sin n \sin u + r\,du \sin n \cos u = d\varrho \sin\beta + \varrho\, d\beta \cos\beta$$

substituuntur, obtinemus

$$\frac{dr}{\varrho^2} = \frac{d\lambda \sin\beta \cos\beta}{\sin n \sin u \sin(L-K)} \left\{ \frac{\cos(\lambda-K)}{R} - \frac{\cos u \cos(L-\lambda)}{r} \right\}$$
$$- \frac{d\beta}{\sin n \sin u \sin(L-K)} \left\{ \frac{\sin(\lambda-K)}{R} + \frac{\cos u \sin(L-\lambda)}{r} \right\}$$

1.) Sed non tantum immediate errores $d\lambda$, $d\beta$, observationis sed etiam erroneae suppositiones in situ nodi et inclinationis orbitae in locum heliocentricum ex observationibus derivatum, secundum diversas circumstantias majorem vel minorem influxum habere possunt. —

Ut hoc accuratius inquiramus, commode erunt aequationes ex eadem theoria $\operatorname{tg}\frac{v+u}{2} = \frac{\sin\frac{g+n}{2}}{\sin\frac{g-n}{2}} \operatorname{tg}\frac{L-K}{2}$ etc per quas invenitur

$$du = \frac{dn \sin^2 u (\sin n \cos(L-K) + \cos n \operatorname{ctg} g) - dK \sin u \cos v}{\sin(L-K)}$$

$$dr = \frac{r \operatorname{ctg}(h-v)}{\sin(L-K)} \left\{ dn \frac{\sin^2 u}{\sin g} - dK \cos u \sin v \right\}$$

ubi v, g et h indicatas significationes habent.

2.) Tandem quoque erronea suppositio loci solis diversum influxum habet in heliocentricum locum planetae, qui derivatur ex observato geocentrico. — Si assumimus aequationes loci citati

$$\operatorname{tg}(\lambda-K) = \frac{y-Y}{x-X}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{z-Z}{x-X}\cos(\lambda-K)$$

obtinemus per differentiationem

$$(dx-dX)(y-Y) = (dy-dY)(x-X), \quad (dx-dX)(z-Z) = (dz-dZ)(x-X)$$

Sed habemus quoq;

$dx = \frac{x\,dr}{r} - r\,du \sin u, \quad dy = \frac{y\,dr}{r} + r\,du \cos n, \quad dz = \frac{z\,dr}{r} + r\,du \cos u \sin n$

et eadem ratione

$dX = \frac{X\,dR}{R} - Y\,dL, \quad dY = \frac{Y\,dR}{R} + X\,dL, \quad Z = dZ = 0$

Si hi valores in duabus praecedentibus aequationibus substituuntur, obtinemus per eliminationem valores pro du et dr, nimirum $du = \frac{R \sin u}{r \sin(L-K)} . dL, \quad dr = \left\{\frac{r\cos(L-K) - R\cos u}{\sin(L-K)}\right\} . dL + \frac{r\,dR}{R}$

Possumus etiam inversos casus derivare quod quoq; saepius utilitatis est. Sic invenitur pro ultimo casu

$$d\lambda = \frac{dR \sin(\lambda - L) - R\,dL \cos(\lambda - L)}{\rho \cos\beta}$$

$$d\beta = \frac{\sin\beta}{\rho}\left\{dR \cos(\lambda - L) + R\,dL \sin(\lambda - L)\right\}$$

et hi sunt errores situs geocentrici, qui committuntur, si e dato heliocentrico loco et quantitatibus dL, dR, erroneo loco Solis geocentrica longitudo et latitudo derivatur. —

Momenti quoq; est disquisitio, qua ratione parvae variationes elementorum orbitae, cum et his promanantibus variationibus longitudinis heliocentricae l et latitudinis b sint connexae. Ut hic simul omnia elementa respiciamus, habemus in theoria motus elliptici aequationes $tg(l-K) = \cos n\, tg\, u$, $\sin b = \sin n \sin u$

quae dant $\quad dl = dK - dn\, tg\, b \cos(l-K) + du . \frac{\cos n}{\cos b}$

$$db = dn \sin(l-K) + du \sin n \cos(l-K)$$

ubi u est argumentum latitudinis, et l reducta heliocentrica longitudo planetae. Si designamus per v, m, veram et mediam anomaliam a perihelio, per a, $a\varepsilon$, π, semiaxin majorem, excentricitatem et longitudinem perihelii, et si nominamus t numerum dierum, qui ab epocha ad quam media longitudo L' planetae pertinet, sunt effluxi, et f tandem medium diurnum motum, erit $\quad u = v + \pi - K$ et $m = L' + tf - \pi$. Sed $dv = \alpha\,dm + \beta\,d\varepsilon$

ubi $\alpha = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-\varepsilon^2}$ et $\beta = \frac{(2 + \varepsilon \cos v)\sin v}{1-\varepsilon^2}$ (mot. ellipt.)

hinc $\quad du = \alpha(dL' + t\,df - d\pi) + \beta\,d\varepsilon + d\pi - dK$

Si autem ponitur $\quad A = \frac{\cos n}{\cos b}$ et $B = \frac{1}{2}\sin 2b\, tg(l-K)$ erit

$$\left.\begin{aligned} dl &= A\left(\alpha\,dL' + \alpha t\,df + (1-\alpha)d\pi + \frac{\beta\,d\varepsilon}{\sin 1''}\right) + (1-A)\,dK - tg\,b \cos(l-K)\,dn \\ \text{et } db &= AB\left(\alpha\,dL' + \alpha t\,df + (1-\alpha)\,d\pi + \frac{\beta\,d\varepsilon}{\sin 1''}\right) - AB.dK + \sin(l-K)\,dn \end{aligned}\right\} - (I)$$

Pro Sole hae aequationes transeunt in sequentem unam

$$dl = \alpha dL' + (1-\alpha) d\pi + \frac{\beta de}{\sin 1''} + \alpha t df$$

ubi l est vera longitudo Solis. Si m est media anomalia, etiam est fere $\alpha = 1 + 2\varepsilon \cos m$, $\beta = 2 \sin m + \frac{5}{2} \varepsilon \sin 2m$. —

Adhuc majoris momenti est, influxum parvarum variationum elementorum in geocentricum situm planetae noscendi. Si designat λ, β. geocentricam longitudinem et latitudinem planetae, L et R longitudinem et distantiam terrae, et si ab initio supponimus, planetam esse cum Sole in oppositione h. e. esse $l = L$, generatim habemus

$$tg(\lambda - L) = \frac{r \cos b \sin (l-L)}{r \cos b \cos (l-L) - R}$$

tunc pro $l = L$, $d\lambda = dl . \frac{tg\beta}{tg b}$, ex quo sequitur aequationem primam (I) multiplicandam esse per $\frac{tg\beta}{tg b}$ ad obtinendam expressionem pro $d\lambda$. —

Praeterea est generatim $\varrho \sin \beta = r \sin b$ et pro oppositione

$$R + \varrho \cos \beta = r \cos b$$

ubi ϱ designat distantiam planetae a terra. Si ambae aequationes differentiantur, posito R constanti, et eliminata quantitate $d\varrho$ ex ambabus aequationibus differentialibus, erit

$$d\beta = \frac{dr \sin(b-\beta) + r db \cos(b-\beta)}{\varrho}$$

Est autem $dr = -\frac{2r df}{3f} + \frac{a\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} . \sin v (dL' + t df - d\pi) - a \cos v d\varepsilon$

Si hic valor pro dr et ille pro db e secunda aequationum (I) in ultima expressione pro $d\beta$ substituitur, obtinemus

$$d\beta = \mathcal{E} . dL' + (\mathcal{E}t - \frac{2r}{3f} C) df + (D - \mathcal{E}) d\pi + (D\beta - C\delta) de + D \frac{tg(l-k)}{\sin n} . dn - D . dk$$

ubi est

$C = \frac{\sin\beta \sin(b-\beta)}{r \sin b}$, $D = \frac{\sin\beta \cos n \, ctg(l-k) \cos(b-\beta)}{\cos b}$, $\mathcal{E} = \alpha . D + C . \frac{a\varepsilon \sin v}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$

et $\alpha = \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-\varepsilon^2}$ et $\delta = a \cos v$

et hanc aequationem debemus secundae aequationum (I) substituere, ut $d\beta$ pro oppositione obtineatur. —

Eaedem ambae aequationes dant etiam per simplicem transmutationem perfectas aequationes conditionales observationum Solis. Si nimirum designamus per A, D ascensionem rectam et declinationem

declinationem Solis, per ε obliquitatem eclipticae et ponimus $P = \frac{1}{r}\cdot\sqrt{1-\varepsilon^2}$, $Q = \frac{(2+\varepsilon\cos v)}{1-\varepsilon^2}\cdot\sin v$, tantummodo in praecedentibus expressionibus l in A, $b = \beta$ in D, n in ε et k in o mutare debemus, per quod obtinemus

$$dA = \frac{\cos\varepsilon}{\cos^2 D}\{P\,dL' + Pt.\,df + (1-P)\,d\pi + Q\,d\varepsilon\} - tg D \cos A.\,de$$

$$dD = \cos A\sin\varepsilon\{P\,dL' + Pt.\,df + (1-P)\,d\pi + Q\,d\varepsilon\} + \sin A.\,de$$

Si autem tantum comparamus longitudines L Solis, sequens aequatio praecedentibus duabus est aequivalens:

$$dL = P\,dL' + Pt.\,df + (1-P)\,d\pi + Q\,d\varepsilon$$

quae concordat cum prius inventa. —

I.) Praecedentia dabant valores quantitatum $d\lambda$, $d\beta$, per $d\varepsilon$, $d\pi$, dk, sub suppositione, planetam esse cum Sole in oppositione. Non autem difficile est, dependentiam harum quantitatum generatim sine limitanda conditione ostendendi. — Si retinemus priores significationes, erit

$$x - X = \varrho\cos\beta\cos(\lambda-k) = r\cos u - R\cos(L-k)$$

$$y - Y = \varrho\cos\beta\sin(\lambda-k) = r\cos n\sin u - R\sin(L-k)$$

$$z - Z = \varrho\sin\beta = r\sin n\sin u$$

Si differentiantur primae expressiones pro $x-X$, $y-Y$, $z-Z$, respectu quantitatum ϱ, β, $(\lambda-k)$, obtinemus, eliminando $d\varrho$

$$d(\lambda-k) = \frac{dy\cos(\lambda-k) - dx\sin(\lambda-k)}{\varrho\cos\beta}$$

$$d\beta = \frac{dz}{\varrho}\cos\beta - \frac{dy}{\varrho}\sin(\lambda-k)\sin\beta - \frac{dx}{\varrho}\cos(\lambda-k)\sin\beta$$

Assumamus hinc situm terrae ejusque distantiam a Sole quasi erroneam, x, y, z tantum dependent a quantitatibus u, r, n, k. Hinc debent sumi differentialia partialia harum coordinatarum respectu harum quatuor quantitatum. Si brevitatis causa ponitur $tg\varphi = \frac{tg(\lambda-k)}{\cos n}$, $tg\psi = \sin(\lambda-k)\,tg\,n$, erit

$$\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = \frac{\left(\frac{dy}{dr}\right)\cos(\lambda-k) - \left(\frac{dx}{dr}\right)\sin(\lambda-k)}{\varrho\cos\beta} = \frac{\cos n\sin u\cos(\lambda-k) - \cos u\sin(\lambda-k)}{\varrho\cos\beta}$$

h. e. $\left(\frac{d\lambda}{dr}\right) = -\frac{\sin(\lambda-k)\sin(\varphi-u)}{\varrho\sin\varphi\cos\beta} = a'$

Eadem ratione obtinetur

$$\left(\frac{d\lambda}{du}\right) = \frac{r\sin(\lambda-k)\cos(\varphi-u)}{\varrho\sin\varphi\cos\beta} = b'$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dn}\right) = -\frac{r\sin n\sin u\cos(\lambda-k)}{\varrho\cos\beta} = F$$

$$\left(\frac{d\lambda}{dk}\right) = 1 + \frac{R\cos(L-\lambda)}{\varrho\cos\beta} = d'$$

Eodem modo est praeterea

$$\left(\frac{d\beta}{dr}\right) = -\frac{R\sin\beta\cos(\mathfrak{L}-\lambda)}{r\varrho} = a''$$

$$\left(\frac{d\beta}{du}\right) = \frac{r}{\varrho}\sin n\cos(\lambda-k)\cos(\varphi-u)\cos(\psi-\beta) + \frac{r}{\varrho}\sin(\varphi-u)\sin(\psi-\beta) = b''$$

$$\left(\frac{d\beta}{dn}\right) = \frac{r\cos n\sin u\cos(\psi-\beta)}{\varrho\cos\psi} = \mathfrak{F}', \left(\frac{d\beta}{dk}\right) = \frac{R}{\varrho}\sin\beta\sin(\mathfrak{L}-\lambda) = d''$$

ex quo sequitur

$$d\lambda = a'dr + b'du + \mathfrak{F}.dn + d.dk, \quad d\beta = a''dr + b''du + \mathfrak{F}'dn + d''dk$$

Si autem π est longitudo perihelii, v, m, vera et media anomalia, a, $a\varepsilon$, semiaxis major et excentricitas, erit

$$u = v + \pi - k \quad \text{et hinc} \quad du = dv + d\pi - dk$$

Praeterea habuimus

$$dv = \frac{a^2}{r^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}dm + \frac{(2+\varepsilon\cos v)}{1-\varepsilon^2}\sin v.\,d\varepsilon$$

et

$$dr = \frac{r}{a}da + \frac{a\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.\sin v.\,dm - a\cos v\,d\varepsilon$$

Si brevitatis causa ponimus $\frac{r^2}{a^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = f$, $\frac{(2+\varepsilon\cos v)\sin v}{1-\varepsilon^2} = g$

$\frac{a\varepsilon\sin v}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = f'$, $\quad -a\cos v = g'$

est $\quad dv = f dm + g d\varepsilon, \quad dr = f'dm + g'd\varepsilon + \frac{r}{a}da$

Si praeterea ϑ est motus diurnus in media longitudine, M haec media longitudo ipsa pro quacunque epocha, quae t diebus praecedit hisce praesentibus observationibus (si epocha sequitur observationem, t est negativum), habebimus:

$$m = M + t\vartheta - \pi \quad \text{hinc etiam} \quad dm = dM + td\vartheta - d\pi$$

Tandem est $\vartheta.a^{\frac{3}{2}} = \mu$, ubi $\mu = 0.017202$ hinc

$$da = -\frac{2a\,d\vartheta}{3\vartheta}$$

Si colliguntur omnia praecedentia et ponitur brevitatis causa

$A = (a'f' + b'f)t - \frac{2a'r}{3\vartheta}$, $B = a'f' + b'f$, $C = b' - (a'f' + b'f)$, $\mathfrak{D} = b'g - a'g'$; $\mathcal{E} = d' - b'$

et $A' = (a''f' + b''f)t - \frac{2a''r}{3\vartheta}$, $B' = a''f' + b''f$, $C' = b'' - (a''f' + b''f)$ $\mathfrak{D}' = b''g + a''g'$; $\mathcal{E}' = d'' - b''$

habebimus sequentes expressiones

$$\left.\begin{aligned} d\lambda &= A d\vartheta + B dM + C d\pi + \mathfrak{D} d\varepsilon + \mathcal{E} dk + \mathfrak{F} dn \\ d\beta &= A' d\vartheta + B' dM + C' d\pi + \mathfrak{D}' d\varepsilon + \mathcal{E}' dk + \mathfrak{F}' dn \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

Ex his generalibus aequationibus etiam prius pro oppositione datos valores $d\lambda$, $d\beta$, derivabimus, si in praesentibus expressionibus heliocentricam longitudinem aequalem geocentricae ponimus, quo quidem unus prius adductorum angulorum auxiliarium φ, ψ, argumentum latitudinis et alter heliocentrica longitudo erit, et

esi $\frac{r}{\varrho} = \frac{\sin\beta}{\sin b}$, et, uti ex suppositione oppositionis sequitur, $\frac{R}{\varrho} = \frac{\sin(\beta-b)}{\sin b}$ ponitur, et si tandem prima aequationum (II) per $tg\beta . ctg\beta$ multiplicatur.

Si igitur jam habemus approximatos valores pro elementis n, k, ε, π, pro singulis observationibus, ex his elementis calculabimus geocentricam longitudinem et latitudinem, quae cum eadem autem observata longitudine et latitudine quantitatum $d\lambda, d\beta$, et hinc tot binas aequationes (II) dabunt, quot observationes ad hunc calculum sunt assumtae, et ex omnibus his aequationibus secundum methodum in theoria probabilitatis allatam, maxime probabiles valores correctionum $dn, dk, d\varepsilon, d\pi$, et hinc quoque illa correcta elementa $n+dn$, $k+dk$, $\varepsilon+d\varepsilon$ invenientur, quae omnibus his observationibus satisfacient.

2.) Commodius adhuc est, loco correctionum geocentricarum longitudinum et latitudinum $d\lambda, d\beta$, adhibendi immediate correctiones geocentricarum ascensionum rectarum et declinationum $d\alpha, d\delta$, et ad obtinendas huc pertinentes expressiones, optimum erit adhibere aequationes in loco heliocentrico et geocentrico N. 8.) datas. Ut saltem indicemus totam operationem, tantummodo factorem pro $d\pi$ evolvere volumus, ubi π est longitudo perihelii.

Si retinemus ibi assumtas significationes quantitatum A, B, C, a, b, c, et si nominamus a' semiaxin majorem, erit

$$x = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} . \sin a \sin(A+v+\pi-k)$$
$$y = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} . \sin b \sin(B+v+\pi-k)$$
$$z = \frac{a'(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos v} . \sin c \sin(C+v+\pi-k)$$

Si nunc brevitatis causa ponitur

$$A+v+\pi-k = A', \; B+v+\pi-k = B', \; C+v+\pi-k = C'$$

invenitur $\left(\frac{dx}{d\pi}\right) = x\, ctg A'$, $\left(\frac{dy}{d\pi}\right) = y\, ctg B'$, $\left(\frac{dz}{d\pi}\right) = z\, ctg C'$

et eadem ratione

$\left(\frac{dx}{dv}\right) = x(h+ctg A')$, $\left(\frac{dy}{dv}\right) = y(h+ctg B')$, $\left(\frac{dz}{dv}\right) = z(h+ctg C')$, ubi $h = \frac{\varepsilon \sin v}{1+\varepsilon\cos v}$

Si igitur ponimus, uti prius $\frac{a^2}{r^2}(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = f$, invenitur

$$dx = \left\{ \left(\frac{dx}{d\pi}\right) - f\left(\frac{dx}{dv}\right) \right\} d\pi$$

$$dy = \left\{ \left(\frac{dy}{d\pi}\right) - f\left(\frac{dy}{dv}\right) \right\} d\pi$$

$$dz = \left\{ \left(\frac{dz}{d\pi}\right) - f\left(\frac{dz}{dv}\right) \right\} d\pi$$

et ut perfectos valores quantitatum dx, dy, dz obtineamus, adhuc iis ea membra addemus, quae sunt multiplicata in dM, dϑ, dε, dK et dn. — Si hac ratione habemus perfectos valores quantitatum dx, dy, dz erit

ibi erat $tg\,\alpha = \frac{y-Y}{x-X}$, $\sin\delta = \frac{z-Z}{\varrho}$

$$d\alpha = \frac{dy\cos\alpha - dx\sin\alpha}{\varrho\cos\delta}$$

$$d\delta = \frac{dz}{\varrho}\cos\delta - \frac{dy}{\varrho}\sin\alpha\sin\delta - \frac{dx}{\varrho}\cos\alpha\sin\delta$$

Haec methodus praeferenda erit illi in 1.) data quia v. c. tantummodo rectascensiones ad correctionem elementorum assumi possunt, et quia error observationis in α vel δ facilius detegitur (: Qui plura hujus disquisitionis vult legere, sumat tractatum celeb. Bessel in Berliner Jahrbuch pro 1810 p. 107.)

3.) Ut adhuc per exemplum monstremus, qua ratione tempore oppositionis institutae observationes calculantur, quae semper magni pretii, quia geocentrica longitudo planetae in oppositione eadem est, quae ex centro Solis vel ex centro motus planetae observaretur, volumus assumere sequentes observationes Palladis, quae Mediolani a celeb. Oriani sunt institutae.

1804		temp. med. Mediol.	appar. AR	appar. declinatio
Augustus	27.	11ʰ 50′ 59″	333° 42′ 44.″3	+5° 33′ 39.″1
	28.	11 46 17	333 31 20.6	5 22 10.4
	29.	11 41 35	333 19 58.1	5 10 29.9
	30.	11 36 54	333 8 35.9	4 58 42.7
	31.	11 32 13	332 57 17.7	4 46 45.7

Hae observationes reducuntur nunc ad geocentricas longitudines et latitudines et hae ultimae comparantur cum tabulis vel cum e datis elementis, derivatis geocentricis longitudinibus et latitudinibus, ut obtineatur correctio horum elementorum pro tempore observationum. Haec elementa sunt

Epocha 1803 ----------	221° 29′ 32.″0 Merid. Seeberg
log. semiaxis majoris	0.4423790
longitudo nodi ascend. 1803 -	172° 28′ 13.″7
Inclinatio orbitae ----------	34° 38′ 1.″1

Excentricitas - - - - - - - - - - 0. 2457396
Longitudo perihelii 1803 - - - - 121° 17' 34."4
Diurnus tropicus motus - - - - - - 770."0446

Si quaeritur et ex illis observatis locis, et ex his elementis geocentrica longitudo et latitudo, obtinemus

vera observ. longitudo		vera observ. latitudo
11ˢ 7° 42' 29."3	- - - - - -	+ 15° 19' 50."0
11 7 27 9.7	- - - - - -	15 13 21.8
11 7 11 47.6		15 6 41.3
11 6 56 23.8		14 59 54.1
11 6 40 59.7		14 52 54.3

correctio elementorum

in longitudo		in latitudo
+ 7' 24."2	- - - - - -	− 2' 16."3
+ 7 27.7	- - - - - -	− 2 11.8
+ 7 29.1	- - - - - -	− 2 13.5
+ 7 29.9	- - - - - -	− 2 13.9
+ 7 30.1		− 2 18.1
in medio + 7' 28.1 = $d\lambda$ (elementa minus)		− 2' 14."7 = $d\beta$ (elementa plus)

Quum nunc jam fere sciamus, oppositionem cadere 30. Aug. circa 5ʰ corrigatur ex elementis calculata vera longitudo et latitudo 29. Aug et 30 Aug. per medias correctiones $d\lambda$, $d\beta$, per quod obtinemus.

	med. temp. Merid.	correctio longitudo	correcta latitudo
Aug. 29.	11ʰ 41' 35" = t_1	11ˢ 7° 11' 46."8 = λ	15° 6' 40."1 = β
30.	11 36 54" = t_2	11ˢ 6° 56' 22.2 = λ_1	14 59 53.3 = β'
Differentia	23ʰ 55' 19" = a	− 15 24.6 = $\Delta\lambda$	− 6 46.8 = $\Delta\beta$

Longitudo ☉ + 180° + 20."5

11ˢ 6° 18' 54."1 = L
11 7 16 49.3 = L_1
+ 57 55.2 = ΔL
− 15 24.6 = $\Delta\lambda$

$\Delta L - \Delta\lambda = b =$ 73' 19."8

Nimirum 29 Augusti erat longitudo planetae ex elementis

11ˢ 7° 4' 18."5
$d\lambda$ = + 7' 28."3
λ = 11ˢ 7° 11' 46."8

Latitudo - - - 15° 8' 54."8
$d\beta$ = − 2 14.7
β = 15° 6' 40.1

et eadem ratione pro 30. August

Ut ex his derivetur tempus oppositionis $\mathfrak{T}$, est

$b:a = \lambda - L : x$ $\quad x = 17^h\ 15'\ 1''$

$t = 11\ \ 41\ \ 35$

$\mathfrak{T} = 30.$ Augusti $= 4^h\ 56'\ 36''$

vel etiam $b:a = \lambda - L : y$, $y = 6^h\ 40'\ 18''$

$t_1 = 11\ \ 36\ \ 54$

$\mathfrak{T} = 30.$ Augsti $4^h\ 56'\ 36''$

et pro hoc tempore $\mathfrak{T}$ quaeritur geocentrica et heliocentrica longitudo $l' = \lambda'$ et geocentrica latitudo sequenti modo.

Longitudo $a : \Delta L = \mathfrak{T} - t : x$, $x + L = 11^s\ 7^\circ\ 0'\ 40.''0 = l'$

vel $a : \Delta L_1 = t_1 - \mathfrak{T} : x'$, $L_1 - x' = 11\ 7\ 0\ 40.0 = l'$

$a : \Delta\lambda = \mathfrak{T} - t : x''$ $\lambda - x'' = 11\ 7\ 0\ 40.0 = l'$

$a : \Delta\lambda = t_1 - \mathfrak{T} : x'''$, $\lambda_1 + x''' = 11\ 7\ 0\ 40.0 = l'$

Latitudo

$a : \Delta\beta = \mathfrak{T} - t : y$, $\beta - y = 15^\circ\ 1'\ 46.''8 = \beta'$

$a : \Delta\beta = t_1 - \mathfrak{T} : y'$, $\beta + y' = 15\ 1\ 46.8 = \beta'$

Habebimus igitur qua resultatum finale omnium observationum, tempus oppositionis 30. Aug. $4^h\ 56'\ 36''$ med. temp. Mediolani

heliocentrica vel geocentrica longitudo Palladis $= 11^s\ 7^\circ\ 0'\ 40.''0$

geocentrica latitudo $= +15\ 1\ 46.8$

et ut et alii sint in statu calculum harum observationum cum aliis elementis repetendi, adjungi solent adhuc elementa praecedentis calculi.

Illa erant: Apparens obliquitas ecliptica $23^\circ\ 27'\ 55.''5$

Parallaxis altitudinis Palladis ---- 2.4

Aberratio in longitudine ---- − 12.4

— in latitudine ---- − 5.2

Nutatio longitud. ---- −13.7

Aliqui Astronomi solent indicare quoque apud resultata observatarum oppositionum, heliocentricam latitudinem b et correctiones tabularum in heliocentrica longitudine et latitudine seu dl, et db, sed hae quantitates b. db praesupponunt distantiam planetae a Sole ς quae notatur et quum hoc non perfecte locum habeat, melius erit negligere quantitatem b. db

Nimirum habemus $\sin b = \frac{\varrho}{r}\sin\beta$, ubi pro β correcta geocentrica latitudo ponitur, et praeterea

$$db = \frac{\varrho}{r}\cos(\beta - b)\,d\beta + \frac{d\varrho}{r}\sin(\beta - b)$$ (: ubi ϱ et $d\varrho$ incognitae)

correctiones $d\lambda$, $d\beta$ autem sunt, uti ex praecedentibus videmus, per observationes ipsas immediate datae, hinc possumus ibi datas ~~differentias~~ aequationes conditionales pro $d\lambda$, $d\beta$ evolvere et resultatis adjicere.

Tandem quoq notare possumus, nostras datas expressiones suppeditare quoq idonea media, singula elementa Ω, π, ε, .. per comparationem cum observationibus corrigendi, si agnoscuntur adhuc quae erroneae; hanc operationem applicaverunt priores Astronomi praecipue apud planetas; plura legere possumus in Astronomia celeb. Lalande et in illa celeb. Schubert. —

Hic quoq adjungere possumus tabulam motus elliptici planetarum secundum Laplace „Exposition du syst. du monde 1825.

1. Duratio sidereae revolutionis

Mercurius	87.^{dies}9692580
Venus	224.7007869
Terra	365.2563835
Mars	686.9796458
Jupiter	4332.5848212
Saturnus	10759.2198174
Uranus	30686.8208296

2. Semiaxes majores orbitarum

Mercurius	0.3870981
Venus	0.7233316
Terra	1.0000000
Mars	1.5236923
Jupiter	5.202776
Saturnus	9.5387861
Uranus	19.182390

3. Ratio excentricitatis ad semiaxin pro 1801

Mercurius	0.20551494
Venus	0.00686074
Terra	0.01685318
Mars	0.0933070
Jupiter	0.0481621
Saturnus	0.0561505
Uranus	0.0466108

4. Media

4. Media longitudo pro initio anni 1801.

Mercurius - - -	182°.15647
Venus - - - -	11.93259
Terra - - - -	111.28179
Mars - - - -	71.24071
Jupiter - - - -	124.68251
Saturnus - - -	150.35354
Uranus - - -	197.55589

5. Media longitudo perihelii pro eodem tempore

Mercurius - - - -	82°.6256
Venus - - - - -	143.0349
Terra - - - - -	110.5571
Mars - - - - -	369.3323
Jupiter - - - -	12.3810
Saturnus - - - -	99.0647
Uranus - - - - -	186.1500

6. Inclinatio orbitæ pro 1801.

Mercurius - - - -	7°.78058
Venus - - - - -	3.76807
Terra - - - - -	0.00000
Mars - - - - - -	2.05746
Jupiter - - - - -	1.46029
Saturnus - - - - -	2.77029
Uranus - - - - -	0.86063

7. Longitudo nodi ascendentis

Mercurius - - - -	51°.0651
Venus - - - - -	83.2262
Terra - - - - -	0.0000
Mars - - - - - -	53.3344
Jupiter - - - -	109.3762
Saturnus - - -	124.3819
Uranus - - -	81.1035

Novi Planetæ.

1. Sidereæ revolutiones

Ceres - - - -	1681.3931 dies
Pallas - - - -	1686.5388
Juno - - - -	1592.6608
Vesta - - - -	1325.7431.

2. Semiaxes majores orbitarum

Ceres ——— 2.767245
Pallas ——— 2.772680
Juno ——— 2.669009
Vesta ——— 2.36787

3. Ratio excentricitatis ad semiaxim majorem

Ceres ——— 0.078439
Pallas ——— 0.241648
Juno ——— 0.257848
Vesta ——— 0.089130

4. Media longitudo pro anno 1820

Ceres ——— 136°.8461
Pallas ——— 120.3422
Juno ——— 222.3989
Vesta ——— 309.2917

5. Longitudo Perihelii

Ceres ——— 163°.4727
Pallas ——— 134.5754
Juno ——— 59.5142
Vesta ——— 277.2853

6. Inclinatio orbitarum versus ecliptica pro a. 1820.

Ceres ——— 11°.8044
Pallas ——— 38.4244
Juno ——— 14.5215
Vesta ——— 7.9287

7. Longitudo nodi ascendentis pro año 1820

Ceres ——— 87°.6557
Pallas ——— 191.8416
Juno ——— 190.1421
Vesta ——— 114.6908

Luna

Phaenomena generalia Lunae

Lunae formant specialem classem corporum coelestium; sunt planetae secundariae, qui se distinguunt a primariis per id, ut eorum corpus centrale non sit Sol, sed aliquis planeta, quem in suo cursu comitantur, ita, ut tantummodo mediate rotentur circa Solem; ex hac ratione etiam accepe-runt nomen Planetarum secundariorum seu Satellitum. Cycloïs, quam hae corpora in spatio absoluto describunt, est adhuc magis com-plicata, quam illa planetarum. —
Nos noscimus tantummodo quatuor planetas circumdatos satellitibus, Mars et inferiores planetae non habent satellites, nam detectio satel-litis Veneris non est confirmata.
Praecipuum phaenomenon, quod se obtulit hominibus, certe fuerunt Phasis Lunae, seu differentes formae quas repraesentat nobis in diversis partibus suae orbitae. Quum invisibilis fuerit per quatuor dies, illa apparet 20° — 30° a parte orientali Solis sub forma incurvati argentei fili. Magnitudo hujus fili semper augetur in ratione, in qua Luna orientem versus a Sole discedit. Post quinque dies Luna jam devenit semicircularis, si elongata est 90° orientem ver-sus a Sole, est primus quadrans (quadratura). Ejus visibilis pars dein versus occidentem est terminata per semiperipheriam cir-culi, ad orientem per diametrum. Ista linea recta semper magis et magis incurvatur, illuminata pars semper crescit, donec post 12 dies sit directe opposita Soli, et appareat circularis, est Plenilunium. Luna continuat suam viam orientem versus; limbus occidentalis acquirit formam arcus elliptici, et pars illuminata eadem ratione decrescit, uti fuerit augmentum prius. Post 19 aut 20 dies illa ap-paret qua semicirculus, cujus diameter est directa versus occidentem hoc est ultimus quadrans; Luna est elongata a Sole 90° versus occasum seu 270° versus ortum. Pars visibilis semper imminuitur,

et post 24 dies, quando tantum distat 26° - 30° a Sole, iterum apparet uti ab initio sub forma argentei fili, cujus cornua sunt directa occasum versus, in opposita parte Solis. Deinde illa evanescit in radiis Solis, cui semper magis adpropinquatur, et post 4 aut 5 dies, illa iterum apparet ad orientalem partem Solis, et praecedentia phenomena in eodem ordine revertunt. Clarum est, in hoc intervallo, quando luna erat invisibilis, illam fuisse inter Solem et terram, vel illam fuisse in conjunctione cum Sole, et hoc nominamus novilunium.

Per hoc jam concludere possumus, lunam esse corpus opacum, quod accipit suum lumen a Sole; haec veritas jam prisis temporibus erat nota „La lune n'a d'autre lumière que celle qu'elle reçoit du Soleil„ Almageat Lib IV. Cap. I edit. de M.M. Halma et Delembre p. 213.

Limes ellipticus luminis, qui modo major modo minor est comprobat, lunam, seu saltem ejus partem obversam terrae, esse corpus sphaericum, in quo circulus terminans huic apparet uti ellipsis. Vidimus, partem illuminatam lunae semper esse obversam Soli, et ejus incrementum vel decrementum se exacte modificare secundum distantiam a Sole: ex quo sequitur, illam habere suam lucem a Sole. Sed dantur phenomena quae hoc adhuc clarius demonstrant. — Observationes longitudinis et latitudinis lunae, quando accedit ad suam conjunctionem cum Sole, dabunt variationes positionis, ex quibus potest calculari momentum conjunctionis, et latitudo lunae in hoc tempore. His positis facile videmus, si haec latitudo lunae minor est quam summa diametrorum Solis et lunae, locum habere eclipsin solarem: videbimus discum nigrum qui transit per Solem ab occidente ortum versus. Directio, celeritas et magnitudo hujus disci, quae sunt perfecte conformis motui et diametro lunae, evidenter probant, hoc corpus opacum esse lunam ipsam, quae transiens inter Solem et terram, nobis obvertit partem obscuram, quia haec pars non potest accipere aliquam lucem a Sole: ex quo sequitur, lunam non lucere per se ipsam. —

Observationes macularum Lunæ quoq. comprobant hanc veritatem. — Nos videmus semper easdem maculas quoq. in parte obscura, si reflexum lumen (cendrée) terræ eas facit visibiles; hinc eadem pars est vel visibilis vel invisibilis; ex quo sequitur, hoc non esse proprietatem lunæ. Superficies hujus corporis, apparet nobis cum elevationibus et cavitatibus, tempore plenilunii, quando est diametraliter opposita Soli, has cavitates videmus in tota sua profunditate illuminatas, quia radii Solis incidunt perpendiculariter. Quolibet alio tempore, istæ elevationes, quæ circumdant illas cavitates, projiciunt umbram; hæ umbræ semper ad oppositam partem Solis, se prolongant in ratione in qua situs lunæ est magis vel minus obliquus respectu Solis.

Eclipses Lunæ etiam comprobant hanc veritatem. Quum terra et Sol semper sint in ecliptica, terra necessario debet projicere in hoc plano umbram conicam ad oppositam partem Solis; ex hoc sequitur, si luna accipit suam lucem a Sole, lunam plenam esse obscuratam, si ejus latitudo est admodum parva, et hoc revera accidit. Si plenilunium est fere in uno suorum nodorum, luna perdit suam lucem fere totam vel ex parte, et umbra transit per lunam a sinistra dextram versus, quia luna intrat in umbram terræ a dextra sinistram versus. — Particularitates eclipsium multum dubii non relinquunt, umbram terræ esse earum veritabilem causam. In omnibus locis terræ, ubi luna eclipsata oritur, hoc phænomenon absolute est idem, et apparet eodem momento, quod probat, hoc phænomenon non esse productum per aliud corpus situatum inter lunam et terram, quia alias propter parallaxin amborum corporum, tempus et magnitudo eclipsis essent diversæ pro diversis locis terræ; hoc ergo est veritabilis eclipsis, obscuritas seu umbra, quæ tegit lunam. Eadem pars lunæ, quæ nuper lucebat magna luce, nunc est penitus obscurata, et ipsa evadit invisibilis, si terra est situata inter illam et Solem, et nos videmus intrasse maculas lunæ unam post alteram in umbram. — Eclipses solares, e contrario, apparent diversa ratione in diversis locis; sunt nimirum totales in uno loco, in altero loco non est eclipsis; in regionibus occidentalibus videntur prius quam in orientalibus etc. Hic effectus parallaxeos probat, non esse Solem qui perdit suam lucem, sed aliquod corpus, quod debet esse multo vicinius terræ quam Sol, regere hoc astrum;

et nos vidimus, hoc astrum esse lunam. —
Eclipses nobis dant ideam generalem naturæ orbitæ lunaris. In eclipsibus Solis luna est situata inter Solem et terram; in istis lunæ, illa est opposita Soli; hinc non est nec planeta superior neq inferior, et ejus orbita includit ~~illam~~ terram, sed non Solem. Parallaxis lunæ est fere unus gradus: ex quo sequitur, lunam esse fere 400 vicibus viciniorem terræ, quam Solem, et terram esse punctum centrale ejus orbitæ, quia parallaxis nullis aliis variationibus est obnoxia, quam illis parvis quæ veniunt a motu elliptico. Hinc quoq possumus concludere distantiam lunæ ex ejus eclipsibus. Magnitudo et distantia Solis et lunæ determinant conum umbræ quam terra projicit. Latitudo lunæ durante eclipsi, dat ejus distantiam ab axe hujus coni, et per observationem eclipsis cognoscimus chordam sectionis umbræ, quam percurrebat luna, quæ comparata cum latitudine lunæ, dabit diametrum umbræ, et hinc consequenter distantiam lunæ a terra. Etiam invenimus distantiam lunæ in omnibus eclipsibus, semper fere eandem. Terra igitur est verum punctum centrale orbitæ lunaris: observationes nobis dant immediate verum motum lunæ et non necessarii omnes ii calculi qui reddunt theoriam planetarum adeo complicatam, quia hi non videntur e centro eorum orbitarum. Sed irregularitates motus lunæ, productæ per actionem Solis, exigunt adhuc magis complicatos calculos, qui continentur in Astronomia physica.
Sint S, T, V, loca Solis, terræ et planetæ; limes illuminationis est ellipsis cujus axis minor se habet ad majorem uti cos STV : 1. In triangulo STV, TS = a semper est datum: posendo dein TV = r, quod fere est $\frac{a}{400}$ (praec.) et elongatione lunæ a Sole STV, habebimus angulum SVT, et hinc quoq limitem illuminationis. Idem triangulum suppeditat medium, inveniendi distantiam lunæ, si illa Solis est data, et reciproce: ad hunc finem deberet esse quam exactissime observatus limes illuminationis, quod est admodum difficile. Si ADBE est pars illuminata lunæ ACBE, distantia cornuum AB dabit axin majorem = 2m ellipseos ADB; si nunc mensurata est

chorda

chorda DE, perpendicularis ad AB in L et subtrahendo semiaxin LE = m, nos habebimus semi axin minorem LD = n. Noscimus igitur $\frac{n}{m} = \cos SVT$ (prior figura) et STV per observationem, hinc $TSV = 180° - T - V$, ex quo $TV = \frac{TS \sin S}{\sin V}$ vel $TS = \frac{TV \sin V}{\sin S}$. Calculus erit simplicior, si possumus observare momentum, primę aut ultimę quadraturę lunę, ubi ellipsis evadit linea recta; ita ut n et cos SVT evadunt aequalis zero: dum habemus $SVT = 90°$, $TV = TS \cos T$, et $TS = \frac{TV}{\cos T}$. — Hoc igitur dat distantiam lunę in ratione ad illam Solis: si vellemus absolutam distantiam ~~lunę in ratione ad illam Solis~~ deberemus scire parallaxin Solis aut lunę. Prima, quę determinatu est admodum difficilis, propter suam parvitatem, antiquioribus Astronomis erat incognita, sed parallaxis lunę, ab eis satis bene erat determinata. Aristarchus se serviebat aequatione $TS = \frac{TV}{\cos T}$ ad deducendam parallaxin Solis ex illa lunę, et saeculo decimo septimo, inventa est per hanc methodum parallaxis Solis a 15″–30″, quę multum a veritate differt.

Nunc debent determinari per observationes elementa orbitę lunę. Ex eo tempore, quo leges celeb. Kepler confirmatę sunt per observationes omnium planetarum, naturalis erat earum applicatio etiam ad Satellites. Suppositio harum legum ad nihil aliud servit, quam ad dirigendas nostras disquisitiones quoad motum lunę, quę dein decident, an hę leges quoque applicabiles sunt ad hoc astrum. Hic tantum modo sermo esse potest de duabus primis legibus Kepleri, quia tertia refertur ad plura astra, quę revolvuntur circa commune corpus centrale. Nos quęremus elementa orbitę lunaris in ordine sequenti, qui apparet quam maxime naturalis.

1. Motus medius seu duratio media mensis.
2. Loci, in quibus motus est vel maxime vel minime rapidus, quod dat positionem apsidum.
3. Maxima differentia veri motus, seu excentricitas et aequatio centri.
4. Maxima elongatio lunę ab ecliptica seu inclinatio.
5. Positio communis sectionis, seu nodorum amborum planorum.
6. Distantia seu Parallaxis, et magnitudo lunę.

Praeter inaequalitates quę proveniunt a motu elliptico, luna

quas

quoq habet alias, quæ veniunt ab attractione Solis, et quarum aliquæ sunt ita considerabiles, ut solæ observationes illas jam detexerint antiquioribus Astronomis. —

Quum terra sit in centro orbitæ lunaris, facile erit determinare ejus elementa methodo generali, et Hypparchus et Ptolomæus hoc fecerunt magna cum cura. Observationes eclipsium lunæ, quibus illi principaliter superstruxerunt suam theoriam, serviebant illis ad determinationem durationum mensium, celeritatis lunæ in diversis partibus ~~illius~~ orbitæ, ejus latitudinis. Invenerunt quoq, lunam habere inæqualitatem 5°, et aliam 1° 26', ejus apsides habere motum retrogradum 19° 20', et ejus orbitam esse inclinatam versus eclipticam sub angulo 5°. Omnia hæc bene concordant cum hodiernis observationibus, uti videbimus. —

Diversi menses.

Tempus, quod requiritur ad perficiendam unam integram revolutionem, vel tempus, quod perducit lunam ad eandem priorem positionem vocatur Mensis; et dantur tot differentes menses, quot diversæ methodi determinandi positionem lunæ. Verum punctum visus a quo debemus determinare ejus positionem, vel circa quod numerantur revolutiones, est terra, corpus centrale suæ orbitæ; sed nos possumus suum motum geocentricum referre ad diversa puncta cœli, et si hæc puncta sunt immobilia, tantummodo resultat differentia relative ad initium et ad finem cujuslibet mensis, et nulla quoad durationem; sed si habemus differentes motus, etiam promanant menses diversæ durationis. —

Solus veritabilis mensis est tempus, quo indiget luna ad describendum angulum 360° circa terram, vel quod reducit lunam ad eadem fixa puncta cœli. Verus mensis est hinc tempus quod perducit lunam ad eandem positionem inter stellas fixas seu Mensis sideralis. Sed quum positio orbitæ lunæ subjecta sit considerabilibus variationibus, sequitur, lunam, in quavis revolutione, plus vel minus appropinquari eidem stellæ

ita

ita ut non accurate reveniat ad eandem situationem respectu
stellarum. Ut stabiliamus ideas, locus lunae reducitur ad eclip-
ticam, et nominatur mensis sideralis, intervallum inter duas
conjunctiones consecutivas lunae cum eadem stella fixa.
In mense siderali luna percurrit plus quam 360° longitudinis,
quia puncta aequinoctialia habent motum retrogradum. —
Revolutio respectu punctorum aequinoctialium est mensis periodicus.
hic est brevior quam mensis sideralis tempore quod requirit
luna ad describendum arcum, quem percurrebant puncta aequi-
noctialia in mense periodico. —
In decursu unius mensis, luna, quum jam erat elongata
a Sole 180°, iterum illi appropinquatur, donec veniat in con-
junctionem, itaque elongata est revera 360° quoad eandem direc-
tionem ab occidenti orientem versus, vel luna fecit unam
integram revolutionem respectu Solis. Talis revolutio seu
tempus ellapsum ab una conjunctione cum Sole, vel ab una
oppositione ad alteram, vocatur Mensis synodicus, mensis
lunaris vel lunatio. — Facile videmus hunc mensem
esse longiorem quam mensem sideralem tempore, quod re-
quirit luna ad describendum arcum, qui est aequalis motui
proprio durante uno mense synodico.
Si linea apsidum lunae esset immobilis, ejus anomalia cre-
sceret 360° in uno mense siderali; sed haec linea habet motum
et quidem directum et admodum rapidum; revolutio igitur
quoad apsides erit eo longior quam mensis sideralis. Mensis
anomalisticus nominatur tempus unius apogaei vel peri-
gaei ad alterum, in quo anomalia lunae augmentatur 360°. —
Idem est quoad lineam nodorum, quae habet motum retro-
gradum: revolutio lunae respectu nodorum nominatur Men-
sis draconicus (: Drachenhaupt &c.) et est tanto brevior quam
mensis sideralis.
Ita quaerimus durationem mediam mensium vel periodum
in qua locus medius lunae variat 360°. Denominationes
quas dedit Ptolemaeus mensibus, sunt: pro mense synodico,

pro mense synodico, mensis (μὴν), seu revolutio elongationis (ἀποχῆς); pro mense periodico, revolutio sive restitutio longitudinis (ἀποκατάστασις) vel (περίοδος τοῦ μήκους); pro mense anomalistico, restitutio inaequalitatis (ἀνωμαλίας); pro mense draconico, restitutio latitudinis (τοῦ πλάτους). —

Mensis synodicus pro communi vita potissimum est notatu dignus, et ejus periodus, uti et subdivisiones se distinguunt per notas phases, tali modo, ut et sine apparatu astronomico observari possint, et hinc longitudo hujus mensis prius quam ceteri, qui jam reflexiones et cognitiones astronomicas praesupponunt, ab antiquissimis populis magnam cum praecisione determinata est. Momentum, quo novilunium (la neomanie) primo visibile evadit, apud antiquissimas nationes, erat festum admodum sacratum. Tempus inter duo talia festa, illos populos docuit, longitudinem mensis synodici. Quum raro accidat, ut in uno anno non locum habeant eclipses Solis, vel lunae, hae eclipses erant medium admodum facile, ad determinationem mensis synodici, quod erat eo accuratius, quum propter brevitatem harum periodorum, hae observationes saepe repeti possent. — Antiquiores Astronomi igitur jam determinarant longitudinem hujus mensis cum praecisione, quae fere nullam amplius correctionem admittit. Una vel duae revolutiones jam sufficiebant ad videndum, mensem synodicum esse fere 29½ dierum; et haec determinatio jam sufficiebat ad comparandas eclipses quoque admodum distantes unam cum altera, sine timore erroris committendi in numero interceptorum mensium; quae igitur dedit resultata admodum exacta. Si novilunium cadebat in primum diem anni, revenit sequenti anno die vigesimo, et sic porro ita ut semper 19 diebus tardius locum habebat in annis 365 dierum; annus igitur constabat fere ex 12 mensibus synodicis et 11 diebus, qui numerus dierum sub nomine epactorum in calendariis occurrit. Continuando has observationes, inventum est, post 19 annos novilunia accurate in eosdem dies anni cadere, vel 19 annos solares accurate 235 menses synodicos continere. Hac detectio, quam Graeci adscribunt Metoni, qui vixit 430 annis ante aeram vulgarem, illis apparuit tanti momenti ut computus hujus periodi 19 annorum litteris aureis in publicis locis expositus erat; hinc quoque nunc in calendariis numerus aureus, etiam circulus lunae nominatur. Interea haec periodus est erronea duabus horis, quia nimirum tunc longitudo anni assumebatur 365¼ dierum, ex quo sequitur, longitudo mensis synodici = 29 dies 12 hor. 44 min. pri. 25.5 min. secund., quod resultatum est 22″ majus quam

quum revera deberet esse. Igitur probabile est, quum jam haberent magis exactam cognitionem longitudinis mensium, hanc periodum tantummodo ad faciliorem calculum festorum religiosorum fuisse applicatam. Ut acquireremus justam ideam, debemus nosse diversas periodos, in quas antiquiores comprehendebant totum motum Solis, lunæ, ejus apsidum et nodorum, et de quibus sermo erit inferius.

Elapsis pluribus millibus annorum possumus per comparationem priorum eclipsium cum novissimis observationibus determinare mensium maxima cum precisione. Antiquissima observatio quam nobis transmisit Ptolemaeus (: Almag. L. IV Cap. 6) est eclipsis lunæ 19 Martii anni 720 a. Chr. n. 6^h 48' temp. Paris. Quia observati loci lunæ sunt veræ longitudines, et hic medius motus quaeritur, duæ tales observationes comparari debent, in quibus medius locus lunæ erat idem, hinc ubi et aequatio centri, et quoq anomalia erant eadem. Talis observatio est eclipsis lunæ 9. Septemb. 1717. 6^h 2' ubi luna habebat fere eandem situationem respectu apsidum, uti in prima. Luna igitur erat quoad suum medium motum utraq vice in oppositione cum Sole, vel finivit certum numerum mediarum synodicarum revolutionum. Intervallum temporis est: 2437 anni et 174 dies, minus 46', inter quos sunt 609 anni intercalares: hinc hoc facit 890287.9680555... dies. Ope longitudinis mensis, quam jam determinarunt antiquiores, invenitur, esse ellapsos 30148 menses synodicos in hoc intervallo ex quo dein concluditur longitudo mensis synodici = 29^{dies} 12^h 44' 2".333 Ex his eclipsibus etiam immediate periodicum mensem, et quidem magis exacte quam synodicum invenire possumus. Nam quum hic motum lunæ relate ad Solem et hinc motus amborum corporum includit, determinatio ejus mediæ longitudinis supponit anomalias Solis ac. et lunæ, esse easdem in ambabus observationibus. Sed pro mense periodico, qui tantummodo concernit motum lunæ, locus Solis est indifferens, si tantummodo anomalia lunæ erat eadem. In praecedentibus observationibus, longitudines lunæ erant 5^s 21° 27' et 11^s 27° 34'. Per longitudinem mensis periodici, cognitam jam fere per mensem synodicum invenitur, esse ellapsos in hoc intervallo 35285 menses periodicos, quibus adhuc addi debet differentia ambarum longitudinum 6^s 6° 7'. Hac ratione invenitur longitudo mensis periodici = 27^d 7^h 43' 4".9 Melius erit assumere pro basi hujus calculi, motum medium

lunae in longitudine, qui est exacte notus per observationes 2000 annorum (: Vid. Delambre T. II. p. 315. 316. 317.:). —
Hic motus est pro 100 annis Julianis, vel pro 36525 diebus aequalis 1336 circulis + 10ˢ 7° 52' 43."5 = 1336.85521875 circulis. —
Mensis periodicus hinc erit $= \frac{36525}{1336.85521875}$ diebus, vel dividendo per 3 et multiplicando per 32 numeratorem et denominatorem — $\frac{389600}{14259.789}$ et iterum abbreviando per 900, $\frac{432.888\ldots}{15.84421}$. Divisio peracta dat mensem periodicum = 27.321582388074 dies = 27ᵈ 7ʰ 43' 4."7783292825
Saecularis motus Solis est = 100 circul. + 45' 45" ex quo resultat motus saecularis lunae respectu Solis = 1236 circulis + 307° 6' 58."5 = = 445267°.11625. Duratio unius revolutionis synodicae hinc est $\frac{360 \times 36525}{445267.11625}$ dies vel multiplicando per 800 et dividendo per 11 numeratorem et denominatorem, $\frac{956290909.0909\ldots}{30383063}$, quatus dabit mensem synodicum = 29.530588539 dies = 29ᵈ 12ʰ 44' 2."8497 8. —
Si saecularis motus punctorum aequinoctialium = 5010" = 1° 23' 30" subtrahitur ab illo lunae, differentia erit motus sideralis in 36525 diebus = 1236 circul. + 306° 29' 13."5 = 2887 5989'.225, quod dat revolutionem sideralem $= \frac{21600 \times 36525}{2887 5989.225} = \frac{21600 \times 1461}{1155039.569} = \frac{31557600000}{1155039569}$
Revera dividendo erit mensis sideralis = 27.3216613932 2972 dies = 27ᵈ 7ʰ 43' 11."5443751. — Secundum Ptolemaeum est mensis synodicus 29ᵈ 12ʰ 44' 3⅓" hinc fere dimidio minuto secundo major; mensis periodicus secundum eundem 27ᵈ 7ʰ 43' 7."25 hinc vero major duobus et dimidio minutis secundis, quia ille supponebat motum medium Solis vero majorem. —

Motum lunae et singulas revolutiones esse diversae magnitudinis, facile potuerunt se convincere; antiquiores Astronomi examinarunt hanc quaestionem sequenti modo. Cum quaelibet observatio lunae, propter ejus notabilem parallaxin et refractionem, exigat correctiones, quae tum adhuc ignotae erant, Astronomi ante Ptolemaeum tantummodo assumpserunt observationes eclipsium lunae in quas parallaxis non habet influxum. Medium eclipseos eis dedit momentum, ubi luna erat opposita Soli, seu plena, et hinc verum locum lunae, quia theoria Solis jam satis nota erat. Ope longae seriei observationum eclipsium lunae pervenerunt ad sequentia:

1. Intervalla inter eclipses non esse aequalia, et hanc inaequalitatem motus synodici esse alius naturae et majorem, ut posset explicari per excentricitatem Solis, hinc orbitam lunae quoque esse excentricam
2. Has inaequalitates, ubi v.c. maximum vel minimum intervallum temporis inter duo plenilunia, non cadere in easdem regiones coeli vel

easdem

easdem longitudines; sumenta igitur maxime inaequalitatis vel apsi-
des lunae habere motum, ex quo resultat differentia inter mensem pe-
riodicum et anomalisticum.

3. Eclipses lunae, etiam longitudinibus aequalibus lunae, non esse ejusdem magnitudinis, seu modo totales, modo partiales, modo in boreali, modo in australi parte lunae; latitudinem igitur lunae, a qua hae phenomena dependent, in eadem regione coeli, pro diversis epochis modo majorem, modo minorem, modo borealem modo australem esse. Ex hoc sequitur motus lineae nodorum lunae, et hinc differentia inter periodicum et draconicum mensem.

Ad cognoscendos omnes hos diversos motus, simplicissimum medium erat quaerendi periodum, quae comprehendebat accurate numerum cujuslibet harum revolutionum, quia fine cujuslibet mensis ab eo dependentes inaequalitates se compensare debent, et hinc in fine talis periodi compositae omnes inaequalitates deberent se tollere. Quaerebant igitur inter omnes observatas eclipses, duas tales, quae satisfacerent sequentibus conditionibus: 1.) Debebant accidere, quando luna et hinc quoq. Sol in oppositione haberent eandem longitudinem, hoc est: eodem die anni. 2.) Intervalla inter quamlibet harum eclipsium et immediate vel praecedentium vel subsequentium debebant esse aequalia, et hinc quoq celeritates et anomalias lunae. 3.) Hae duae eclipses debebant esse ejusdem naturae et magnitudinis, h.e. in eadem distantia a nodo. — Prima conditio indicat, integrum numerum revolutionum synodicarum et periodicarum esse elapsum; secunda et tertia conditio indicant eandem rem relate ad menses anomalisticos et draconicos. Formabant igitur plures periodos, quae satisfecerunt uni vel alteri harum conditionum, quoniam major vel minor precisio desiderabatur. Origo maximae partis harum periodorum evanescit in antiquissimis temporibus.

Periodus Metonis, de qua prius jam sermo erat, tantummodo primae conditioni satisfacit. Hec erat alicujus momenti quoad calendarium, quia post 19 annos omnia festa, quae se dirigunt secundum novilunia, iterum cadunt in eosdem dies anni; et forsitan hec est causa cur certa classis hominum, quae in Aegypto habebat ut ita dicam monopolium scientiarum, hanc inventionem nominarunt numerum aureum (auream prasin). Hec periodus composita est $6940^{dies} + 6^h$, quod facit 235 menses synodicos plus $7^h.5$, 254 menses draconicos plus $7\frac{2}{3}^h$, 252 menses anomalisticos minus $3^d\,18^h$, et 255 menses draconicos plus $21\frac{1}{2}^h$. — Calippus reddebat hanc periodum magis exactam, quum sumsit quatuor vicibus et unum diem subtraxit; igitur fuit hanc periodum

~~[illegible]~~ 27759^d, quod facit 76 annos julianos, 940 menses synodicos plus 6^h, 1016 menses periodicos plus $6\frac{2}{3}^h$, 1008 menses anomalisticos minus 16^d, et 1020 menses draconicos plus 2^d 13^h. — Maximus error est iste, qui respicit motum apsidum. —

Una antiquissimarum periodorum est nota sub nomine periodi Chaldaicae, $6585\frac{1}{3}^d$, vel 18 annorum julianorum 10 vel 11^d (quouti 5 aut 4 annos bissextiles continebat); Ptolemaeus nominabat hanc periodum tempus periodicum (χρονος περιοδικος. Almag. l. IV. c. 2. p. 216). — Haec periodus proprie continebat 6585^d 7^h 42' 35."50183, quod facit secundum observationes antiquiorum Astronomorum 223 menses synodicos, 239 menses anomalisticos, 242 menses draconicos et 241.03 menses periodicos; sed secundum exactas observationes hoc facit 223 menses synodicos, 239 menses anomalisticos minus 5^h 12', 242 menses draconicos minus 51' et 241 menses periodicos plus 18^h 41'. Ad exprimendam hanc periodum numero integro, haec periodus fuit triplicata et nominata evolutio (ἐξελιγμος ibidem). Probabiliter ex periodo chaldaica orta est illa Metonis. Quum nimirum post 18 annos, novilunia accidebant 11^d tardius, naturaliter erat, addere 12 novilunia seu annum lunarem 354^d quae cum istis 11 diebus formabant periodum 19 annorum. —

Hipparcho haec periodus non apparebat admodum exacta, qui, comparando suas observationes cum illis Chaldaeorum, invenit minimum numerum dierum, qui reducebat eclipses ad eosdem menses et motus (ἐν ἴσοις μησὶ καὶ ἐν ἴσαις κινήμασιν ibidem) esse 126007^d 1^h vel fere 345 annorum, et hoc tempus continere 4267 menses synodicos, 4573 menses anomalisticos, et 4612 menses periodicos minus $7\frac{1}{2}^d$. Ex hoc resultat longitudo mensis synodici, adoptata per Ptolemaeum $= \frac{126007\frac{1}{24}^d}{4267}$ vel 29^d 12^h 44' 3".26224 et longitudo mensis anomalistici $= \frac{126007\frac{1}{24}^d}{4573} =$ 27^d 13^h 18' 34."7168, quod non multum differt a modernis resultatis. — Post talem periodum, eclipses iterum sequuntur in iisdem intervallis, sed non erunt ejusdem naturae et magnitudinis, nec accidunt iisdem diebus anni. —

Hipparchus Chaldaicae periodo substituit alteram secundum proprias observationes, 5458 mensium synodicorum et 5923 mensium draconicorum, vel fere 441 annorum et 103 dierum in cujus fine eclipses reveniunt similis magnitudinis et durationis. — Ex hoc sequitur, menses synodicos et draconicos esse inter se uti 5923 ad 5458

(ratio haec perfecte exacta)

Motus diurni et horarii lunae, in longitudine, et respectu Solis, respectu apsidum et nodorum, ita uti eos Ptolemaeus invenit (Almag. l. IV. c. 3. p. 223) dant durationem mensis anomalistici $= 27^d\ 13^h\ 18'\ 40''.5$ et mensis draconici $= 27^d\ 5^h\ 5'\ 35''.75$. Prima est major $7''$ ultima solum $\frac{1}{7}''$ quam revera deberent esse.

Si non videmus ad eclipses, quae dependent a latitudine lunae, sed generatim ad novilunia et plenilunia, quae tantummodo dependent a synodica revolutione et anomalistica, etiam inveniri possent periodi breviores, quae non minus exacte essent. Quum v. c. numeri mensium synodicorum et anomalisticorum, elapsorum in 126007^d periodi Hipparchi nimirum 4267 et 4573, sunt divisibiles per 17, obtinemus pro syzigiis, quae sese succedunt in eodem ordine et fere in iisdem intervallis, periodum 17 vicibus breviorem, 7412.2 vel 20 annorum julianorum et 107^d, quae continet 251 menses synodicos, et 269 menses anomalisticos.

Menses anomalistici et draconici determinabuntur inferius, quum supponant cognitionem motuum apsidum et nodorum.

Mensis synodicus, inventus per comparationem observationum antiquissimarum et hodiernarum, dimidio minuto secundo est brevior, quam ille Ptolemaei: ex hoc concluderetur, quia ambo ex magno numero observationum conclusi sunt, mensem nunc esse breviorem, vel motum lunae celeriorem. Comparando antiquissimam observationem cum hodiernis, nos habebimus motum medium lunae in duabus epochis, si supponimus, illum intra hoc tempus nullas variationes subivisse. Sed si motus medius continuo acceleratus vel retardatus est, observatio instituta in medio hujus periodi, non concordabit cum calculo, qui institutus est cum suppositione motus invariabilis. Inquisitiones quas Astronomi instituerunt relate ad observationes decimi, decimi septimi et ad initium decimi octavi seculi probant sine exceptione, accelerationem motus medii lunae ita uti in quolibet seculo luna percurrat fere $9''$ plus quam in seculo immediate praecedenti. Haec ~~in~~ $9''$ quibus crescit motus medius lunae in 100 annis, vocantur aequatio secularis lunae, quae calculata est sequenti modo:

Supponamus inventum esse per observationes antiquissimas

mediam longitudinem mensis tum fuisse $= M$, et observationes modernas dare actualem longitudinem $= M'$; nominamus numerum mensium elapsorum in hoc intervallo n et faciamus $M - M' = N$. Invenitur est $N = 0''.5$ et intervallum inter Hipparchum et Mayer est 1900 ann. quod facit 23500 menses synodicos, hinc $n = 23500$. Naturalis est suppositio, accelerationem motus lunae, quum sit effectus vis constantis, quoque esse uniformem itaut quilibet mensis imminuatur eadem quantitate. Nominando hinc ω imminutionem cujuslibet mensis, habebimus $\omega = \frac{N}{n} = \frac{0''.5}{23500} = 0''.000021276$. Primus mensis erat M, hinc secundus $M - \omega$, tertius $M - 2\omega$, et n-simus mensis $= M - (n-1)\omega$. Luna igitur perficiebat n revolutiones tempore $M + (M - \omega) + (M - 2\omega) + \ldots \ldots + (M - (n-1)\omega) = nM - \omega(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)) = nM - \frac{n(n-1)}{2}\omega$; si motus lunae nulli variationi esset subjectus, tantum tempus nM requireretur. Igitur in fine n mensium luna descripsit, praeter n revolutiones integras, angulum φ qui respondit tempori $\frac{n(n-1)}{2}\omega$ vel fere $\frac{n^2}{2}\omega$. In centum annis n est $= 1237$, ex quo sequitur acceleratio saecularis lunae $= 0''.0000106383(1237)^2 = 16''.278$, in quibus luna percurrebat $9''$. Calculato ita motu medio in uno saeculo, simus lunam percurrere in saeculo sequenti $9''$ plus, et quam percurrebat in saeculo praecedenti $9''$ minus, in duobus saeculis $36''$ etc quia aequatio saecularis proportionalis est quadrato temporis n^2. Hoc aequatio $9''$ est conformis novis tabulis celeb. Mayer qui eam prius supponebat $7''$. Pro epocha ubi aequatio saecularis est nulla, assumtus est annus 1700. Motus medius igitur, deductus e tabulis celeb. Mayer est ipse decimi octavi saeculi, consequenter addi debent $9''$ pro 100 annis posterioribus post 1700, $36''$ pro 200 annis etc, et pro praecedentibus eadem quantitas debet subtrahi. Nominando μt, motum medium pro t annis, qui locum habebat anno 1700, et quem tabulae immediate dant, E longitudinem mediam lunae in eadem epocha, L, L' illas quae respondent epochae sequenti

$\left(\frac{t}{100}\right)^2$ aut praecedenti illi anni 1700^{mi} t annis, verus motus medius pro temporibus subsequentibus erit $= \mu t + \frac{t^2 . 9''}{10000}$ pro praecedentibus $= \mu t - \frac{t^2 . 9''}{10000}$; hinc erit $L = E + \left(\mu t + \frac{t^2 . 9''}{10000}\right)$ et $L' = E - \left(\mu t - \frac{t^2 . 9''}{10000}\right) = E - \mu t + \frac{t^2 . 9''}{10000}$ ex quo sequitur, aequationem secularem $\frac{t^2 . 9''}{10000}$ semper esse addendam et pro temporibus ellapsis, et pro temporibus futuris; quod quoque ex illo est evidens, quia $(-t)^2 = +t^2$. —

Haec aequatio per omnes observationes et antiquas et modernas est stabilita. Si calculentur observationes antiquae secundum tabulas celeb. Mayer, non applicando aequationem secularem inveniuntur errores semper positivi qui ascendunt ad 28'; sed applicando hanc aequationem, errores sunt modo positivi modo negativi, et semper infra 6', quod conforme est naturae errorum observationum. In Astronomia physica ostenditur, aequationem secularem esse unum effectum attractionis Solis. — Per theoriam hujus attractionis invenit Laplace valorem exactum aequationis secularis longitudinis mediae lunae esse, nominando i numerum saeculorum ellapsorum ab anno 1700

$$+10.''1816\,21268 . i^2 + 0.''0185384408 . i^3;$$

ultimus terminus est negativus pro saeculis ante 1700 $(-i)$.

Theoria attractionis etiam indicavit, apsides, seu anomaliam mediam et nodos esse subjectas aequationibus secularibus, et illas inveniri, multiplicando illam longitudinis per 4.00052 et per 0.735452. —

Dies semper erant ejusdem longitudinis, quod quoque videbitur in Astronomia physica; praeterea priscae nationes se serviebant magno numero differentium annorum: ex quo sequitur, periodum, expressam per numerum annorum et non dierum, non posse servire ad determinationem mensium, saltem si annus adhibitus in hac periodo non est satis notus; et hoc locum habet quoad periodum sexcentorum annorum, quam antiqui

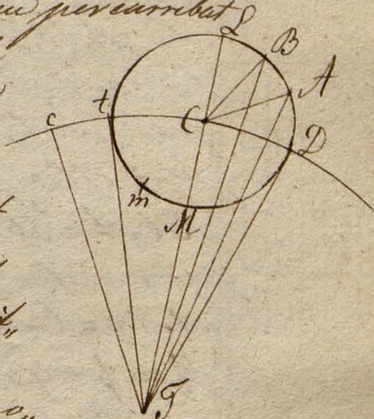
posuerunt ante diluvium. Statim videmus, hanc periodum continere 7421 menses synodicos. Sed assumendo pro basi longitudinem actualem anni et mensis, $365^d\ 5^h\ 48'\ 52''$ et $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''$, invenitur, 600 annos conficere $219145^d\ 8^h\ 40'$, et 7421 menses facere $219146^d\ 12^h\ 15'$. Talem errorem plus quam unius diei antiquiores non potuerunt committere, quum habuerunt jam cognitionem magis exactam aliarum periodorum, uti v.c. Chaldaicae. Supponere igitur debemus, illorum annum, vel illorum mensem vel unum et alterum fuisse differentes ab illis, qui nunc sunt in usu, vel istam periodum esse formatam ex praedilectione numeri 60. Nominando annum hujus antiqui temporis $= A$, mensem $= M$, numerum elapsorum annorum in hac periodo, $600 = n$, numerum mensium $7421 = m$ habemus aequationem $nA = mM$ ex qua $\frac{A}{M} = \frac{7421}{600} = 12.36833\ldots$ Haec ratio est major quam nunc est, ex quo sequitur annum hujus temporis fuisse majorem quam nunc.

Bailly (Histoire de l'Astron: ancienne l. 3. § 6.–10.) tentavit probare per comparationem plurium periodorum antiquarum, mensem tunc fuisse $29^d\ 12^h\ 44'\ 4''.5$ vel $1''.5$ majorem quam nunc, et periodum 600 annorum esse inventam 4600 annis ante Chr. n. Hinc 7421 menses, erunt aequales $219~~146~~144^d\ 15^h\ 26'\ 34''.5$, quod divisum 600, dabit longitudinem anni tropici $= 365^d\ 5^h\ 51'\ 36''$. Ex hoc sequeretur imminutio anni $3'\ 10''$ et mensis $1''.5$ in 6350 annis vel in 78550 mensibus, ex quo sequeretur imminutio cujuslibet mensis $= \frac{\not{4}''}{} = \frac{15''}{785500} = 0''.0000191 = \omega$, quod daret accelerationem secularem lunae $= \frac{\omega}{2}(1237)^2 = 14''.6$. In hoc tempore luna percurrit 8'', quae quantitas igitur esset aequatio secularis quae jacet in medio inter primas et ultimas tabulas Mayeri.

Apsides et excentricitas lunæ

Si aliquod corpus celeste est in sua linea apsidum, ejus motus
est in suo maximo vel minimo celeritatis, et medius motus est,
si elongatum est 90° a linea apsidum. — Huic proprietati
communi omnium orbitarum, innituntur methodi quæ serviunt
ad determinationem positionis apsidum, quia tunc differentia
inter maximam et minimam celeritatem dat maximam æqua-
tionem centri, seu excentricitatem, ita ut hæc elementa
simul sint determinata. Magnitudo diametri et parallaxis
lunæ est talis, ut ope illarum immediate determinare possi-
mus rationem quæ existit inter diversas distantias, sed
mensuratio exacta horum angulorum supponit methodos,
quæ ignotæ erant antiquis. — Horum observationes con-
cernebant tantummodo eclipses lunares, quarum magnitudo
illis serviebat ad determinationem loci nodi, positio apsidum
erat determinata per intervallum inter duas subsequentes
eclipses. —
Eclipsis aequaliter distans a præcedenti et subsequenti, de-
bebat cadere in apsides, quia luna unum mensem ante
et mensem post, habebat eandem celeritatem; erat igitur apo-
gæum aut perigæum, quando intervallum temporis erat maximum
vel minimum respectu aliorum intervallorum duarum eclipsium.
Quum hæc puncta maximæ et minimæ celeritatis, non respon-
debant semper iisdem regionibus cœli, sed progrediebantur secun-
dum ordinem signorum, antiqui notaverunt tempus, post quod
eclipses, separatæ a præcedenti et sequenti per intervalla maxima vel
minima, cadebant iterum in eadem puncta cœli; et hoc erat periodus,
in qua linea apsidum fecit unam integram revolutionem. Hac
ratione viderunt, hoc accidere post 223 plenilunia, et lunam per-
venisse 239 vicibus ad suam maximam vel minimam distantiam
hinc ad suum maxime vel minime rapidum motum, et consequen-
ter 223 menses synodicos esse æquales 239 mensibus anoma-
listicis. Hac ratione ortæ sunt istæ periodi, ope quarum Hip-
par

Hipparchus determinabat mensis tanta cum praecisione. — Per hoc quoq cognoverunt motum apsidum, et fere earum positionem ad datam epocham, sed non excentricitatem. — Ad hunc effectum, Ptolemaeus se serviebat epicyclo, qui hic propter motum lineae apsidum, magis commodus erat quam circulus excentricus. —



Sit terra T in centro circuli Cc, cujus peripheriam percurrebat motu uniformi centrum epicycli LBAM in mense periodico, contra ordinem signorum Cc, interea luna L, percurrit peripheriam epicycli uniformiter in directione opposita LADM. Supponamus, lunam fuisse in L in eodem momento quando centrum epicycli fuerit in C, et post aliquot dies, ultimum esse in c; dum locus medius lunae erit in radio Tc, et verus locus ab hoc differt quantitate, qua luna elongata est a recta TC, quae nunc habet positionem Tc; quum igitur verus motus lunae in apogaeo L sit lentior quam medius, et in perigaeo M celerior, ergo debet ire a L dextram versus, versus B et a M sinistram versus, versus m, hinc debet ire in peripheria epicycli contra ordinem signorum. Si ergo centrum epicycli est in C, et luna in B, locus medius et verus lunae erunt in rectis TC, TB, et CTB erit aequatio centri. — Si linea apsidum esset immobilis, mensis anomalisticus esset aequalis mensi sideriali aut periodico: et quo sequitur, quum centrum C descripserit mensem periodicum, lunam quoq debere esse in apogaeo L. Sed quia revolutio anomalistica diutius durat quam periodica, luna neque erit in L in fine mensis periodici. Generatim omnes anguli, quos luna in epicyclo circa C describit, sunt semper minores quam anguli quos C circa T describit: hinc si C venit in c et L in B, $LCB < CTc$ in ratione mensis periodici ad anomalisticum, vel aliis verbis CTc et LCB sunt motus medii periodici et anomalistici. Omnia igitur reducuntur ad determinationem rationis inter radios $CT = a$ et $CL = c$, vel excentricitatis $\frac{c}{a} = \gamma$, et situs et motus lineae apsidum, quae determinabitur per mediam anomaliam LCB. —

Ad hunc finem Ptolemaeus se serviebat tribus eclipsibus lunaribus, observatis Babylone annorum 720 et 719 ante Chr. n. pro quibus

dat sequentia data (Almag. l. IV c. 5)

	Longitudo lunae	Temp. intermed.	Motus verus	Motus medius	Motus anomal. med.
I	$5^s\ 24^\circ\ 30' =$ ☾	$354^d\ 2^h\ 34'$	$349^\circ\ 15' = \mathcal{E}$	$345^\circ\ 51' = \mathcal{L}$	$366^\circ\ 25' = M$
II	$5\ \ 13\ \ 45 =$ ☾'	$176^d\ 20^h\ 12'$	$169\ \ 30 = \mathcal{F}$	$170^\circ\ \ 7 = l$	$150^\circ\ \ 26 = m$
III	$11\ \ 3\ \ 15 =$ ☾''				

Si A, B, D, sunt loci lunae in his tribus eclipsibus, erit $BCD = m$ et minus quam 180°, et motus verus a B ad D aequalis $\mathcal{F}$ est minor quam motus medius l; hinc centrum C et perigaeum M, situata sunt extra segmentum BAD. Praeterea habemus $AMLB = M$ $BCA = 366 - M = 53^\circ 35'$, hinc $BCA < BCD$; ex quo fluit, A cadere inter B A D. Nosimus itaq $ACB = 53^\circ 35' = a$, $BCD = m = 150^\circ 26'$ $ATB = \mathcal{E} - \mathcal{L} = 3^\circ 24' = \lambda$, $BTD = l - \mathcal{F} = 37' = \mu$. Ponendo nunc $\frac{a}{c} = \frac{1}{\gamma} = q$, $BCL = x$, $BTL = y$, $CBT = x - y = z$, habemus in triangulis CTB, CTA et CTD
$\sin z = q \sin y$, $\sin CAT = q \sin CTA$, $\sin CDT = q \sin CTD$, sed habemus $CTA = \lambda + y$, $CTD = \mu + y$, $LCA = \alpha + x$, $LCD = m + x$ ponendo $\alpha - \lambda = n$, $m - \mu = \nu$, erit $CAT = LCA - CTA = n + z$, $CDT = LCD - CTD = \nu + z$, ex quo resultant sequentes aequationes
I. $\sin z = q \sin y$, II. $\sin(n+z) = q \sin(\lambda + y)$, III. $\sin(\nu + z) = q \sin(\mu + y)$
et substituendo I in II et III venit

$$\sin n \cos z + q \cos n \sin y = q \sin\lambda \cos y + q \cos\lambda \sin y \quad \text{et}$$

$$\sin\nu \cos z + q \cos\nu \sin y = q \sin\mu \cos y + q \cos\mu \sin y$$

Hae duae aequationes dant

$\gamma = \frac{\sin y}{\sin z}$

$$\gamma \sin n \sin\nu \cos z = \sin\nu(\sin\lambda \cos y + \cos\lambda \sin y - \cos n \sin y)$$
$$= \sin n(\sin\mu \cos y + \cos\mu \sin y - \cos\nu \sin y)$$

et ex hac aequatione invenitur

$$tg\, y = \frac{\sin n \sin\mu - \sin\lambda \sin\nu}{\cos\lambda \sin\nu - \sin n \cos\mu + \sin n \cos\nu - \cos n \sin\nu}$$

$$= \frac{\cos(n-\mu) - \cos(n+\mu) - \cos(\nu-\lambda) + \cos(\nu+\lambda)}{\sin(\nu+\lambda) + \sin(\nu-\lambda) - \sin(n+\mu) - \sin(n-\mu) - 2\sin(\nu-n)}$$

Invento hac ratione valore quantitatis y, aequationes I et II dant

$$q = \frac{\sin z}{\sin y} = \frac{\sin n \cos z + \cos n \sin z}{\sin(\lambda + y)} \quad \text{hinc}$$

$$tg\, z = \frac{\sin n \sin y}{\sin(\lambda+y) - \cos n \sin y} = \frac{tg\, n}{\frac{\sin(\lambda+y)}{\cos n \sin y} - 1}$$

per quod dein $x = y + z$ et $f = \frac{\sin y}{\sin z}$. —
In praecedenti exemplo habemus $\lambda = 3° 24'$, $\mu = 37'$, $n = 50° 11'$, $v = 149° 49'$
hinc $tg\, y = 0.017212$, $y = 59' 10''$; $tg\, z = 0.2019487$, $z = 11° 25' 2''$
$x = 12° 24' 12''$ (vel secundum Ptolemaeum $12° 24'$) ex quo sequitur
excentricitas $f = 0.0869405 = \sin(4° 59' 15''.5)$. – secundum Ptole-
maeum $f = 0.0869444$. — Maxima aequatio centri hinc est
$= 4° 59' 15''.5$ vel fere $5°$. – Ptolemaeus invenit ope trium ecli-
psium, quas ipse observavit $f = 0.08~~7~~2222$, hinc maximam
aequationem centri $5° 0' 14''$. Assumendo medium plurium alia-
rum observationum, ille hanc invenit $5° 1'$ (Almag. l. IV c. 10)
Interea nos scimus aequationem centri esse $6° 18'$, et forsitan
quilibet stupefiet de magnitudine hujus erroris, sed videbimus
in subsequentibus, illos $5°$ esse effectum collectum duarum aequa-
tionum, et Ptolemaeum dedisse unam et alteram harum aequati- —
Aequatio $LTB = y$ est angulus quo media longitudo lunae in me-
dio secundae eclipsis superabat longitudinem veram $B = ☾$.
Sed invenimus $☾ = 5^s 13° 45'$ et $y = 59'$, hinc erit media longi-
tudo seu epocha $= 5^s 14° 44'$. — Anomalia media erat $LCB = x = 12° 24'$
ex qua deducitur longitudo apogei $= 5^s 2° 20'$. —
Per eundem calculum concludit Ptolemaeus ex tribus obser-
vationibus, quas ipse instituit, longitudinem veram lunae
in secunda eclipsi $☾ = 0^s 25° 10'$, aequationem centri $y = 4° 20'$,
anomaliam mediam $x = 64° 38'$ et intervallum inter hanc eclip-
sin et praecedentem $= 311783^d 23^h 20'$. Hinc erat tum media
longitudo $L = ☾ + y = 29° 30'$, et longitudo apogei $= L - x = 10^s 24° 52'$.
Motus medius lunae in hoc intervallo, hinc erat in longitudine
$= 11420$ circul. $+ 224° 46'$, ille anomaliae $= 11315$ circul. $+ 52° 14'$ et ille
apogei $= 96$ circulis $+ 172° 32'$, ex quo deducitur motus medius diur-
nus lunae

in longitudine =	13°	10'	34''	58'''	33^IV	30^V	30^VI
anomaliae =	13	3	53	56	17	51	59
apogei =	0	6	41	2	15	38	31

ex quo dein venit mensis synodicus $= 29^d 12^h 44' 3''.26224$
uti prius; mensis anomalisticus $= 27\ 13\ 18\ 34.9488$
et duratio unius revolutionis apsidum $= 3231^d 14^h 47' 56''.3124$

Novæ methodi ad determinationem parallaxis per observationes, uti et inventio lentium achromat., et micrometrorum, suppeditarunt medium inveniendi positionem apsidum, vel saltem earum motum, per epochas, ubi diameter lunæ, cujus totalis variatio est 4', habet suum maximum et minimum valorem. Quum autem et in apsidibus luna suam distantiam et magnitudinem tantummodo insensibiliter mutat, eligi debent puncta mediæ distantiæ, ubi luna illam rapidissime mutat. Inventa diametro apparente in diebus punctis oppositis orbitæ ejusdem magnitudinis, medium inter hæc puncta debet longitudinem apsidum pro epocha media inter duas observationes. —

Sequenti modo possunt apsides et excentricitas simul invenire. Sit ABP orbita elliptica lunæ, T terra, AP linea apsidum, et B, L duo loci veri lunæ (longitud.), hinc APB, APL vel AB, AL veræ anomaliæ. Si nunc habemus magnum numerum talium observationum, et ex eis eligimus epocham B, a qua omnes ulteræ longitudines numerantur, pro qualibet observatione L simus motum verum $BL = l$ per observationem et motum medium ~~B~~ $BM = m$ per tempus elapsum hinc $LM = m - l$. Sint $Bb = f$, $Ll = g$ aequationes centri, quæ conveniunt anomaliis veris, AB, AL; hinc erunt b et l loci medii (med. longitud.) et motus medius $bl = m = BM$, ex quo sequitur $Ml = Bb$ vel $Ll - LM = g - m + l = f$ ~~f~~ et $g - f = m - l$. —

Si nunc semper aliæ observationes comparantur cum B, f manet invariata, sed differentia motus medii et veri $m - l$ crescit cum g. Maximum hujus differentiæ erit in puncto L maximæ aequationis, et in aequatione $g - f = m - l$, g est maxima aequatio, sed f incognitum. Comparando B eadem ratione cum observationibus aliis, v.c. in D quæ 14 diebus elongatæ sunt ab L, notus est ex observationibus et tempore elapso motus verus et medius $BPD = \lambda$, $BPE = \mu$, $ED = \lambda - \mu$. —

Nominando aequationem $Dd = h$ quæ respondet anomaliæ AD, motus medius etiam est bPd; ex quo sequitur $bd = \mu = BE$, $Ed = Bb = f$, vel $\lambda - \mu - h = f$, hinc $h + f = \lambda - \mu$. — Si igitur

quaeritur etiam in parte D observatio quae dat differentiam motus veri et medii $\lambda-\mu$ maximam, etiam h erit aequatio maxima; hinc $h=g$ et $g+f=\lambda-\mu$

Addendo hanc aequationem praecedenti $g-f=m-l$ habebimus

$$g = \frac{\lambda-l}{2} - \frac{\mu-m}{2}$$

Hac ratione invenitur ope observationum institutarum in distantiis mediis, maxima aequatio quam exactissime, quia in his punctis illa se insensibiliter mutat. —

Si in intervallo inter observationes L et D, apogaeum ab A ad α est promotum, dein erit in α in medio hujus intervalli, h.e. est $A\alpha = a\alpha$, si motus apsidum durante hoc tempore supponitur uniformis. Sed quum sint L. D puncta maximae aequationis, habemus quoque $AL = aD$, ex quo sequitur $\alpha L = \alpha D$: aliis verbis, medium α inter duas longitudines observatas L. D. est longitudo apogaei pro epocha media. Sed quum aequatio in his punctis insensibiliter se mutet, potest esse differentia considerabilis inter AL et aD, etiamsi error sit insensibilis relative ad g vel h, ita ut haec determinatio apsidum non esset admodum secura. —— Quum autem epocha B sit arbitraria, possumus assumere pro epocha observationem institutam in apsidibus ipsis, quae fere jam sunt notae, ubi dein fit $f=0$, et $m-l=g=h=\lambda-\mu$. Mutabimus igitur epocham B tamdiu, donec maximae differentiae motus veri et medii inter omnes alias observationes, $m-l$ et $\lambda-\mu$ deveniant aequales et oppositae naturae. Dein est simul longitudo observata B, longitudo apsidum et longitudo media lunae, hinc epocha. Saltem inveniemus tales observationes duas, ut $m-l$ sit $> \lambda-\mu$, si B assumitur pro epocha, et $m-l < \lambda-\mu$, si b est epocha: dein cadit linea apsidum inter B et b; et si habemus multas observationes inter B et b, haec duo puncta, unum alteri, semper magis appropinquari possunt ita, ut dein facile per interpolationem veritabilis positio apsidum determinari possit. —

Hac ratione omnia elementa elliptica sunt determinata, et clarum est, B. L. D debere necessario esse longitudines in orbita; sed quum observationes tantummodo dent longitudines in ecliptica, illa ex his deduci debent, ad quem finem necessaria est cognitio nodorum et inclinatio lunae, quae cognitio apud lunam, uti videbimus, non magnis cum difficultatibus est connexa. —

Si hac ratione determinata est positio apsidum pro differentibus epochis, statim videbimus, illas habere motum rapidum secundum ordinem signorum. Secundum novissimas tabulas celeb. Bürg, motus anomalisticus lunae in 365 diebus ~~xxxx xxxx~~ est = 4768° 43' 19."086 quod dat pro 36525 diebus = 1325 circulos + 198° 49' 17."75. Subtrahendo hoc a motu seculari lunae in longitudine erit = 1336 circul. 10^s 7° 52' 43."5 venit motus secularis apsidum in longitudine = 4069° 3' 25."75 et motus sideralis = 4067° 39' 55."75. Apsides igitur faciunt unam revolutionem respectu punctorum aequinoctialium in

$$\frac{1296000''.36525^d}{14648605.75''} = 3231^d.4611238683927 = 3231^d\ 11^h\ 4'\ 1''.10222913$$

et unam revolutionem sideralem in

$3232^d.5667067025921 = 3232^d\ 13^h\ 36'\ 2''.9107 04$ ex quo concluditur longitudo <u>mensis anomalistici</u>

$= 27^d.5545525363815 = 27^d\ 13^h\ 18'\ 33''.3391433616.$ —

<u>Epocha</u> seu longitudo media perigaei est, secundum easdem tabulas pro initio praesentis seculi, h. e. pro media nocte Paris. per quam incipit 1. Januarii anni 1801, $= 8^s\ 26°\ 6'\ 36''.4$

Medii motus adoptati per Ptolemaeum (Almag. l. IV c. 3) dant longitudinem mensis anomalistici 7" majorem. —

Hic motus uniformis seu medius apsidum combinatus est cum alio motu admodum difformi quem primus Ptolemaeus detexit, et de quo statim agemus. Necessarium igitur est ex hac ratione ad determinationem motus medii, assumere observationes admodum elongatas unam ab altera, ut in hoc longo intervallo, inaequalitates periodicae se compensent vel saltem sint insensibiles. —

<u>Aequatio longitudinis lunae</u>

Aequatio 5° per Hipparchum et Ptolemaeum inventa est per

solas

solas eclipses lunae; illae igitur tantummodo indicabat inaequa-
litates, quas habuit luna in syzygiis, si simul ejus aequatio centri
erat in suo maximo, h.e. si lineae apsidum et syzygiarum erant per-
pendiculares una in alteram. Ptolemaeus erat primus qui ob-
servavit lunam extra syzygias ope instrumenti quod ipse ex-
cogitavit ad hunc finem (Almg. l. IV. c. 1.) et hae observationes ei
ostenderunt, maximam aequationem 5°, applicatam secundum
theoriam epicyclorum, non satis facere observationibus extra sy-
zygias; errorem hujus calculi, qui potuit spectari qua secunda
aequatio connexa cum priori 5°, crescere in ratione majoris elon-
gationis lunae a syzygiis, et esse maximum in illis quadraturis
ubi prima aequatio erat maxima vel ubi luna 90° ab apsi-
dibus erat elongata, et hinc coincidebant apsides et syzygiae;
sed in illis quadraturis, ubi luna simul erat in apsidibus,
hinc prima aequatio = 0 erat, secundam quoque evanuisse vel
calculum secundum primam aequationem concordasse cum
observationibus, ita bene uti in syzygiis, ex quo sequitur
aequationem 5° fuisse generatim conformem observationibus,
si lineae apsidum et syzygiarum erant perpendiculares
una ad alteram. (Almag. l. V. c. 2). — Hae circumstantiae per-
fecte concordant cum hodierna theoria secundum quam haec se-
cunda aequatio est functio $\sin(\mu - 2\eta)$, ubi μ est anomalia
media, et η elongatio lunae a Sole. In quadraturis η est
90° vel 270°, hinc $2\eta = 180°$ et $\sin(\mu - 2\eta) = -\sin\mu$, quod est zero,
si $\mu = 0$ vel $\mu = 180°$, sed maximum si $\mu = 90°$ vel $\mu = 270°$. —
Ptolemaeus invenit sequenti modo, hanc secundam inaequalita-
tem esse 2° 40'. Una observatio (Almag. l. V. c. 3.) illi dedit lon-
gitudinem veram Solis $= 10^s\ 18°\ 50'$ illam lunae $7^s\ 9°\ 40' = ☾$
Ex notis mediis motibus calculavit pro hac epocha longitudi-
nem mediam Solis $= 10^s\ 16°\ 27' = M$ et lunae $= 7^s\ 17°\ 20' = L$,
et anomaliam mediam lunae $= 87°\ 19' = \mu$, hinc prima aequatio
$= -4°\ 58'$. Summa ambarum aequationum autem erat
$☾ - L = -7°\ 40'$, hinc secunda aequatio $= -2°\ 42'$, quod erat ejus ma-
ximum, quia $M - L = 89°\ 7' = -\eta$, hinc luna erat in sua ultima

quadr-

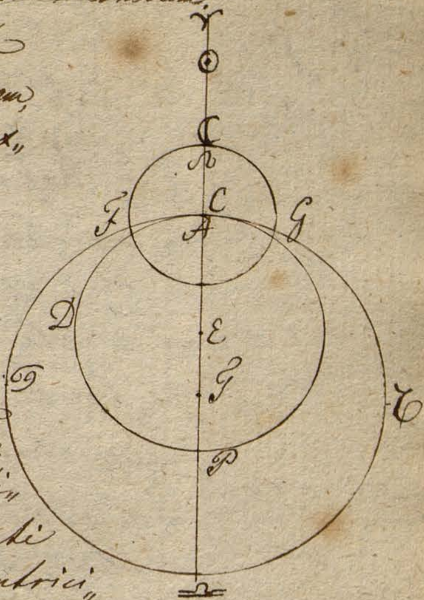
quadratura: tiam erat $\mu - 2\eta = 265°33'$, hinc $\sin(\mu - 2\eta)$ fere $= -1$.
Sumendo medium plurium similium observationum Ptolemaeus invenit maximum $= 2°40'$

Prima aequatio igitur erat minimum $= 5°$ in syzygiis et ascendebat ad $7°40'$ in duabus quadraturis. Debebant igitur concludere, caussam quae auxit primam aequationem in quadraturis, quoque debuisse illam imminuere in syzygiis, et hinc illam habere veritabilem valorem inter hos duos aspectus, h. e. in octantibus. Ex hoc sequitur, secundam aequationem habere suum maximum valorem positivum, si lineae syzygiarum coincidunt cum linea apsidum et suum maximum valorem negativum, si lineae syzygiarum et apsidum sunt perpendiculares una in alteram, et esse nullam, si hae duae lineae faciunt angulum 45°. Nominando hinc primam aequationem g, et secundam h, habemus $g + h = 7°40'$ $g - h = 5°$, hinc $g = 6°20'$, $h = 1°20'$. Ptolemaeus invenit idem resultatum sequenti modo.

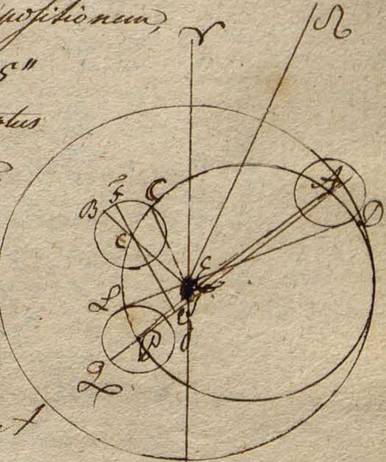
Prima aequatio semper est maximum, si anomalia est $\pm 90°$ vel si recta, quae conjungit terram et lunam Tt (fig. praeced.), est tangens ad epicyclum. Haec aequatio $CTt = g$ est autem propter secundam aequationem invariabilis a $5°$ ad $7°40'$, hinc sequitur, nominando radium epicycli $Ct = c$, et radium circuli deferentis $TC = a$, hinc $\sin g = \frac{c}{a}$, radium a esse variabilem, quia secundum hypothesin epicycli c est constans: aliis verbis, terra non est in centro deferentis, vel centrum C epicycli describit peripheriam circuli excentrici. —

Ita explicatur prima inaequalitas per epicyclum, secunda per circulum excentricum. Si luna 90° distat ab apsidibus et syzygiis aequatio g est maximum, hinc a minimum, vel centrum epicycli est in perigeo circuli excentrici, sed si luna est in syzygiis, g est minimum, a maximum, et C in apogeo: ex quo sequitur epicyclum C progredi a perigeo ad apogeum in quarta parte mensis et facere unam revolutionem in semi-mense synodico. Supponamus igitur C fuisse in apogeo excentrici, et lunam simul fuisse in conjunctione cum Sole et in linea epicycli LiMS: his positis, in fine semi-mensis synodici, epicyclus C erit iterum in apogeo, luna in oppositione cum Sole, et progressa fere 13° ultra lineam apsidum epicycli, propter

differentiam motus anomalistici et synodici. Ad explicanda omnes has inaequalitates lunae, Ptolemaeus adhibuit sequentem methodum.



Sit T terra, ♈T♎ linea aequinoctiorum supposita immobilis, et A♋♎♑ circulus concentricus ad eclipticam, cujus centrum est in T. Sit in TA centrum circuli excentrici in E, A et P sunt apogeum et perigeum circuli excentrici, in cujus peripheria centrum C epicycli CFG facit unam revolutionem secundum directionem CD in uno mense periodico, interea luna percurrit, in uno mense anomalistico peripheriam epicycli secundum directionem CG. Supponamus, ab initio epochae, apogeum A vel centrum circuli excentrici, centrum C epicycli, nodum ascendentem, lunam et solem esse omnes in linea T♈, hinc lunam in conjunctione, in nodo ascendenti et in apogeo, et maximam aequationem g seu excentricitatem $\frac{c}{a}$ esse <u>minimum</u> = 5°, et longitudines Solis et lunae = 0.



Supponamus post 24 horas omnia haec acquisivisse positionem, quam repraesentat figura. His positis, ♈TC $= \alpha = 13°10'35''$ erit motus medius periodicus lunae, BCC $= \beta = 13°3'54''$, motus anomalisticus, et ♈T☊ motus retrogradus nodorum, qui est 3'11'' per diem, uti inferius videbimus. Vidimus epicyclum C facere in mense synodico duas revolutiones in peripheria excentrici ALP, et hinc esse elongationem ab A duplo motus synodici, ATC $= \delta = 24°22'53''$: motus retrogradus apogei et excentrici circuli erit igitur $= \delta - \alpha = 11°12'18''$.

In quadraturis, C est in perigeo P, et maxima aequatio LTP devenit <u>maximum</u> = 7°40'; sed si luna eodem tempore est in linea apsidum TPL, tota aequatio g erit nulla quaecunque sit distantia CT. In syzygiis C est in apogeo: aequatio g devenit <u>minimum</u> = 5° = ATB et excentricitas $\frac{AB}{AT} = \text{Sin}\,5° = 0.0869405 = \gamma$, sed in P excentricitas est $\frac{LP}{TP} = \text{Sin}\,7°40' = 0.1334096 = \lambda$. Nominando igitur radium

$\frac{AD}{AT}=\gamma$ excentrici $AE=BE=a$, radium epicycli $LB=AD=CC=c$ et $ET=e$ habebimus $c=(a+e)\gamma=(a-e)\lambda$, ex quo

$\frac{e}{a}=\frac{\lambda-\gamma}{\lambda+\gamma}=0.2108875$ et $a+e=\frac{2\lambda a}{\lambda+\gamma}$, hinc

$\frac{c}{a}=\frac{2\gamma\lambda}{\lambda+\gamma}=0.1652751$ (Almag. l. V. c. 4.)

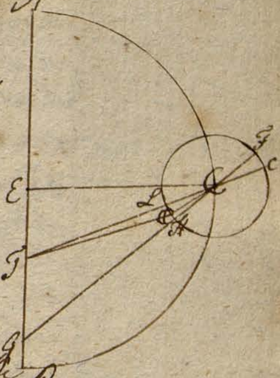
Quum secunda inaequalitas sit maxima in A et B, positiva in B, negativa in A, illa erit nulla 90° ab A et B, si luna est in octantibus, et tunc invenitur sola inaequalitas prima g. Erecto igitur perpendiculo TC in AB, habebimus $\sin g = \frac{c}{TC}$ et $TC^2=AT\cdot BT=(a+e)(a-e)$, vel $\frac{TC}{a}=\sqrt{(1+\frac{e}{a})(1-\frac{e}{a})}$ $=0.97751$; hinc $g=6°11'$, quae est aequatio centri in octantibus. Medius valor inter maximam et minimam aequationem centri autem erit (max. 7°40' min. 5)

$g=6°20'$

Haec est vera aequatio centri, seu prima inaequalitas lunae; haec est secundum Ptolemaeum $=6°20'$ secundum Mayer $=6°18'33''$. Haec inaequalitas mutatur per secundam inaequalitatem quam hodierni Astronomi appellant evectionem, a 5° usq. 7°40'; evectio hinc est secundum Ptolemaeum $=1°20'$, secundum Mayer $=1°20'34''$. Stupenda est ista magna praecisio qua determinavit Ptolemaeus has duas inaequalitates principales lunae. Secundum hodiernas disquisitiones evectio est fere $=+80'\sin(\mu-2\eta)$, aequatio centri $=-6°19'\sin\mu$. In syzigiis habemus $2\eta=0$, in quadraturis $2\eta=180°$. Antiqui, qui tantummodo observarant eclipses seu syzigias, debebant invenire aequationem lunae $=-6°19'\sin\mu+80'\sin\mu=-5°\sin\mu$, ex quo sequitur maxima aequatio $=5°$. Quum Ptolemaeus assumsit hunc valorem pro basi suarum observationum lunae in quadraturis ubi aequatio est $=-6°19'\sin\mu-80'\sin\mu=-7°40'\sin\mu$, ille invenit secundam aequationem seu evectionem $=7°40'-5°=2°40'$.

Ope harum duarum aequationum Ptolemaeus eo pervenit ut observationes cum sua theoria ita bene in quadraturis uti in syzigiis concordarent, sed in ceteris quadraturis, praecipue in octantibus, quum luna est eodem tempore in apsidibus, invenit adhuc

considerabilem differentiam. Quum examinavit magna cum cura hanc novam inaequalitatem, credidit huic satisfacere posse per sequentem hypothesin. Nempe assumsit centrum epicycli C circa terram T, et lunam in epicyclo ab apogeo B retro secundum $B\mathbb{C}$ uniformiter moveri. His assumtis Ptolemaeus ad huc supposuit, punctum B, quod est verum apogaeum, si C coincidit cum apogeo A excentrici, habere etiam motum retrogradum secundum T ita, ut recta TC a qua luna se elongat, modo uniformi, non transeat amplius per T, sed per punctum G, ita elongatum a T uti T a centro E. Ptolemaeus fundavit hanc hypothesin in una observationum Hipparchi,



quae dedit longitudines veras: Solis $= 1^s\,7°\,45'$, lunae $= 11^s\,21°\,18' = \mathbb{C}$, medias longitudines: Solis $= 1^s\,6°\,41' = M$, lunae $= 1^s\,22°\,13' = L$, et anomaliam mediam lunae $= 185°\,30' = \mu$. Medius locus lunae hinc erat in TC et luna in $\mathbb{C}$, si sumitur $CT\mathbb{C} = L - \mathbb{C} = 45'$. Quum autem centrum C se elongat ab A cum celeritate dupplo majori quam motus synodicus (uti habuimus ab initio hujus capitis), habemus $ATC = 360° - 2(L - M) = 88°\,56'$ et secundum ultimam hypothesin, $TcA\mathbb{C} = \mu$, hinc $GC\mathbb{C} = \mu - 180° = 5°\,30'$. Notis in triangulo CTE, $CE = a$, $TE = e$, $CTE = 88°\,56'$ invenitur $TC = a.0.9814439$.

Deinde habemus in triangulo $CT\mathbb{C}$, CT, $C\mathbb{C} = c$, $CT\mathbb{C} = 45'$, ex quibus dein $TC\mathbb{C} = 6°\,16'$, vel secundum Ptolemaeum $6°\,21'$. Notis nunc in triangulo TCG, $TCG = TC\mathbb{C} + GC\mathbb{C} = 11°\,46'$; $CTG = 180° - CTA = 91°\,4'$ et TC invenitur $TG = a.0.20527$, quod tantum parva quantitate differt ab $ET = e$ (ab initio hujus cap.). Aliae observationes illi dederunt idem resultatum. (Almag. l. V. c. 5.)

Ex hoc sequitur, verum motum apsidum circa T non esse uniformem, sed necessariam esse correctionem aequalem angulo LCA. — Revera, si nominamus longitudinem mediam lunae A, ejus anomaliam mediam B, longitudinem veram apogaei C, nos habemus $B = A - C$, vel $C = A - B$, hinc motus apogaei $= A - B = \Upsilon TC - BC\mathbb{C}$ (ab initio) (non ultima sed immediate praecedens figura) et correctio apsidum $= (\Upsilon TC - TC\mathbb{C}) - (\Upsilon TC - BC\mathbb{C}) = BC\mathbb{C} - TC\mathbb{C} = BCT = TCG$ vel $= LCA$ (in ultima fig.). Hic angulus devenit <u>maximum</u>, si CT est perpendicularis ad AT h.e. in octantibus, quia ATC est dupplum distantiae lunae a syzigiis. ——

Dein est Sin. $LCA = \frac{FG}{CG}$ et $CG = CE$, hinc Sin. $LCA = \frac{e}{a}$ et $LCA = 12^\circ 11'$; hoc perfecte concordat cum hodierna theoria. —

Secundum Ptolemaeum, haec correctio apsidum modo positiva modo negativa, ascendit ad $13^\circ 9'$. Quum Ptolemaeus ad has observationes adhibuit tantum tales octantes, ubi luna simul in apsidibus et hinc dupplex distantia Solis ab apsidibus lunae aequalis erat 90°, argumentum hujus correctionis potuit esse dupplex distantia Solis a luna vel ab ejus apsidibus. Ptolemaeus elegit primum; sed theoria et hodiernae observationes dederunt resultatum, aequationem apsidum dependere a duppla distantia Solis ab apogeo lunae, et ejus maximum valorem esse a 12° usq. 13°. Ptolemaeus hinc determinavit hanc correctionem magna cum precisione, sed non dedit justam ejus explicationem. Nominavit hanc correctionem modo positivam modo negativam apogaei excentrici, εκ κεντρου προσθαφαιρεσις απογειου (Almag. l. V. c. 7; colonne 3. de la table pag. 317). Multi Astronomi errant, qui credunt hanc detectionem esse factam in saeculo 17 per mensurationem diametri lunae. —

Lalande in sua Astronomia T. II § 1431 pag. 162 edit. 3. ita dicit: „C'est en observant ainsi les diametres de la lune „que Horoccius vers l'an 1638 trouva qu'il fallait admettre „un balancement de l'apogée et un changement d'excentricité pour expliquer la seconde équation trouvée par Ptolomée. —

et § 1437 pag. 165

„Horoccius dut en effet être conduit à cette hypothèse par „l'observation des diametres de la lune qui pouvaient servir à „faire connaitre le lieu de l'apogée; il dut s'appercevoir par „leurs moyen que l'apogée de la lune se trouvait dans un „lieu du ciel plus avancé de 25° environ lorsque la distance „du soleil à l'apogée de la lune etait à peu-près de 45° ou „de 225° que lorsqu'elle etait de 135° et de 315° de sorte que „le mouvement de l'apogée n'etait point uniforme mais „sujet à un balancement annuel de plus de 12°, ce changement de l'apogée etant une fois reconnu, sa liaison „avec le changement de l'excentricité etait aisée appercevoir. Les tables de Flamsteed ont cette theorie d'Horoccius etc.")

Astronomi hodierni invenerunt per disquisitiones admodum exactas, primas duas inaequalitates lunae fere easdem uti Ptolemaeus; et parva differentia, magis est resultatum theoriae quam observationum. Aequatio ellipsica seu centri est, secundum tabulas celeb. Bürg, 6°18'28". evectio 1°20'30" hinc maximus valor ambarum inaequalitatum simul est 7°39'*" uno minuto primo minor quam secundum Ptolemaeum. — Aequatio 6°18'28" dat excentricitatem $\gamma = 0.0550266.$ —

His temporibus exacta mensuratio diametri lunae cum micrometris servivit ad determinationem magna cum praecisione veri loci et veri motus apsidum lunae; et ejus comparatio cum motu medio, qui jam exacte est notus indicabat modo admodum simplici, verum locum apsidum plus vel minus, et in maximo 12°18' distare a medio loco. Hac differentia est nulla, si Sol est in linea apsidum lunae, vel si ab iis est elongata 90°; et est maximum, si Sol ab apsidibus est elongatus 45°. Quum hoc quatuor modis accidere potest, observatum est, correctionem esse positivam hoc est apogeum verum distare 12°18' a loco medio, si longitudo Solis est major 45° vel 225° quam illa apogei lunae, sed hanc correctionem esse negativam, si haec differentia est 135° vel 315°. — Videmus hoc perfecte concordare cum hypothesi Ptolemaei secundum quam verus et medius locus apogei sunt in lineis Hc et GCF (vid. fig.); locus verus tunc est post medium, uti in figura, in ultimo semicirculo RAh.e. in secundo et ultimo quadrante distantiae Solis ab apogeo lunae quia motus epicycli C in peripheria excentrici est duplum motus synodici, in altero semicirculo h.e. in primo et tertio quadrante hujus distantiae, verus locus est ante medium. Facile quoque videmus hanc correctionem

intueri

intime esse connexam cum evectione. Ex praecedentibus sequitur, unum et alterum dependere a distantia solis ab apogeo lunae sequenti ratione. Nominando hanc distantiam $= \alpha$, apogeum lunae $= A$, ejus correctionem $= B$, correctionem aequationis centri $= E$, vidimus, esse, si α est 0 vel 180°, B zerum et E <u>maximum</u> positivum; si α est 90° vel 270°, B esse zerum et E <u>maximum</u> negativum, si α est 45° vel 225°, B <u>maximum</u> positivum et E zerum; si tandem α est 135° vel 315°, B esse <u>maximum</u> negativum et E zerum, ita ut hoc praesentat sequens tabula, in qua <u>maximum</u> positivum et negativum est designatum per $+M$ et $-M$. —

α	B	E	α	
0	0	$+M$	180°	
45°	$+M$	0	225°	
90°	0	$-M$	270	
135	$-M$	0	315	

Non inutile erit notare, nos non debere confundere evectionem in sensu Ptolemaei, qui eam spectavit uti correctionem maximae aequationis, cum evectione modernorum, qui eam spectant uti aequationem particularem longitudinis, vel uti correctionem generalem aequationis centri. In primo sensu, illa est <u>maximum</u> qualibet vice, quando α devenit $= n.90$, ubi n est quicunque numerus integer, in secundo sensu illa non potest habere effectum, si aequatio centri, ad cujus correctionem illa est destinata, ipsa est nulla, vel si luna est in apsidibus: hinc clarum est, evectionem debere dependere non solum ab α, sed etiam ab anomalia. Ad hunc sermo erit. —

Aequationes B et E sunt functiones α, quae pro α et $180°+\alpha$ eosdem valores habent; ex quo sequitur, has quantitates esse functiones $\sin 2\alpha$, quia $\sin 2\alpha = \sin 2(180°+\alpha)$. — Maximus valor ipsius B est 12°18' vel 12°11'; ex quo

$$\sin B = \frac{e}{a} = \frac{1-f}{1+f} = \frac{\sin 7°40' - \sin 5°}{\sin 7°40' + \sin 5°} = \frac{tg\frac{1}{2}(7°40'-5°)}{tg\frac{1}{2}(7°40'+5°)}$$

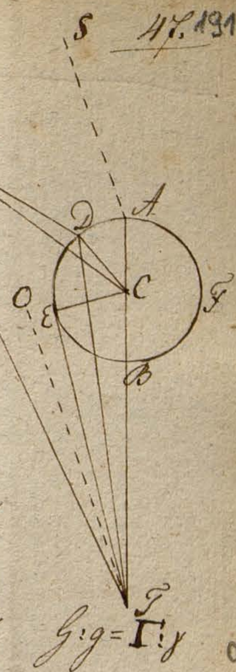
vel nominando aequationem centri $6°20' = g$, et evectionem $1°20' = h$,

$$\sin B = \frac{tg\, h}{tg\, g} \text{ vel approximative } \sin B = \frac{h}{g}$$

ex quo clare apparet intima connexio, quae existit inter evectionem et aequationem apsidum. Revera, ad explicandam hanc ultimam secundum methodum Ptolemaei per motum circularem, sit T terra et focus seu punctum excentricum orbitae lunaris, C ejus

centro

centrum, SA positio media apogei, et SK excentricitas media $\gamma = 0.0550266$. Supponamus verum centrum orbitae non esse in C, sed describere circulum $AEBF$ circa C, ita ut aequatio B sit maximum, si centrum est in E vel F, ubi SE, SF sunt tangentes circuli EF. His positis, habemus $B = CSE$, hinc $\text{Sin}\, B = \frac{CE}{CS} = \frac{h}{g}$ et $CE = \frac{h}{g}\gamma$. — Spectando evectionem h singuli, iterati correctionem maximae aequationis g vel excentricitatis γ, et nominando maximum valorem hujus aequationis $7°40' = G$, habebimus $G = g + h$, hinc $CE = \left(\frac{G}{g} - 1\right)\gamma$. Quum autem aequatio centri sit fere in ratione excentricitatis, sit Γ maximus valor excentricitatis modificatae per evectionem: dein nos habebimus $CE = \left(\frac{\Gamma}{\gamma} - 1\right)\gamma = \Gamma - \gamma = SA - SK = CA$. Radius CA circuli quem describit centrum orbitae lunaris, hinc est aequalis maximae variationi excentricitatis seu aequationis centri, vel potius, ille se habet ad mediam excentricitatem $SK = 0.0550266$ ut evectio $1°20'$ ad aequationem centri $6°20'$. Haec omnia sunt ut videmus, faciles consequentiae detectionum Ptolemaei. —



Secundum hanc hypothesin est $CSE = B = 12°18'$, $CS = \gamma = 0.055026$ et $CE = CA = \gamma\, \text{Sin}\, 12°18' = 0.0117221 = \delta$. —

Si centrum orbitae est in alio puncto D, aequatio apsidum $ASD = B$, dependet ab angulo ACD, et nos habemus $\text{tg}\, B = \frac{\delta\, \text{Sin}\, ACD}{\gamma + \delta\, \text{Cos}\, ACD}$. Haec aequatio est nulla si $ACD = 0$ vel $180°$; devenit autem maximum, si $\text{Cos}\, ACD = -\frac{\delta}{\gamma} = \text{Cos}\, 77°42'$; ex quo sequitur $ACD = 180° \pm 77°42'$, $ACD = 102°18'$. — pro B maximo valore positivo, et $ACD = 257°42'$ pro ejus valore maximo negativo. Comparando hoc resultatum cum praecedenti tabula, videmus, debere generatim poni $ACD = 2\alpha$, ex quo dein venit $\text{tg}\, B = \frac{\delta\, \text{Sin}\, 2\alpha}{\gamma + \delta\, \text{Cos}\, 2\alpha}$ et $SD = \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 + 2\gamma\delta\, \text{Cos}\, 2\alpha)} = \frac{\delta\, \text{Sin}\, 2\alpha}{\text{Sin}\, B}$, quod dein dat correctionem excentricitatis $= SD - \gamma$. Haec correctio est nulla, si $SD = \gamma$ vel $\text{Cos}\, 2\alpha = -\frac{\delta}{2\gamma}$, quod dat fere $\alpha = 48°$, $\alpha = 132°$ $\alpha = 228°$, $\alpha = 312°$; haec correctio est maximum positivum, si D cadit in A, quum sit $\alpha = 0$ vel $180°$; maximum negativum, si D cadit in B, ubi α est $90°$ vel $270°$. Faciendo $\frac{\delta}{\gamma} = \varepsilon = 0.213$, habebimus $\text{Sin}\, B = \frac{\varepsilon\, \text{Sin}\, 2\alpha}{\sqrt{(1 + 2\varepsilon\, \text{Cos}\, 2\alpha + \varepsilon^2)}}$, $SD = \gamma \cdot \sqrt{(1 + 2\varepsilon\, \text{Cos}\, 2\alpha + \varepsilon)}$ vel fere

$TD = \gamma(1+\varepsilon\cos 2\alpha)$, correctionem excentricitatis $\varepsilon = \delta\cos 2\alpha$, et ejus augmentum $= -2\delta\, d\alpha \sin 2\alpha$, quod conforme est tabulae praecedenti. Inventa hac ratione pro data epocha, h. e. pro distantia solis α a loco medio C apogei, vera excentricitate TD et correctione apogei ATD, noscimus veram longitudinem apogei, et hinc correctam mediam anomaliam; ex quo concludimus aequationem centri correctam et longitudinem veram lunae. —

Hac erat methodus, qua prius usi sunt Astronomi, sed propter longitudinem calculi nunc est rejecta. Quum hic tantummodo agitur de correctione longitudinis lunae, et hinc correctio lineae apsidum non est necessaria, nunc adhibetur sequens simplex approximatio. —

Secundum hypothesin simplicem ellipticam habemus $tg\frac{g}{2} = \frac{\gamma\sin\mu}{1+\gamma\cos\mu}$, et $\mu - \nu = g$ aequationem centri, ubi μ et ν sunt anomalia media et vera. Si luna est in L, (ultima fig.) possumus supponere sine sensibili errore CL aequalem distantiae mediae quod dat $\frac{CT}{CL} = \gamma$, et in triangulo LCT, $tg L = \frac{\gamma \sin LCT}{1-\gamma\cos LCT}$. Sed ACL est anomalia media μ, hinc $tg L = \frac{\gamma\sin\mu}{1-\gamma\cos\mu}$ ergo $L = \frac{g}{2}$. Si verum centrum orbitae non est in C, sed in D, angulus L vel $\frac{g}{2}$ se mutat in $DLT = \frac{g'}{2}$ hinc habemus $\frac{g'-g}{2} = \frac{dg}{2} = CLD$. Sed $\sin CLD = \frac{CD}{DL}\sin DCL$ ubi CD est constans, et DL tantummodo parva quantitate se variat, quia CD est admodum parvum respectu CL: hinc faciendo $\frac{CD}{DL} = n$, et $\sin CLD = CLD$, habebimus $2CLD = dg = 2n\sin DCL$, cujus maximus valor $= 2n$ locum habet, si $DCL = 90°$; ita ut maximus ~~valor~~ et minimus valor excentricitatis erunt ~~$G = 7°4$ et $H = 5°$~~ $G = g + 2n$ et $H = g - 2n$. Sed vidimus esse $G = 7°40'$ et $H = 5°$; ex quo sequitur $2n = \frac{G-H}{2} = 1°20'$ et evectio $dg = 80' \sin DCL$. Sed $DCL = ACL - ACD = \mu - 2\alpha$, hinc $dg = 80' \sin(\mu - 2\alpha)$. Nominando ☾, ☉ longitudines medias lunae et Solis et $\eta =$ ☾ − ☉ elongationem lunae a Sole, habemus $\alpha =$ ☉ − apog. ☾ $=$ ☉ − (☾ − μ) $= \mu - \eta$ et $\mu - 2\alpha = 2\eta - \mu$. — Possumus

itaque evectioni dare has duas formas

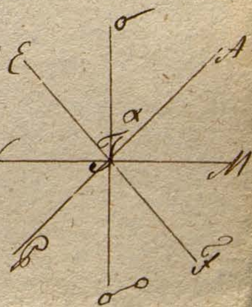
$dg = 80' \sin(\mu - 2\alpha)$ vel $dg = 80' \sin(2\eta - \mu)$ (inde praeced.)

Nos supposuimus anomaliam, computatam ab apogeo, esse multo minorem quam 180°, et hinc $\mu > v$: ex quo sequitur, si locus medius est datus, qui casus semper in tabulis supponitur (vid. Berlin. astronom. Tafeln Band II Seite 47–50), subtrahi deberi evectionem a medio loco lunae, vel a loco correcto per aequationem ellipticam centri; hinc habebimus $dg = -80' \sin(\mu - 2\alpha) = -80' \sin(2\eta - \mu)$. Si anomaliae sunt computatae a perigaeo, evectio assumet signum +. Haec ultima forma est illa, quae est adoptata in tabulis; et ejus valor exactus, conclusus ex observationibus et ex theoria attractionis, est secundum tabulas celeb. Bürg, $= +80' 29''.5 \sin(2\eta - \mu) + 35''.4 \sin 2(2\eta - \mu)$. – (Vide: Tables astronom. publ. par le bureau des long. de France P. I. Tab. XII de la lune). –

Evectio est effectus maxime considerabilis actionis Solis in lunam: igitur fundata est in principiis physicis, sed observationes jam a tempore Ptolemaei ejus dederunt comprobationem empiricam. –

Evectio non est correctio maximae aequationis centri, quam praesentat tabula, et quae dependet solum a quantitate α; sed est correctio centri generatim vel longitudinis lunae quaecunque sit ejus anomalia: haec igitur dependet necessario a duobus argumentis, 1) a valore excentricitatis, quod dat argumentum α, 2) ab anomalia μ; ex quo resultat argumentum compositum $\mu - 2\alpha$.

Tabulae calculatae per praecedentes formulas aequationis centri et evectionis, debuissent satisfacere omnibus observationibus, si hae essent solae inaequalitates lunae. Sed hoc non erat casus; et facilis erat detectio novarum inaequalitatum, quia maxime considerabilis inter illas locum habet in aspectibus, ubi evectio est nulla. Si linea apsidum est in octantibus, faciendo cum syzygiis et quadraturis angulos 45°, correctio E (praeced.) est nulla, et excentricitas habet suum medium valorem: quum igitur luna dein in syzygiis et quadraturis elongata est 45° ab apsidibus, debuisset habere in his duobus aspectibus eandem aequationem centri et eandem celeritatem. Sit terra in T, sol in ~~luna~~ linea σ, ~~anomalia est~~ AP, MN, EF erunt lineae apsidum, quadraturarum et mediarum distantiarum, formantes inter se angulos 45° = α. Si luna est in σ, anomalia est $\mu = \alpha$, et argumentum evectionis $\mu - 2\alpha = \alpha$, hinc evectio $dg = -80' \sin\alpha$. In ultimo quadranti M, μ est $180° + PTM = 180 + 3\alpha$, $\mu - 2\alpha = 180° + \alpha$, $dg = -80' \sin\alpha$ in primo



quadranti N, habemus $\mu = 90+\alpha$, $\mu-2\alpha = 90^\circ-\alpha$, $dg = +80'\cos\alpha$, tandem in oppositione ☍ μ est $180+\alpha$, $\mu-2\alpha = 180^\circ-\alpha$, $dg = +80'\sin\alpha = +80'\cos\alpha$. —
Interea Tycho cui debemus hanc inventionem, observavit, celeritatem lunæ esse sensibiliter majorem in ☍ quam in M; et continuare a ☍ usq. ad E ita ut locus calculatus lunæ maxime distaret a vero loco lunæ in medio inter ☍ et N in E, et hanc differentiam crescere usq. ad 37'.4". Observata luna in diversis punctis orbitæ, ipsi illi ostendit, hanc correctionem non dependere a positione apsidum, sed solum ab elongatione lunæ a Sole η. Hæc erat maximum positivum in octantibus E, F, quæ veniunt immediate post syzigias, ubi η est 45° et $180^\circ+45^\circ$; maximum negativum in octantibus A, C, quæ præcedunt syzigias, ubi η est $360^\circ-45^\circ$ et $180^\circ-45^\circ$; erat nulla in syzigiis et quadraturis, ub η est 0, 180°, 90°, vel 270°, et hæc quoq. est ratio, cur hæc correctio antiquioribus erat ignota, quia illi lunam tantummodo in syzigiis vel quadraturis observarunt. Ista ubi Ptolemæus ope quadraturarum detexit evectionem, ita Tycho observando octantes, detexit hanc novam inæqualitatem quam appellavit variationem. Mayer invenit eundem valorem 37'4". —
Ex præcedentibus sequitur variationem posse exprimi per $+37'4''\sin 2\eta$.
Hæc est ubi evectio et omnes æquationes, de quibus adhuc sermo erit, effectus attractionis Solis, et secundum tabulas celeb. Bürg,
$= -2'.2''.1 \sin\eta + 35'41''.7 \sin 2\eta + 3''.3 \sin 3\eta + 7''.3 \sin 4\eta$. -
Hæc expressio devenit maximum, si $\eta = 135^\circ$ et $\eta = 225^\circ$ h. e. $\mp 37'6''$, ubi eam Tycho invenit. Variatio contenta est in Table XXXIV de M. Bürg. —
Correcto hac ratione loco lunæ per tres præcedentes æquationes, Astronomi observarunt, calculum admodum bene concordare cum observationibus in fine Junii et Decembris, sed non aliis temporibus, præcipue circa æquinoctia. —
Jam Tycho observavit hanc inæqualitatem, sed neq. hic neque Kepler determinarunt ejus magnitudinem; hi Astronomi cogitarunt, hoc esse æquationem temporis propriam lunæ. Sub hac forma eam quoq. Horoccius in suas tabulas introduxit, determinando ejus valorem, ita uti est inventus per observationem et per theoriam attractionis nimirum $= 11'16''$.

Primum quod observare debuerunt est, hanc inaequalitatem, quę se regulat secundum tempestates, et quę habet pro periodo annum solarem, non dependere ab orbita lunę, sed ab orbita terrę et speciatim ab anomalia Solis: Kepler ei dedit nomen aequationis annualis, quod etiam conservavit. Secunda observatio erat hiemis tempore, ubi motus Solis est rapidissimus, lunam fuisse retardatam, vel minus progressam in sua orbita, aestatis vero tempore contrarium: ex hoc sequitur, aequationem annualem debere habere idem argumentum uti aequatio centri Solis, sed cum signo opposito. Ex tempore quo Newton probavit, actionem Solis esse fontem omnium inaequalitatum lunę, naturalis erat praesumtio, hanc actionem debere esse plus vel minus magnam secundum distantiam Solis, ex quo debebat resultare nova aequatio, dependens ab anomalia Solis vel aequatio annualis lunę. Nominando a anomaliam mediam Solis, numeratam a perigeo, aequatio annualis est secundum Bürg T. VII $= -11'\,11.''8 \sin a - 6'' \sin 2a$, hęc aequatio igitur est nulla quando Sol est in apsidibus, est maximum positivum vel negativum $= 11'\,12''$, si $a = 271°\,1'\,53''$ vel $a = 88°\,58'\,7''$.

Cum aequatio elliptica Solis sit $= +1°\,55'\,22'' \sin a$ etc, Sol appropinquatur vel elongatur a luna, h. e. syzigię verę accidunt prius aut tardius quam syzigię medię, angulo $(1°\,55'\,22'' + 11'\,12'') \sin a$, quod facit $1°\,26'\,34''$, si a est 90° vel 270° ad initium veris et autumni.

Antiqui, qui ne suspicabantur quidem terminum $11'\,12'' \sin a$, particularem lunę, attribuerunt hanc accelerationem vel retardationem tantum Soli: naturale igitur erat, ut invenerint aequationem centri Solis admodum magnam, quia eorum observationes syzigiarum illam dabant confusam cum aequatione annuali. Ex eadem ratione simili invenerunt aequationem centri lunę admodum parvam.

Quatuor aequationes praecedentes, solę, quarum cognitio debetur observationibus, sunt appellatę quatuor magnę inaequalitates lunę. Prima, aequatio centri, provenit unice a motu elliptico lunę secundum leges Kepleri, ita uti illa planetarum: ejus argumentum est anomalia media μ, ejus maximus valor $6°\,18'\,28''$, ejus periodus est mensis anomalisticus. Secunda evectio, est uti omnes sequentes, effectus perturbationum productarum per Solem. Ejus maximus valor est $1°\,20'\,30''$, ejus argumentum $2\eta - \mu = \mu - 2\alpha$. — Cum motus diurni, nimirum synodicus

et anom-

et anomalisticus, sint $\eta = 12^\circ\, 11'\, 26''.7$ et $\mu = 13^\circ\, 3'\, 54''$, motus diurnus evectionis $2\eta - \mu$, est $10^\circ\, 18'\, 39''.4$, quod est ad 360°, uti 1^{dies} est ad $31^d\, 19^h\, 26'\, 24''$ quod est periodus evectionis. —

Tertia inaequalitas, variatio, habet pro argumento id quod nominamus aetatem lunæ (l'age) η. Hæc dependet a phasibus lunæ, ejus periodus est mensis synodicus, et ejus maximus valor $37'\, 6''$. —

Quarta, seu aequatio annualis, habet pro argumento anomaliam mediam Solis a, ejus periodus est annus anomalisticus, et ejus maximus valor $11'\, 12''$. —

Periodus, composita ex quatuor praecedentibus, ita ut sit multiplum cujus, unus earum, erat illa quatuor magnarum inaequalitatum, seu tempus, in quo omnes quatuor aequationes se tollebant, et iterum incipiunt, ita ut durante tali periodo, ex omnibus quatuor aequationibus composita aequatio, qua una sola spectari possit. Sed talis periodus, ut sit exacta deberet esse excessivæ longitudinis, et nullam haberet utilitatem. Interea possumus nos servire simili periodo ad verificationem unius aut duarum inaequalitatum per observationes: talis est periodus Chaldaica ad verificandam simul primam et tertiam inaequalitatem. — Magnitudo et periodus quatuor praecedentium inaequalitatum sunt ita notabiles, ut Astronomis non effugere potuissent. Naturaliter detectæ sunt, quando perveniebant ad earum maximum, per quod eodem tempore cognita est earum periodus vel earum argumentum, et ejus maximus valor seu coëfficiens constans formulis, per quam istæ sunt expressæ. An autem sint proportionales sinubus, tangentibus, aut alii functioni argumenti, hoc tantummodo experiendo et per hypotheses inveniri potuit. tandem per Astronomiam physicam, innotuerunt hæ functiones a priori. Cum periodi seu argumenta trium ultimarum inaequalitatum, quæ sunt compositæ ex anomalia Solis et ex elongatione lunæ a Sole, clare ostenderunt, has correctiones omnes dependere a Sole, hoc locum dedit ad detectionem theoriæ physicæ perturbationum lunæ per actionem Solis. Per illas quatuor aequationes eo pervenerunt, ut locus calculatus lunæ cum observationibus ad aliqua minuta concordaret: inaequalitates, quæ adhuc locum habebant, non potuerunt majores esse 1' vel 2', igitur erant insensibiles pro Ptolemæo qui suis observationibus tantummodo ad 10' fere respondere potuit. — Cum autem exactitudo observationum

observationum novissimis temporibus tam provecta est, error aliquot minutorum jam admodum esset considerabilis. Igitur quaeri debent novae inaequalitates lunae productae per actionem Solis; detectio harum parvarum correctionum erat per longum tempus occupatio principalis maximorum Astronomorum. Per observationes solum problema non resolvi potest; observationes quidem ostendunt, adesse adhuc incognitas correctiones, sed quoad ejus naturam nihil indicarunt. ~~Hae~~ correctiones sunt compositae e magno numero independentium aequationum, quarum periodi sunt ita differentes inter se, ut omnes conationes detegendi ordinem vel legem, quam sequebantur, erant inutiles. Praeterea earum summa tantummodo ascendebat ad aliquot minuta; et quum observationibus, in quas parallaxis et diameter lunae ~~cum~~ multis cum aliis non satis notis et ab ipsis correctionibus quoque affectis quantitatibus summum habent influxum, ad 1' fides tribui non potuit, impossibile erat, per observationes solas, summam correctionum decomponendi in singulas partes, quarum aliquae forsitan minus considerabiles erant, quam errores observationum. Recurrere igitur debuerunt ad theoriam physicam, et nunc orta est maxime difficilis et penibilis pars Astronomiae, nimirum constructio exactarum tabularum principiis physicis innixarum. — Newton monstravit viam: occupatus erat calculo inaequalitatum lunae, et plures Astronomi calcularunt, secundum ejus formulas, tabulas lunares, quae autem adhuc valde distant ab exactitudine. Theoria lunae erat hinc ad hunc objectum dignum disquisitionum celeb. Geometrarum, uti v.c. Dalembert, Clairaut, Euler etc. Anno 1753 L. Euler publicavit suam primam theoriam motuum lunae, et Job. Mayer correxit tabulas datas per Eulerum, comparando eas cum observationibus, quod ei occasionem dedit ad detegendas plures novas aequationes; sed nec tabulae Mayeri, nec formulae Euleri satisfaciebant. Anno 1772 L. Euler publicavit suam novam theoriam ~~xxx~~ motus lunae, in qua adhibuit methodum plane differentem, per quam invenit novas aequationes. Brevi tempore prius apparuerunt ultimae tabulae Job. Mayeri, quae fundatae sunt et in theoria Euleri et in comparatione 200 observationum et quae dant locum lunae magna cum praecisione. — Anno 1799 appa-

ruit

apparuit tandem <u>Mechanique céleste par P. S. Laplace</u>, opus, quod epocham fecit et facit in historia Astronomię et culturę ingenii humani. Liber **VII** tomi **III** hujus operis sacratus est theorię lunę: ille continet magnum numerum novarum inaequalitatum, derivatarum e theoria attractionis, et confirmatarum per observationes, quę faciunt basin ultimarum tabularum a celeb. Bürg et Burckhardt. His disquisitionibus, ita ingeniosis uti molestis, debemus hanc magnam precisionem, qua actualiter noscimus motum lunę, et utilitatem istam magnam, quę provenit navigationi et Geographię. —

Ad simplificationem aequationum lunę, Mayer posuit in una sola tabula omnes eas, quę potuerunt mitti sub idem argumentum: et per hoc reduxit novas inaequalitates ad numerum decem. Hic putari debent uti empiricę, sed ad explicationem constructionis et usus tabularum, dare debemus ideam generalem omnium inaequalitatum lunę. Quum illę proveniant ab actione Solis, quas locum haberent, si orbitę Solis et lunę essent circulares, et in hoc casu dependerent illę unice a ratione constanti inter diametros ambarum orbitarum. Sed quum istę orbitę sint ellipticę, valor <u>medius</u> harum inaequalitatum, qui semper determinabitur per precedentem rationem, erit subjectus parvis variationibus quas nominamus <u>correctiones</u> et quę dependent a variationibus distantiarum Solis et lunę: nam visibile est, actionem solis debere esse plus vel minus fortem, in ratione, qua appropinquatur vel elongatur a luna. Hinc, quum hę correctionis dependant ab anomalia Solis et lunę, earum argumenta erunt hę ipsę anomalię, combinatę cum argumentis aequationum diversis modis: maxima harum est <u>evectio</u>. —

<u>Aequationem apsidum</u> conjunxerunt hodierni Astronomi cum <u>evectione</u>, quę habet idem argumentum; sed ejus correctio dependens ab anomalia Solis, requirit tabulam specialem. Hic motus influit mediate in longitudinem lunę, variando ejus anomaliam et consequenter aequationem centri. Quum anomalia lunę est unum principalium argumentorum, quod intrat in omnes aequationes, incipi debet cum correctione anomalię; hoc correctio ascendit usq ad 22' 17".5, quod producit variationem aequationis centri, vel ~~longitudinis~~ $2\frac{1}{2}'$. —

Plane similis correctio dependens ab anomalia Solis, est applicata ad lineam nodorum. Videamus dispositionem tabularum celeb. Bürg, quae spectant longitudinem. —

Nominemus longitudinem veram Solis ☉, ejus mediam anomaliam a, longitudinem mediam Lunae ☾, ejus anomaliam mediam computatam a perigeo A, longitudinem mediam nodi ascendentis ☊, ejus supplementum 360° − ☊ = N, elongationem a Sole ☾ − ☉ = E.

Initium fit per aequationem annualem cujus argumentum est a (Tab. VII), haec adhuc indiget correctione secundum diversas distantias Lunae a terra, quae hinc dependet ab A et a, ejus argumentum est A − a (Tab. XI). — Variatio, quae habet pro argumento E, (Tab. XXXII) exigit correctiones quae dependent ab A et a: .. earum argumenta igitur erunt composita ex E vel 2E, a et A. — Evectio aequaliter est subjecta correctionibus quae dependent ab a et A, praeter argumentum evectionis 2E − A, ex quo resultant argumenta ejusdem formae uti illa variationis. Generatim facile videmus, perturbationes motus Lunae circa terram, productas per Solem, debere necessario dependere ab ejus situatione relativa ad punctum quod occupat Luna in sua orbita, hinc 1) ab E 2) a differentia distantiarum terrae a Luna et Sole, hinc ab A et a; ex quo sequitur, fere omnia argumenta esse composita ex E, A et a. Omnes hae correctiones sunt contentae in tabulis VIII, IX, X, XI, XIII – XXII, XXVI, XXVII, XXVIII. —

Quum actio Solis necessario debet mutari in ratione qua Sol removetur a plano orbitae lunaris, resultant aequationes, quae dependent a distantiis Solis et Lunae a nodis: igitur habent argumenta composita ex ☊ seu N, ☉ et ☾ (Tab. XXIII, XXIV); argumentum ☾ + N dat quoque reductionem ad eclipticam (Tab. XXXIV). Hae aequationes, ita uti omnes ceterae, indigent correctionibus, propter ellipticitatem orbitae lunaris, quae igitur dependebunt ab A, ita ut earum argumenta erunt composita ex N, ☉, ☾ et A (Tab. XXV, XXIX, XXX, XXXI). — Aequatio centri est contenta in Tab. XXXIII. —

Hae sunt 28 aequationes longitudinis; tabulae XXXI, XXXIII continent correctiones argumentorum (quoad motum apsidum et nodorum).

Possemus construere omnes tabulas ita, ut apud omnes media argumenta a, A, E, etc sint. Sed quum hac ratione evaderent adhuc magis complicatae, in plures sectiones distributae sunt ita, ut in qualibet sectione adhibeantur argumenta correcta per tabulas praecedentium ~~xxx~~ sectionum. —

Designando hinc per ☾′, ☾″, ☾‴, ☾ᴵⱽ, A′, A″, N′ valores quantitatum ☾, A, N, correctos per successivas sectiones, omnes aequationes lunae in longitudine sunt contentae in sequentibus formulis; ciffrae romanae indicant tabulas celeb. Bürg. quae praesentant quamlibet aequationem. In editione harum tabularum publicatarum par le Bureau des longitudes de France, omnes aequationes sunt constructae additivae, quae per earum naturam, modo sunt positivae modo negativae: ad hunc effectum aucta est qualibet aequatio quantitate constanti in numero rotundo, qui saltem debet esse aequalis ejus maximo valori negativo. Secundum hanc dispositionem tantummodo additiones sunt faciendae, et in fine calculi summa omnium constantium subtrahenda; sed ad evitandam etiam hanc subtractionem, dispositio ita est facta, ut haec summa sit accurate 360°.

Prima correctio longitudinis ☾, contenta in tabulis VII – XXX, est

$$P = \begin{cases} -(11'11''.8 \sin a + 6'' \sin 2a)\,\text{VII} + 11''.5 \sin(E+a)\,(\text{VIII}) \\ +(4''.9 \sin(E-a) + 2''.6 \sin 2(E-a))\,(\text{IX}) \\ -(2''.6 \sin(E+a) + 4''.6 \sin 2(E+a))\,(\text{X}) \\ -(21''.4 \sin(E-a) + 58''.6 \sin 2(E-a))\,(\text{XI}) \\ +(1^\circ 26' 29''.5 \sin(2E-a) + 35''.4 \sin 2(2E-a))\,(\text{XII}) \\ -57''.8 \sin(2E+a)\,(\text{XIII}) - 2''.1 \sin(2E-3a)\,(\text{XIV}) \\ +39''.3 \sin(A-a)\,(\text{XV}) + 53''.9 \sin(2E+a)\,(\text{XVI}) \\ +76''.5 \sin(2E-a)\,(\text{XVII}) + 1''.1 \sin(E-A+a)\,(\text{XVIII}) \\ +14''.6 \sin(2E-A+a)\,(\text{XIX}) + 47''.6 \sin(2E-A-a)\,(\text{XX}) \\ +2''.2 \sin(2E+A+a)\,(\text{XXI}) + 1''.3 \sin(2E+A-a)\,(\text{XXII}) \\ -6''.8 \sin N\,(\text{XXIII}) - 62''.5 \sin 2(\odot+N)\,(\text{XXIV}) \\ -6''.4 \sin 2(\text{☾}+N-A)\,(\text{XXV}) - 10''.6 \sin(4E-A)\,(\text{XXVI}) \\ +1''.1 \sin(4E-3A)\,(\text{XXVII}) - 1''.2 \sin(2A-2E-a)\,(\text{XXVIII}) \\ +6''.9 \sin(2E-A-2\text{☾}-2N)\,(\text{XXIX}) - 8''.8 \sin(2E+A-2\text{☾}-2N)\,(\text{XXX}) \end{cases}$$

Argumenta, quae referuntur ad Solem, ☉ et a, debent sumi e tabulis solaribus; argumenta ☾, A, N, sunt calculata in tab. lun. (Tab. I – VI). Inventa hac ratione prima correctione P per 24 praecedentes aequationes, formabitur nunc longitudo prima vice correcta $☾' = ☾ + P$, quae serviet ad formationem sequentium argumentorum. Sed antequam calculatur aequatio centri, corrigi debet ejus argumentum, anomalia A, quae est multo major quam media, non solum quantitate P, sed adhuc correctione, quae sequitur ex motu apsidum: haec est

$p = -22'17''.3 \sin a - 11'' \sin 2a$ (XXXI). Correctio nodi, vel ejus supplementi N est $q = +9' \sin a + 4'' \sin 2a$ (XXXII). Hoc dat valores correctos quantitatum A et N, nimirum $A' = A + P + p$, et $N' = N + q$. Anomalia A′ dat

(XXXIII) aequationem centri, $ae = +6^\circ 18' 12''.2 \sin A' + 2' 56''.4 \sin 2A' + 37''.3 \sin 3A' + 1''.9 \sin 4A' + 0''.1 \sin 5A'$, quacum nunc formatur longitudo correcta secunda vice ☾″ = ☾′ + ae et elongatio correcta, E′ = ☾″ − ☉. Hoc dat variationem (XXXIV) $Q = -2' 2''.1 \sin E' + 35' 41''.7 \sin 2E' + 3''.3 \sin 3E' + 7''.3 \sin 4E'$ et longitudinem correctam tertia vice, ☾‴ = ☾″ + Q quacum invenitur aequatio r = −1′ 24″.4 sin(2☾‴ + 2N′ − A′) (XXXV), et ☾ᴵⱽ = ☾‴ + r. Hoc argumentum dabit reductionem ad eclipticam (XXXVI)
R = −6′ 46″.8 sin 2(☾ᴵⱽ + N′) + 2″.1 sin 4(☾ᴵⱽ + N′), ex qua tandem habetur vera longitudo in ecliptica ☾ⱽ = ☾ᴵⱽ + R, quae dein corrigi debet per mutationem, ita uti hoc fit relate ad Solem. Reductio R invenitur in tabula XXXVI confusa cum una perturbatione ejusdem argumenti ☾ + N. Applicando conjunctim has aequationes cum signis oppositis ad aliquam longitudinem observatam, habebimus aliquam longitudinem mediam, quae servire potest qua epocha. Hoc est in tabulis celeb. Bürg pro initio anni 1801 Paris, $= 3^s 21^\circ 36' 30''.6$.

Nullum dubium est praeter has inaequalitates productas per actionem Solis, lunam quoque subjectam esse perturbationibus productis per attractionem planetarum. Sed earum masse sunt multo minores quam illa Solis, hinc non possunt producere inaequalitatem majorem 1″ vel 2″. Interea Burckhardt in suis tabulis lunae, publicatis par le bureau des longitudes en 1812, quoque in calculum duxit actionem planetarum Jupiter et Venus, quorum unus est maximus, alter terrae vicinissimus; ille invenit has aequationes

− 1″.1 sin(♀ − ♁) + 0″.4 sin 2(♀ − ♁),
+ 0″.8 sin(♁ − ♃) − 0″.2 sin 2(♁ − ♃)

♀ Venus
♁ terra
♃ Jupiter

Eaedem tabulae dant aequationem:

P = −10′ 59″.3 sin a − 7″.1 sin 2a + 13″.7 sin(E + a) + 2″.3 sin(E − a) + 7″.3 sin 2(E − a) − 2″.3 sin(E + a) − 4″.3 sin 2(E + A)
− 23″.5 sin(E − A) − 57″.9 sin 2(E − A) + 80′ 28″.3 sin(2E − A) + 35″.5 sin 2(2E − A) − 57″.7 sin(2E + A) − 0″.9 sin(2E − 3A)
+ 109″.4 sin(A − a) − 17″.7 sin(2E + a) + 147″.3 sin(2E − a) − 18″.4 sin(2E − A + a) + 190″.3 sin(2E − A − a)
+ 2″.1 sin(2E + A − a) − 7″ sin N′ − 59″.2 sin 2(☉ + N′) + 7″.4 sin 2(☾ + N′ − A) − 12″.2 sin(4E − A) + 1″.1 sin(4E − 3A)
− 4″.6 sin(2A − 2E − a) + 6″.6 sin(2E − A − 2☾ − 2N′) − 10″ sin(2E + A − 2☾ − 2N′);

et − 83″.8 sin(2☾ + 2N′ − A) − 70″.6 sin(A + a) − 6″.3 sin 2(A + a) + 6″.7 sin(2E − A − 2a) + 2″.8 sin(2A + a − 2E)
− 1″.8 sin(2N′ + 2☉ + a) − 0″.9 sin(2E − A + 2a) + 0″.8 sin(2A − a) + 0″.7 sin(A − 2a);

aequationem centri
$= +6^\circ 8' 12''.4 \sin A' + 12' 57''.1 \sin 2A' + 37''.2 \sin 3A' + 1''.8 \sin 4A'$,

variationem
$= -2' 2''.7 \sin E' + 35' 38''.6 \sin 2E' + 2''.9 \sin 3E' + 9''.1 \sin 4E'$

et reductionem ad eclipticam = − 6′ 52″.2 sin 2(☾ᴵⱽ + N′)

Nodi et inclinatio orbitæ lunæ

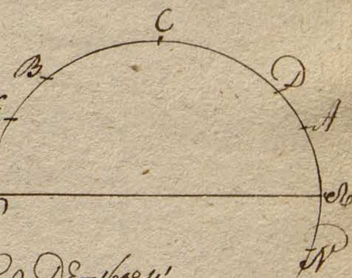
Quum terra constanter sit in planis eclipticæ et orbitæ lunaris, positio horum duorum planorum potest esse determinata, per observationes admodum simplices: et una sola revolutio lunæ sufficeret ad hunc effectum, si hic satelles moveretur rigorose in eodem plano. Observationes latitudinis lunæ durante una integra revolutione dant tempora, ubi ejus latitudo est <u>nulla</u>, et ubi est <u>maximum</u>: primum tempus dat locum nodorum, secundum inclinationem orbitæ, quam jam Ptolemæus magna cum precisione determinavit, supponendo eam 5°. Motus retrogradus nodorum est ita rapidus, ut observari possit facile jam post unam vel duas revolutiones. Puncta, ubi luna transit per eclipticam, ubi nimirum ejus latitudo est nulla, in una revolutione jam retrocedebant 1½°, et in fine 21 mensium, jam integro signo, ita ut nodi faciant unam revolutionem in 18 et ½ anno. Occultationes stellarum indicant hunc motum adhuc magis sensibili modo. Regulus, stella primæ magnitudinis, sæpius occultatur a luna; quod probat, lunam diu esse admodum vicinam suo nodo, quia latitudo stellæ tantummodo est 27' vel 28'. Videbimus, quolibet mense sequenti, lunam se elevare septemtrionem versus, et in fine 4–5 annorum lunam esse supra Regulum in distantia 5°, igitur esse elongatam a nodo ascendenti 90°, in eadem regione, ubi erat in nodo ante quatuor annos. Post novem annos luna iterum occultat Regulum, descendendo meridiem versus: post 14 annos transit supra hanc stellam in distantia 5°, et in fine 18½ annorum stella occultatur, uti prima vice; nodi reveniebant ad eandem positionem, fecerunt unam revolutionem in 18½ annis. Eclipses dant idem resultatum: quum earum magnitudo dependeat a latitudine lunæ, essent constanter ~~[illegible]~~ ejusdem naturæ in eadem regione cœli, si nodi essent immobiles; sed hoc mutatur ab anno ad annum donec post 18 annos eclipses reveniant secundum eundem ordinem.

Periodus Chaldaica non est satis exacta ad determinationem motus nodorum; sed illa 441 annorum, imaginata per Hipparchum, dat mensem anomalisticum fere ad aliqua minuta secunda.

Ptolemæus (Almag. l. IV. c. 9. determinavit motum nodorum ope duarum eclipsium lunæ, admodum a se invicem elongatarum, quæ locum habuerunt circa eundem nodum, in eadem margine lunæ,

in eadem distantia seu anomalia, et quæ erant ejusdem magnitudinis: ex quo sequebatur, lunam habuisse eandem situationem relate ad nodos et apsides, et hinc fecisse integrum numerum revolutionum respectu nodorum. Si ambæ anomaliæ non sunt aequales, converti debet locus verus lunæ in locum medium, ope aequationis centri, ad inveniendam revolutionem mediam. Hæ duæ eclipses, quibus se servivit Ptolemæus, erant elongatæ a se invicem 224608^d 21^h 50', earum magnitudo erat 2 digit. in parte australi, et ad nodum ascendentem: latitudo tunc erat borealis; eclipses accidebant ante nodum, et luna perfecit 8254 revolutiones draconicas. Anomalia erat in prima eclipsi 100° 19', in secunda 251° 13'; in prima longitudo media lunæ erat major vera 5°, in secunda erat minor 4° 53' ita, ut luna descripserit per suum medium motum 8254 circulos minus 9° 53'; ex quo dein deducitur motus medius diurnus in ratione ad nodos = 13° 13' 45".66378, et mensis draconicus = 27^d 5^h 5' 36" præcise, uti eum Hipparchus invenit ope suæ periodi. —

Ptolemæus determinavit locum vel epocham nodorum ope duarum eclipsium, ubi pars australis lunæ occultata est ad 3 dig., ubi luna erat apud nodos oppositos, sed in eadem distantia a terra. Prima accidebat post nodum ascendentem, secunda ante nodum descendentem; intervallum erat 218 ani jul. + 309^d 23^h 5', quo durante medius motus draconicus est 160° 4'. In prima eclipsi anomalia erat 12° 24' in secunda 2° 44'; longitudo media lunæ erat major quam longitudo vera 59'13".



Sit hinc ☊CV dimidia pars et quidem borealis orbitæ lunaris, A.B veri loci lunæ in ambabus eclipsibus, et supponamus in hoc intervallo, nodos esse regressos in N et n, ita, ut NCn = 180° et ☊A = Bn, quia ambæ eclipses erant ejusdem magnitudinis, et hinc aequaliter distantes a nodis. Faciendo AD = 59', BE = 13'; D et E sunt medii loci lunæ, hinc motus medius draconicus = NE − ☊D = N☊ + DE = 160° 4' et ☊D + En = 180° − (N☊ + DE) = 19° 56'. Hoc dat ☊A + Bn = 19° 56' − 59' + 13' = 19° 10', hinc dimidium est ☊A = Bn = 9° 35'. —

Nominando hinc M longitudinem mediam lunæ in medio primæ eclipsis, habemus pro eadem epocha longitudinem nodi ascendentis = M − ☊D = M − (☊A + AD) = M − 10° 34'. — Scimus, duas longitudines et latitudines observatas L. L' et λ. λ' sufficere ad inveniendam longitudinem nodi et inclinationem, i et i. Resultatum erit magis exactum, si observationes sunt factæ fere ante et

post

post eundem nodum: dum una latitudinum, λ, est negativa et nos habebimus

$$tg\left(\frac{L+L'}{2}-\Omega\right)=\frac{\sin(\lambda-\lambda')}{\sin(\lambda+\lambda')}\,tg\,\frac{L-L'}{2} \text{ et}$$

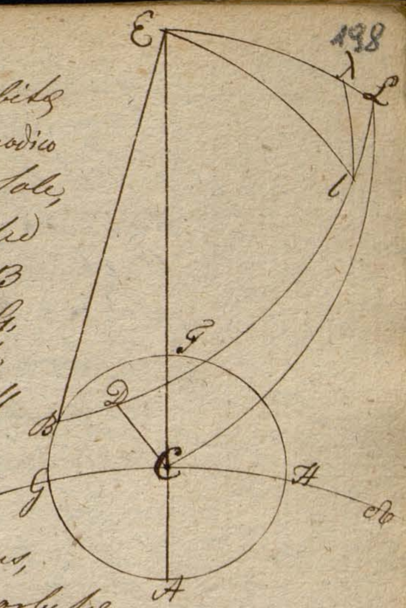
$$\Omega=\frac{L+L'}{2}-\left(\frac{L+L'}{2}-\Omega\right)$$

$$tg.\,i=\frac{tg.\lambda'}{\sin(L'-\Omega)}$$

Faciendo has observationes in pluribus transitibus lunae per nodum invenietur motus nodorum et variatio inclinationis. Secundum tabulas celeb. Bürg, motus nodorum in 365^d est $=-19^\circ\ 19'\ 43''.36$; hinc in $36525^d=-6963100''=-5^{circ.}\ 134^\circ\ 11'\ 40''$ relative ad puncta aequinoctialia, et motus sideralis in 36252^d, $=-5^{circ.}\ 135^\circ\ 35'\ 10''=-6968110''$: ex quo concluditur duratio unius revolutionis nodorum relate ad puncta aequinoctialia $=6798^d.1789720095934=$ $=6798^d\ 4^h\ 17'\ 43''.1816288 7$; duratio unius revolutionis sideralis nodorum $=6793^d.2911498239 84=6793^d\ 6^h\ 59'\ 15''.3447922176$. Cum motus periodicus lunae in 36525 diebus sit $=1336^{circ.}\ 307^\circ\ 52'\ 43''.5$ motus relate ad nodos erit $=1342^{cir.}\ 82^\circ\ 4'\ 23''.5$ ex quo habetur duratio unius mensis draconici $=27^d.2122176 8166 7=27^d\ 5^h\ 5'\ 35''.6076 9603$ quae tantummodo $0''.4$ differt a resultato quod invenit Ptolemaeus. Cum motus retrogradus nodorum sit, uti omnes perturbationes lunae, effectus attractionis Solis, necessaria est correctio, quae dependet ab anomalia Solis, et quae prius est data (quando sermo erat de tabulis). Ope epochae et motus medii nodorum possit calculari, pro epocha data, locus nodorum et limitum, ubi latitudo est aequalis inclinationi; sed Tycho jam observavit, motum nodorum et inclinationem habere inaequalitatem, quae dependeret ab elongatione lunae E, et quae igitur ita uti variatio, non potuit cognosci ab antiquis qui tantummodo observarunt eclipses. Haec detectio est confirmata a tempore Tychonis. Si nodi sunt in quadraturis, limites in syzigiis, inclinatio est 5° uti invenit Ptolemaeus; sed si nodi sunt in syzigiis, inclinatio est $=5^\circ\ 17'\ 34''$, si nodi et limites coincidunt cum octantibus, valor est intermedius $=5^\circ\ 8'\ 47''$. Linea nodorum habet in syzigiis et quadraturis, suam positionem mediam conformem praecedenti theoriae: sed extra hos aspectus, declinat ab hac, et maxime in octantibus, ubi differentia est $1^\circ 46'$. Tycho explicavit has duas inaequalitates per hypothesin admodum simplicem, quae quoque inventa est conformis theoriae et observationibus.

B

Sit



Sit E polus eclipticae, C centrum, circa quod verus polus orbitae lunaris describit parvum circulum FBA in semimense synodico secundum hanc legem. Si luna est in conjunctione cum Sole, polus orbitae est in puncto F quam vicinissimo ad E; sed si elongatio lunae a Sole est $= E$, polus erit in B et $FCB = 2E$. Consequenter polus est in primo et tertio octanti in G, in prima et ultima quadratura in A, in secundo et quarto octanti in H et in syzygiis in F. Inclinatio media hinc est $EC = EG = EH = 5^\circ\, 8'\, 47'' = v$, minima $EF = 5^\circ$ maxima $EA = 5^\circ\, 17'\, 34''$, hinc diameter $AF = 17'\, 34''$ $CF = CA = 8'\, 47'' = a$ vel secundum Bürg $v = 5^\circ 8' 46''$, $a = 8' 48''.4$; et vera inclinatio est EB, si elongatio est $E = \frac{1}{2} ECB$. Circulus maximus, perpendicularis ad EC, uti GCH, debet transire per nodos orbitae, ☊, ☋, qui sunt poli circuli maximi EC: consequenter, si polus est progressus a F ad B, BE☊ erit angulus rectus, hinc ☊ est progressus versus EC angulo BEC, qui est correctio nodorum, uti est correctio poli B. Maximus valor hujus correctionis GEH invenitur ducendo circulum maximum EH vel EG tangentem ad circulum parvum GH: sin habemus $\text{Sin}\, CEG = \frac{\text{Sin}\, a}{\text{Sin}\, v}$, hinc $CEG = 1^\circ\, 38'\, 12''$. Haec correctio nodorum et inclinationis non est immediate in tabulis, sed ibi invenitur effectus, quem habet haec correctio in latitudinem lunae, seu aequatio latitudinis, de qua statim erit sermo. Si ☊L☋ est ordo signorum, et L locus lunae non correctus ☊$CL = \alpha$ erit argumentum latitudinis, vel distantia lunae a nodo ☊, computata in orbita, et $ECL = 90^\circ - \alpha$. Faciendo $ECB = 2E$, verus polus orbitae erit in B, a quo luna constanter debet distare 90°: Per correctionem de qua hic agitur, luna translata est in l, si sunt Bl et LC 90°: ducta hinc CD perpendiculariter ad BL, LD erit aequalis LC et $DB = Ll$. Sed habemus $LCB = 90^\circ - \alpha + 2E$, ex quo sequitur $DCB = LCB - 90^\circ = 2E - \alpha$, et BD seu $Ll = a\, \text{Sin}(2E - \alpha)$. Conjungendo EL, El, demittendo in EL perpendiculo lλ, et nominando β latitudinem lunae, habebimus $EL = 90 - \beta$ et $EL - El$ vel $L\lambda = +d\beta$ correctionem latitudinis. Praeterea in triangulo ECL habemus

$$\text{tg}\, ELC = \frac{\text{Sin}\, ECL}{\text{ctg}\, EC\, \text{Sin}\, CL - \text{Cos}\, CL\, \text{Cos}\, ECL} = \text{Cos}\, \alpha\, \text{tg}\, v$$

et fere $ElB = ELC$, quia differentia BLC nunquam ascendit supra 8'48": hinc habemus in parvo triangulo Llλ, $L\lambda = Ll\, \text{Cos}\, ELC = \frac{a\, \text{Sin}(2E - \alpha)}{\sqrt{1 + \text{Cos}^2 \alpha\, \text{tg}^2 v}}$ vel fere $L\lambda = d\beta = +8'48''.4\, \text{Sin}(2E - \alpha)$. ——

Haec correctio est aequatio II latitudinis in tab. XXXVIII edit. Bürg. Idem resultatum potest adhuc simpliciori modo inveniri. Nostra figura supponit, ordinem figurarum esse circa polum C orbitae ☋B☊A hinc circa polum E eclipticae ☊L☋A vel B☋☊, ita ut polus orbitae C, et hinc quoque nodi retrocedebant angulo CEB, hinc $CEB = -d☊$.

Sed $\alpha = ☾ - ☊$ ex quo $$d\alpha = -d☊ = CEB \text{ - - - - - } (1)$$

Praeterea, $CE = v$, $BE = v'$, sunt inclinatio media et apparens, ex quo sequitur $$dv = BE - CE \text{ - - - - - - - } (2)$$

Notis in triangulo CEB, $CE = v$, $CB = a$, $BCE = 2E$ habebimus

$$\cos BE = \cos a \cos CE + \sin CE \cos 2E \text{ - - - - - } (3)$$

$$\operatorname{tg} CEB = \frac{\operatorname{tg} a \sin 2E}{\sin v - \operatorname{tg} a \cos v \cos 2E} \text{ - - - - - - - } (4)$$

Quum autem a minus sit quam $9'$, possumus facere $\sin a = \operatorname{tg} a = a$ et $\cos a = 1$, quod dat

(3) $\cos BE = \cos CE + a \sin v \cos 2E$, (4) $\operatorname{tg} CEB = \dfrac{a \sin 2E}{\sin v - a \cos v \cos 2E}$

vel fere $CEB = \dfrac{a \sin 2E}{\sin v}$, quod substitutum in (1), dabit

$$(5) \quad d\alpha = \frac{a \sin 2E}{\sin v}$$

Sed habemus $\cos BE - \cos CE = 2 \sin \frac{CE - BE}{2} . \sin \frac{CE + BE}{2} = (CE - BE) \sin CE$ fere: substituendo hoc in aequatione (3) habebimus

$$(CE - BE) \sin v = a \sin v \cos 2E, \text{ hinc per aequationem (2)}$$

$$(6) \quad dv = -a \cos 2E$$

Sed nos habemus $\sin \beta = \sin \alpha \sin v$ cujus differentiale est

$$d\beta = \frac{d\alpha \cos \alpha \sin v + dv \sin \alpha \cos v}{\cos \beta} = \frac{a(\sin 2E \cos \alpha - \cos 2E \sin \alpha \cos v)}{\cos \beta}$$

Supponendo hinc $\cos v$ et $\cos \beta = 1$ quia sunt semper majores quam 0.996, erit $d\beta = a \sin(2E - \alpha)$ uti prius.

Haec inaequalitas proprie est effectus variationis in latitudine, quum ejus argumentum $2E$ debeat esse combinatum cum α, quia in eodem modo actio Solis non potest removere lunam a plano suae orbitae. — Praeter correctionem praecedentem detectam per Tychonem, theoria dedit plures parvas correctiones latitudinis. — Facile videmus, actionem Solis debere non solum longitudinem sed et latitudinem lunae variare in ratione, in qua luna removetur ab ecliptica, et in ratione diversarum distantiarum lunae et Solis, quorum primum dependet ab argumento latitudinis $\alpha = ☾^{IV} - ☊'$ vel $☾^{IV} + N$. Aequationes latitudinis hinc habebunt praeter argumenta communia cum illis

longit.

longitudinis, E, a, A, adhuc α pro argumento. Hæ aequationes, quæ apponuntur ad decem sunt contentæ in tab. XXXVIIII Bürg et habent sequentem valorem:

$$C = -3''.1 \sin(\alpha - a) (\text{Aeq. III}) + 17''.6 \sin(\alpha - A) (\text{II}) - 25''.1 \sin(\alpha - 2A) (\text{V}) - 1''.9 \sin(\alpha - 3A) (\text{VI})$$
$$+ 9'' \sin(2E - \alpha + a) (\text{VII}) + 3''.7 \sin(2E - \alpha - a) (\text{VIII}) + 2''.2 \sin(2E - \alpha + A) \text{IX}$$
$$- 15''.9 \sin(2E - \alpha - A) (\text{X}) - 5''.2 \sin(2E - \alpha - 2A) (\text{XI}) - 8'' \sin ☾^{IV} (\text{XII});$$

quibus addi debet aequatio $A = +8' \, 48''.4 \sin(2E - \alpha)$ (Aeq. II) et latitudo ipsa B, quæ dependet simpliciter ab inclinatione orbitæ lunaris ad eclipticam ν, et a distantia lunæ a nodo α. Nos habemus aequationem $\sin B = \sin\nu \sin\alpha$, argumentum variabile est $\alpha = ☾'' - ☊'$, et coëfficiens constans $\sin\nu = \sin 5^\circ 8' 46'' = 0.0896959 = \lambda$. Ope seriei, quæ dat angulum in functione sui sinus, erit $B = \lambda \sin\alpha + \frac{\lambda^3}{8} \sin^3\alpha + \frac{3\lambda^5}{40} \sin^5\alpha + \ldots$

et substituendo pro $\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

$$\sin^5\alpha = \frac{5}{8}\sin\alpha - \frac{5}{16}\sin 3\alpha + \frac{1}{16}\sin 5\alpha$$

$$B = \left(\lambda + \frac{\lambda^3}{8} + \frac{3\lambda^5}{64}\right)\sin\alpha - \frac{\lambda^3}{8}\left(\frac{1}{3} + \frac{3}{16}\right)\sin 3\alpha + \frac{3\lambda^5}{640}\sin 5\alpha + \text{etc}$$

Si vellemus omnia exprimere in secundis, habebimus

$$\lambda = 5^\circ 8' 21''.1, \quad \lambda^3 = 2' \, 28''.85, \quad \lambda^5 = 1''.2, \text{ hinc}$$

$$B = 5^\circ 8' 39''.77 \sin\alpha - 6''.23 \sin 3\alpha + 0''.01 \sin 5\alpha,$$

vel secundum tabulas celeb. Bürg (XXXII)

$$B = 5^\circ 8' 40''.8 \sin\alpha - 5'' \sin 3\alpha$$

Latitudo correcta hinc erit $\beta = B + A + C$. In tabulis publicatis par le bureau des longitudes, omnes hæ aequationes sunt adhibitæ cum signo contrario, quia istæ tabulæ dant complementum latitudinis vel distantiam lunæ a polo boreali eclipticæ. Tabulæ celeb. Burckhardt dant latitudinem ope sequentium aequationum:

$$\beta = 5^\circ 8' 38.3 \sin\alpha - 5''.7 \sin 3\alpha + 8' \, 46''.2 \sin(2E - \alpha) - 25''.9 \sin(\alpha - a)$$
$$+ 23''.9 \sin(\alpha + A) + 14''.7 \sin(\alpha - A) - 27'' \sin(\alpha - 2A) - 10''.1 \sin(2E - \alpha + a)$$
$$+ 22''.4 \sin(2E - \alpha - a) + 2''.5 \sin(2E - \alpha + A) - 16''.3 \sin(2E - \alpha - A)$$
$$- 5''.2 \sin(2E - \alpha - 2A) - 8'' \sin ☾^{IV}.$$

Notis, longitudine vera in orbita $☾^{IV}$, inclinatione ν et argumento latitudinis $\alpha = ☾'' - ☊'$ habebimus reductionem ad eclipticam

$$R = \frac{\nu^2}{4}\left(1 + \frac{\nu^2}{6}\right)\sin 2\alpha - \frac{\nu^4}{32}\sin 4\alpha$$

ubi ν est $5^\circ 8' 46''$.

Motus horarius et parallaxis lunae

Si agitur de cognitione loci lunae pro pluribus epochis, quae a se invicem tantummodo aliquot minutis aut horis sunt elongatae, qui casus occurrit in calculo eclipsium et in pluribus aliis occasionibus, admodum molestum esset, omnes locos lunae sumendi ex tabulis. Facilius hoc perficitur, calculando locum exactum pro epocha intermedia et dein interpolando pro ceteris momentis ope motus horarii lunae. Ad hunc finem autem necessaria est cognitio motus horarii magna cum praecisione. Simplicissimum medium esset sine dubio, calculando longitudinem et latitudinem lunae pro duabus epochis una hora a se invicem elongatis, et sumendo earum differentiam pro motu horario. Sed quum tabulae dant tantummodo numerum integrum minutorum secundorum, possent resultare errores plurium minutorum secundorum. Praeterea, quum motus lunae non sit uniformis, deberemus adhibere saltem differentias secundas, quod supponit calculum trium locorum lunae. Simplicius et securius erit, se serviendi formulis quae qua derivatae e theoria physica sunt bases praecedentium omnium aequationum. Methodus per quam concluduntur istae formulae e theoria, consistit in quaerenda expressione generali variationis momentaneae $\partial\varphi$ longitudinis aut latitudinis verae, et ex hac deducendi φ per integrationem, quae tantummodo per approximationem perfici potest. Ex hoc sequitur, expressionem celeritatis seu motus horarii $\partial\varphi$ esse magis exactam quam valorem φ ex illa deductam. Sed motus horarius non est exacte celeritas $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, multiplicata per unam horam, quia motus non est uniformis in una hora: igitur quoque secundae differentiae respici debent.

Sit y quaecunque aequatio lunae, calculata pro epocha t, et quaerendus est valor y' ejusdem aequationis pro epocha $t+\Delta t$. His positis, supponendo ∂t constans, erit per theorema Taylori

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3}\cdot\frac{\Delta t^3}{2\cdot 3} + \text{etc}$$

et motus verus lunae u, in tempore Δt, est aequalis motui medio m, in eodem tempore, plus variatione omnium aequationum $(y'-y)$. Faciendo hinc $\Delta t = 1^h$, m erit motus medius horarius $= 32' 56''.46$ et verus motus horarius in longitudine, $u = m + y' - y$, ubi successive loco y omnes aequationes longitudinis poni debent; hinc habemus

(A) $$u = m + \frac{dy}{dt}\cdot\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{\Delta t^2}{2} + \ldots$$

Non inutile erit applicandi hanc formulam ad unam praecedentium aequationum, v.c. ad maxime considerabilem illam centri. Faciendo hinc $6°18'12''.2 = \mathfrak{Q}$, $12'56''.4 = \mathfrak{Z}$, $37''.3 = \mathfrak{L}$, $1''.9 = \mathfrak{C}$, erit

$$y = \mathfrak{Q}\sin A' + \mathfrak{Z}\sin 2A' + \mathfrak{L}\sin 3A' + \mathfrak{C}\sin 4A'$$

quod dat $$dy = \mathfrak{Q}\,dA'\cos A' + 2\mathfrak{Z}\,dA'\cos 2A' + 3\mathfrak{L}\,dA'\cos 3A' + 4\mathfrak{C}\,dA'\cos 4A'$$

$$d^2y = d^2A'(\mathfrak{Q}\cos A' + 2\mathfrak{Z}\cos 2A' + 3\mathfrak{L}\cos 3A' + 4\mathfrak{C}\cos 4A')$$
$$- dA'^2(\mathfrak{Q}\sin A' + 4\mathfrak{Z}\sin 2A' + 9\mathfrak{L}\sin 3A' + 16\mathfrak{C}\sin 4A')$$

Substituendo hos valores in aequatione (A) venit

(B) $$u = m + \frac{dA'}{dt}\cdot\Delta t(\mathfrak{Q}\cos A' + 2\mathfrak{Z}\cos 2A' + 3\mathfrak{L}\cos 3A' + 4\mathfrak{C}\cos 4A')$$
$$+ \frac{d^2A'}{2dt^2}\cdot\Delta t^2(\mathfrak{Q}\cos A' + 2\mathfrak{Z}\cos 2A' + 3\mathfrak{L}\cos 3A' + 4\mathfrak{C}\cos 4A')$$
$$- \frac{dA'^2}{2dt^2}\cdot\Delta t^2(\mathfrak{Q}\sin A' + 4\mathfrak{Z}\sin 2A' + 9\mathfrak{L}\sin 3A' + 16\mathfrak{C}\sin 4A')$$

Sed habemus $A' = A + \mathfrak{P} + p$, ubi $p = -22'17''.3\sin a - 11''\sin 2a$, hinc
$$dA' = dA + d\mathfrak{P} + dp, \quad dp = -0.0064896\,da\cos a.$$

Sumendo pro da augmentum anomaliae Solis in una hora $= 2'27''.8 = 0.0007165$, da revera est multiplicatum per $\frac{dp}{dt}$, hinc erit $\frac{dp}{dt}\cdot\Delta t = -0.00000464\cos a$

quod dat (1) $\mathfrak{Q}\cdot\frac{dp}{dt}\Delta t\cos A' = -0''.105\cos a\cos A' = -0''.052\cos(A'-a) - 0''.052\cos(A'+a)$

Differentiale hujus termini, uti ejus producta per $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{C}$, sunt insensibilia. Primus terminus dA est medius motus anomalisticus in tempore dt, $\frac{dA}{dt}$ est ejus celeritas, et $\frac{dA}{dt}\Delta t$ est motus medius in una hora $= 0.00950113 6 = 32'39''.75$, Secundus terminus $\frac{d\mathfrak{P}}{dt}\cdot\Delta t$ est quantitas, qua summa $\mathfrak{P}$ omnium 24 aequationum calculatarum ante aequationem centri, crescit in una hora, vel quod revenit ad idem, est illa pars motus horarii, quae resultat ex 24 aequationibus $\mathfrak{P}$, ita uti $y'-y$ est pars quae oritur ex aequatione centri y. Summa, quae resultat ex $\mathfrak{P}$, est contenta in tabulis XLVII, XLVIII. Nominando hinc earum summam α, habebimus $\frac{d\mathfrak{P}}{dt}\cdot\Delta t = \alpha$ vel secundus terminus quantitatis $\frac{dA'}{dt}\cdot\Delta t = \alpha$. Quod attinet differentialia secunda, habemus $d^2A' = d^2\mathfrak{P}$, quia d^2p est insensibilis, et motus medius dA est constans. Hinc habemus $\frac{d^2A'}{dt}\cdot\Delta t = d\alpha$ et $\frac{d\alpha}{dt}\cdot\Delta t = \frac{d^2A'}{dt^2}\cdot\Delta t^2$ est variatio horaria quantitatis α. Pars maxime considerabilis quantitatis α est illa, quae provenit ex evectione (Tab. XLVIII): est $40''\cos(2E-A) = 0.0001989\cos(2E-A)$, omnes caeterae aequationes conjunctim non ascendunt ad 3''. Hinc habemus

$$d\alpha = -0.000194(2dE - dA)\sin(2E-A)$$

quum autem sit $2dE - dA = 2d☾ - 2d☉ - dA$ erit

$2dE - dA = 65'53'' - 4'56'' - 32'40'' = 28'17'' = 0.0082273$ pro una hora

quod dat $\frac{d\alpha}{dt}\cdot\Delta t = \frac{d^2A'}{dt^2}\cdot\Delta t = -0.0000016\,\sin(2E-A) = -0''.33\,\sin(2E-A)$,

ex quo $\frac{d^2A'}{2dt^2}\cdot\Delta t^2\cdot Q\cos A' = \frac{Q}{2}\cdot\frac{d\alpha}{dt}\Delta t\cdot\cos A' = -0''.018\cos A\,\sin(2E-A) =$

$$= -0''.009\,\sin 2E - 0''.009\,\sin 2(E-A).$$

Quum hi parvi termini habeant eadem argumenta E et E−A, uti variatio seu aequatio XXVI longitudinis (Tab. XXXIV) et aequatio V (Tab. XI) connexa sunt cum his aequationibus XXVI et V motus horarii in tab. LI, XLVII. In aequatione (B) hinc nihil restat, quam termini dA', dA'^2 et inventum est

$$\frac{dA'}{dt}\Delta t = \frac{dA}{dt}\cdot\Delta t + \alpha + \frac{dp}{dt}\Delta t, \text{ hinc}$$

$$\frac{dA'^2}{dt^2}\cdot\Delta t^2 = \frac{dA^2}{dt^2}\Delta t^2 + 2\alpha\frac{dA}{dt}\Delta t + \text{etc}$$

quod substitutum in (B), dabit

$$\text{(C)}\quad u = m + \left(\frac{dA}{dt}\Delta t + \alpha\right)(Q\cos A' + 2Z\cos 2A' + \text{etc}) + Q\cdot\frac{dp}{dt}\Delta t\cos A'$$
$$- \frac{dA}{dt}\Delta t\left(\frac{dA}{2dt}\Delta t + \alpha\right)(Q\sin A' + 4Z\sin 2A' + \text{etc})$$

Introducendo praecedentes valores $m = 32'56''.46$, $\frac{dA}{dt}\Delta t = 0.009501136$; $Q\frac{dp}{dt}\Delta t\cos A' = -0''.052\cos(A'-a) - 0''.052\cos(A'+a)$,

$Q.\alpha = \alpha.0.11$, $Z.\alpha = \alpha.0.00376$, $L.\alpha = \alpha.0.00018$ quia α est datum in secundis in tab. XLVII, XLVIII et rejiciendo terminum $\cos(A'-a)$, qui est conjunctus cum aequatione IX (Tab. XV) in tabula XLVIII, veniet

$$\text{(D)}\quad u = 32'56''.46 + 3'35''.602\cos A' + 14''.743\cos 2A' + 1''.063\cos 3A'$$
$$+ 0''.072\cos 4A' + \alpha(0.11\cos A' + 0.0075\cos 2A' + 0.0005\cos 3A')$$
$$- 0''.052\cos(A'+a) - 1''.0242\sin A' - 0''.1402\sin 2A' - 0''.0152\sin 3A'$$
$$- 0''.0014\sin 4A' - \alpha(0.001\sin A' + 0.00014\sin 2A' + 0.00002\sin 3A')$$

Primus terminus constans, et quatuor sequentes, qui habent argumentum A' vel XXV, sunt contenti in tab. XLIX ubi constanter subtrahi debent 2'. Sumendo e.g. $A'=0$, quinque termini erunt $= 32'56''.46 + 3'35''.602 + 14''.743 + 1''.063 + 0''.072 = 36'47''.94$, et subtrahendo 2', 34'47''.94 praecise uti in tabula. Terminus $-0''.052\cos(A'+a)$ cujus argumentum est XXV+I, invenitur in ultima columna tab. XLVII, ubi addita est constans 0''.8, ita, ut pro $A'+a=0$ inveniatur in tabula $-0''.05+0''.8=0''.75$. Terminus $\alpha(0.11\cos A' + \text{etc})$ contentus in tabula L, habet duo argumenta α et A': primum est summa 24 aequationum (Tab. XLVII, XLVIII), quae, negligendo terminos insensibiles, reductae sunt ad 20. Sed quum aequationes tabulae XLVII auctae sunt 8'' et illae tabulae XLVIII, 46'', quodlibet argumentum α in tabula L est nimis majus 54''. Assumendo e.g. $A'=0$ et $\alpha = 41''$ nostra aequatio dabit $41''(0.11+0.0075+0.0005) = 41''.0.118 = 4''.82$. Si volumus usum facere tabulae L,

debet

debet sumi argumentum $41''+54''=95''$, et invenietur $10''.84=4''.84+6''$ quia addita constans est $6''$. Credere possemus, terminos sequentes $\sin A'$, $\sin 2A'$ etc potuisse esse comprehensos in tab. XLIX et ultimum terminum $\varpi(0.001 \sin A + \text{etc})$ in tab. L, quae habent eadem argumenta A', ϖ, sed hi termini sunt multiplicati per dA' vel dA'^2 et $\varpi dA'$, dum praecedentes termini sunt multiplicati per dA', ϖ: hi ultimi variant hinc signum, si quaeritur motus pro hora praecedenti, quum da et ϖ deveniant negativi, sed primi conservant idem signum quia dA'^2 et $\varpi dA'$ sunt positivi: hinc separati sunt ab illis tabulis XLIX, L, et sunt appellati aequatio secundi ordinis. Quatuor termini $-1''.0242 \sin A' - \text{etc}$ inveniuntur in tab. LVII sub titulo XXV, aucti quantitate constanti $1''.048$. Faciendo $A'=90°$ hi termini dant $-1''.0242+0''.0152=-1''.009$, et invenitur in tabula, $1''.048-1''.009=0''.039$. Ultimus terminus $-\varpi(0.001 \sin A' + \text{etc})$ est contentus in tabula LVIII, ubi constans addita est $0''.054$. Sit e. g. $\varpi=36''$ et $A'=90°$, nostra aequatio dabit $-36''(0.001-0.00002)=-0''.035$, in tabula invenitur, cum argumentis $\varpi+54''=90''$ et $A=\text{III}^s$, $0''.054-0''.035=0''.018$. ——

Explicata hac analysi, quilibet comprehendet facile omnes ceteras aequationes motus horarii in longitudine. ——

Termini praecedentes dant motum horarium in orbita, igitur adhuc necessaria est ~~...~~ reductio ad eclipticam, ut habeamus motum in longitudine. Sit NL orbita lunae L, Ll ejus motus horarius in orbita, NM ecliptica, LM circulus latitudinis hinc $NL=\alpha$ argumentum latitudinis, $ML=\beta$ latitudo. His positis habemus $\operatorname{tg} NM = \operatorname{tg}\alpha \cos v$, hinc



$$d.NM=\frac{d\alpha \cos v \cos^2 NM}{\cos^2\alpha}=\frac{d\alpha \cos v}{\cos^2\beta}, \text{ quia } \cos\alpha=\cos NM \cos\beta.$$

Sed quoque habemus $\sin\beta=\sin v \sin\alpha$, hinc $d.NM=\dfrac{d\alpha \cos v}{1-\sin^2 v \sin^2\alpha}$, et reductio motus horarii ad eclipticam, vel quod a motu praecedenti in orbita $d\alpha$ subtrahi debet, ad obtinendum $d.NM$, h. e. $d\alpha - dNM = \varsigma =$

$$=\frac{d\alpha(1-\cos v-\sin^2 v \sin^2\alpha)}{1-\sin^2 v \sin^2\alpha}=d\alpha-d\alpha\cos v(1+\sin^2 v \sin^2\alpha+\sin^4 v \sin^4\alpha+\text{etc})$$

et exprimendo $\sin^2\alpha$, $\sin^4\alpha$ per $\cos 2\alpha$, $\cos 4\alpha$

$$\varsigma=d\alpha\{1-\cos v(1+\tfrac{1}{2}\sin^2 v+\tfrac{3}{8}\sin^4 v)+\frac{\cos v}{2}\sin^2 v(1+\sin^2 v)\cos 2\alpha-\frac{\cos v}{8}\sin^4 v \cos 4\alpha\}.$$

Substituendo $v=5°\,8'\,46''$, habetur

$$\varsigma=d\alpha(0.0000035+0.0040386\cos 2\alpha-0.0000080\cos 4\alpha)$$

Valor medius quantitatis $d\alpha=32'56''.46$ dat $\varsigma=0''.007+7''.9823\cos 2\alpha-0''.0159\cos 4\alpha=\varsigma'$

et ς mutabitur in proportione, in qua motus verus $d\alpha$ major vel minor est quam 32'56".46, hinc habemus $\varsigma = \varsigma' \frac{d\alpha}{32'56''[illegible]}$ Hæc est dispositio tabularum celeb. Mayer. — Tabula 66 continet ς' pro argumento α; tabula 67, cujus argumentum est $d\alpha$, dat factorem $\frac{d\alpha}{32'56''.5}$ per quem multiplicari debet aequatio tab. 66 ad obtinendum ς. In tabulis celeb. Bürg, reductio est spectata uti aequatio motus horarii, et calculata uti ceteræ. Reductio est $R = -6'46''.8 \sin 2\alpha$. Faciendo hinc $406'' = b''$, et in partibus radi $0.00197222 = b$, habebimus $\frac{dR}{dt} \cdot \Delta t = -2b\, d\alpha \cos \alpha$ et $\frac{d^2R}{dt^2} \Delta t^2 = +4b'' d\alpha^2 \sin 2\alpha$

Atqui verus motus horarius lunæ relative ad nodos, $d\alpha$, est aequalis medio motui, plus summa aequationum motus horarii. Sed hæ aequationes sunt connexæ, in tabulis, cum motu medio $= 32'56''.46$. Nominando hinc α summam aequationum motus horarii in longitudine, sumtarum e tabulis, et medium motum horarium relate ad nodos, $33'4''.4 = 1984''.4 = c''$ et in partibus radi $0.009620643 = c$, habebimus $d\alpha = c + (\alpha - 32'56''.46)$ hinc $d\alpha^2 = c^2 + 2c(\alpha - 32'56''.46)$. Quum autem sit variatio horaria reductionis, vel quod revenit ad idem, reductio motus horarii $\varsigma = \frac{dR}{dt} \cdot \Delta t + \frac{d^2R}{dt^2} \cdot \Delta t^2$ veniet

$$\varsigma = -2bc'' \cos 2\alpha - 2b(\alpha - 1976''.46) \cos 2\alpha + 2b''c^2 \sin 2\alpha + 4bc(\alpha - 1976''.46) \sin 2\alpha$$
$$= -7''.8273 \cos 2\alpha - 0.00394444(\alpha - 1976.46) \cos 2\alpha + 0''.0753 \sin 2\alpha$$
$$+ 0.0000759(\alpha - 1976.46) \sin 2\alpha.$$

Faciendo $\varsigma = -A - B + C + D$, C. D sunt aequationes secundi ordinis, quæ resultant ex $d\alpha^2$, et quæ igitur non mutant signum, uti A et B, si agitur de tempore ellapso. Sed habemus $A = 7''.8273 \cos 2\alpha$ vel $\cos 2\alpha = \frac{A}{7''.8273}$ hinc $B = \frac{A.0.003944....(\alpha - 1976.46}{7''.8273} =$

$= A''0.00050393(\alpha - 1976''.46)$ ubi A'' est expressum in secundis. Similiter habemus $C = 0''.0753 \sin 2\alpha$ vel $\sin 2\alpha = \frac{C}{0''.0753}$, hinc

$$D = \frac{C.0.0000759(\alpha - 1976.46)}{0''.0753} = C''0.001008(\alpha - 1976''.46).$$ —

Hæc reductio est in tabulis celeb. Bürg, aequatio XXVIII motus horarii. Ejus primus terminus A, qui habet pro argumento α = XXVIII est contentus in tabula LV. Secundus terminus, qui habet argumenta A'' et α, in tabula LVI. Terminus C, qui habet idem argumentum α, invenitur in tabula LVII sub titulo XXVIII, terminus D, qui habet sua argumenta C'' et α, est contentus in tab. LXI. Sit ex. grat.

$\alpha = 30°$, $æ = 38' 10'' = 2290''$, ergo $A'' = 3''.9136$, $C'' = 0''.0652$

$B = 3.9136 . 0.000504 . 313''.54 = 0.00197245 . 313''.54 = 0''.6184$

$D = 0.0000652 . 313''.54 =$ ~~0.0019724 . 313''.54~~ $= 0''.0204$, ex quo venit

$\varsigma = -A - B + C + D = -4''.4464$. —

In tabulis invenitur (LV) cum argumento $\alpha = I^s$, $A = 4''.09$, sed quia addita sunt 8'', habetur $A'' = -3''.91$. — Cum argumentis $æ = 38' 20''$* et $A = 4''.1$ invenitur $B = -10''.62$, h.e. $B = -0.62$. — Cum argumento XXVIII $= I^s$ invenitur (tab. LVII) $C = 0''.141$; ubi constans addita est $0''.075$, hinc $C = +0''.066$. Cum argumentis $æ = 38' 10''$ et $C = 0''.141$, invenitur (tab. LXI) $D = -2''.281$, et subtracta constanti $2''.299$, venit $D = +0''.018$, hinc $\varsigma = -4''.446$, uti prius. — Eodem modo invenitur motus horarius in latitudine. Assumendo pro exemplo maximam aequationem latitudinis $B = 5° 8' 40''.8 \sin\alpha - 5'' \sin 3\alpha = \mathfrak{Q} \sin\alpha - \mathfrak{L} \sin 3\alpha$, habetur $dB = \mathfrak{Q} d\alpha \cos\alpha - 3\mathfrak{L} . d\alpha \cos 3\alpha$,

$d^2B = -\mathfrak{Q} d\alpha^2 \sin\alpha + 9\mathfrak{L} . d\alpha^2 \sin 3\alpha$, ex quo deducitur motus horarius in latitudine $b = dB + \frac{d^2B}{2}$, et ponendo motum horarium loco $d\alpha$, erit $b = d\alpha(\mathfrak{Q}\cos\alpha - 3\mathfrak{L}\cos 3\alpha) - \frac{d\alpha^2}{2}(\mathfrak{Q}\sin\alpha - 9\mathfrak{L}\sin 3\alpha)$. — Substituendo $d\alpha = c'' = 1984''.4$ et $c = 0.009620643$ hinc quoque $\frac{d\alpha^2}{2} = 0.000046278$, $\mathfrak{Q} = 5° 8' 40''.8$, $\mathfrak{L} = 5''$ erit

$b = 2' 58''.182 \cos\alpha - 0''.1443 \cos 3\alpha - 0''.8571 \sin\alpha + 0''.0021 \sin 3\alpha$, ubi notari potest, duos (ultimos) terminos, qui sunt aequationes secundi gradus, non mutare signum pro hora antecedenti epochae. Duo primi termini sunt contenti in tab LXII, ultimi in tabula LXV. Sed quum nos supposuimus $d\alpha$ aequale motui medio c, loco motus veri $d\alpha'$, qui est datus prius, $d\alpha$ multiplicari debet per $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = N$ et $d\alpha^2$ per $\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2 = N^2$: factores N, N^2 inveniuntur in tabula LXVI.

— Theoria parallaxis quam dedimus, quoque suam applicationem habet ad lunam. Ista aequatio, quam ibi dedimus, dat immediate parallaxin lunae sub aequatore $= æ$, quae est parallaxis horizontalis pro locis sub aequatore. Sed quum distantia lunae est variabilis, propter motum ellipticum et actionem Solis, ejus parallaxis debet necessario esse subjecta analogis variationibus. Dabitur igitur certus valor (medius) parallaxis aequatorialis, qui magna cum precisione determinari debet, quia est quantitas absoluta seu coëfficiens constans, a quo omnes correctiones dependent; et hic naturale videtur, eligere ad hunc effectum parallaxin lunae in sua media distantia, quae est aequalis semiaxi

* quia summa omnium signerum $æ$, 10'' est aucta.

majori ejus orbitæ ellipticæ. Determinatio parallaxis mediæ exigit molestas disquisitiones; nos hic dabimus ideam operationis, per quam concludi potest parallaxis ex observationibus. —

Nominando c distantiam mediam lunæ a terra vel semiaxin ejus ellipsis, æ parallaxin aequatorialem quæ respondet c, r distantiam lunæ in momento unius observationis, æ' parallaxin aequatorialem quæ huic convenit, habemus $æ = \frac{1}{c}$, $æ' = \frac{1}{r}$, ubi semidiameter aequatoris terrestris pro unitate est assumta. Quum excentricitas γ orbitæ ellipticæ nota sit, et anomalia vera v e tabulis data sit, habebimus $\frac{r}{c} = \frac{1-\gamma^2}{1-\gamma\cos v} = \frac{æ}{æ'}$, hinc $æ = \frac{æ'(1-\gamma^2)}{1-\gamma\cos v}$; verum quidem est, hoc non revera esse parallaxin mediam, quam quærimus, quia r et æ non exacte sint conformes valores theoriæ ellipticæ, quum r non solum dependeat a v, sed etiam ab actione Solis; sed quum hujus effectus modo est augmentum, modo imminutio quantitatis r, medium sumtum ex magno numero observationum, parum tantummodo differt a valore exacto, et corrigi potest per sequentem ~~opp~~ operationem. Theoria physica nobis suppeditat argumenta et formam correctionum parallaxis, quæ resultant ex actione solis, etiamsi non det exacte earum coëfficientes, qui dependent ab æ; interea ratio, quæ existit inter hos coëfficientes, est satis nota, ut indicentur ii, qui sunt maxime considerabiles. Nominando eos, α, β etc, parallaxis correcta erit data per seriem hujus formæ

$æ' = æ + \alpha\cos A + \beta\cos B + \ldots$ Eligentur igitur observationes, ubi $\cos A$ et $\cos B$ sunt nulli vel $\alpha\cos A + \beta\cos B = 0$; dein possumus sine errore sensibili supponere $æ' = æ$; valor quantitatis æ, qui per hunc processum invenietur, sufficiet dein ad determinationem exactam coëfficientium α, β etc. — His positis, possumus calculare cum argumentis A, B etc et coëfficientibus α, β etc correctiones, quæ conveniunt cuicunque observationi æ', quarum summa subtracta ab æ', dabit valorem exactum quantitatis æ. —

Parallaxis lunæ est ita considerabilis, ut Astronomi Græci Alexandriæ eam jam determinaverint aliqua cum precisione. Secundum Hipparchum, maxima parallaxis est 55'30", minima 47'30". Ptolemæus invenit distantias lunæ in quadraturis aequales $43\frac{1}{6}$ et $32\frac{2}{6}$ semidiametris terræ, in syzigiis $64\frac{1}{6}$ et ~~[illegible]~~ $53\frac{5}{6}$

et 33°6 (Almag. l. V. c. 13) quod dat parallaxes 79'38" et 104'42" in quadraturis, et in syzygiis 53'34", 63'51". Si ultimi valores sunt vicinissimi veritati. Anno 1284, Alfonsus X, rex Castiliae, invenit per calculum, maximam parallaxin = 63'17", minimam 53'19", fere uti Ptolemaeus; hoc resultatum est magis exactum quam illud prius inventum a Copernico, Tychone et Keplero. — Maxima parallaxis est secundum Lalande = 61'29", minima 53'51"; secundum Mayer 61'32", 53'57", et media prius designata per α, = 57'11". — Secundum Bürg, parallaxis media sub aequatore est 57'1", et variat per naturam ellipseos, a 54'3".5 ad 60'18".5. Revera, si facimus $\gamma = 0.055027$, $\alpha = 57'1"$, veram parallaxin sub aequatore = α', distantiam mediam lunae a terra = 1, radium vectorem ellipticum Z, anomaliam veram computatam a perigeo = A, erit

$\sin\alpha : \sin\alpha' = Z : 1$ hinc $\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{Z} = \frac{\sin\alpha}{1-\gamma^2}(1+\gamma\cos A)$. —

Nominando dein $\frac{1}{1-\gamma^2} = 1.0030372 = Dr$, erit

$\sin\alpha' = Dr(1+\gamma\cos A)\sin\alpha = Dr(1+\gamma\cos A)\alpha(1-\frac{\alpha^2}{6}+\text{etc})$

hinc, quia $\alpha' = \sin\alpha' + \frac{\sin^3\alpha'}{6}$

$\alpha' = Dr(1+\gamma\cos A)\alpha(1-\frac{\alpha^2}{6}) + \frac{Dr^3}{6}.\alpha^3(1+3\gamma\cos A+3\gamma^2\cos^2 A+\gamma^3\cos^3 A)$,

vel ponendo brevitatis causa

$1+\frac{Dr^2-1}{6}\alpha^2+\frac{Dr^2\alpha^2\gamma^2}{4} = P$, $\gamma(1-\frac{\alpha^2}{6}+\frac{Dr^2\alpha^2}{2}+\frac{Dr^2\alpha^2\gamma^2}{8} = Q$, $\frac{Dr^2\alpha^2\gamma^2}{4} = R$, $\frac{R}{6}\gamma = S$,

erit $\alpha' = Dr\alpha(P+Q\cos A+R\cos 2A+S\cos 3A)$.

Invenitur

$Dr P = 1.0036376 7$, $Dr Q = 0.05519924$, $Dr R = 0.00000021$, hinc

(1) $\alpha' = 57'11".39 + 188".27\cos A + \text{etc}$

Quum anomalia vera jam calculata est in tabulis, nimirum $A = A' +$ aequatione centri, aequatio (1) erit multo simplicior quam illa applicata in tabulis, ubi pro argumento est assumta anomalia media correcta A'. Revera nos habemus,

$Z = 1-\gamma\cos A'+\frac{\gamma^2}{2}(1-\cos 2A')+\frac{3}{8}\gamma^3(\cos A'-\cos 3A')+\text{etc}$

hinc $\frac{1}{Z} = 1+\gamma\cos A'+\frac{\gamma^2}{2}(\cos 2A'-1)+\frac{3}{8}\gamma^3(\cos 3A'-\cos A')+\gamma^2\cos^2 A'+\gamma^3\cos A'(\cos 2A'-1)+\gamma^3\cos^3 A'$,

$\frac{1}{Z^3} = 1+3\gamma\cos A'$, quia $\frac{1}{Z^3}$ est multiplicatum per α^3. —

Hoc dat

$\alpha' = \frac{\alpha}{Z}(1-\frac{\alpha^2}{6})+\frac{\alpha^3}{6Z^3} = \alpha\{1+\gamma(1-\frac{\gamma^2}{8})\cos A'+\gamma^2\cos 2A'+\frac{9}{8}\gamma^3\cos 3A'+\frac{\alpha^2}{3}\gamma\cos A'\}$.

Substituendo hinc $\alpha = 57'1"$, $\gamma = 0.055027$, habemus $\alpha^2 = 0.00027507 8$,

$\frac{\alpha^2}{3}\gamma = 0.0000050456$, hinc

(2) $\alpha' = 57' 1'' + 188''.193 \cos A' + 10''.359 \cos 2A' + 0''.2 \cos 3A'$;

hoc aeque est in tabula XXXIX. celeb. Bürg

$\alpha' = 57' 1'' + 187''.3 \cos A' + 10''.~~359~~ \cos 2A' + 0''.2 \cos 3A'$. —

Perturbationes lunae oriuntur e vi, qua attrahitur a Sole; hinc debent necessario variare ejus distantiam a terra, vel ejus parallaxin et quidem eo magis quo 1) vis perturbatrix est major, vel quo propior est Sol ~~xxx~~ lunae, quod dependet ab a, A et E, 2) quo luna propior est ecclipticae, quod ependet ab ejus distantia a nodo. Hinc argumenta correctionum parallaxis erunt composita ex a, A, E, et A ☾ − ☊ vel ☾ + N ita, ut parallaxis dependeat ab iisdem argumentis, uti longitudo, sed alio modo. —



Sit TA orbita lunae circa terram in S et supponamus attractionem Solis I removere lunam a T in O, ubi TO est functio praecedentium argumentorum. Nominando φ unum horum argumentorum, vidimus, omnes aequationes longitudinis habere formam $G \sin \varphi$, quod dat angulum TSC seu $\frac{TC}{TS}$. Sed quum sit $\alpha = \frac{1}{r}$, ubi r est radius vector TS, erit $d\alpha = -\frac{dr}{r^2}$. Sed $TC : CO = r.G \sin \varphi : dr = \sin O : \cos O$, ex quo praesumi potest, dr et dα esse functiones cosinuum eorundem argumentorum, quorum d☾ continet Sinus. Ex hoc resultat, dα esse nullum, quando d☾ est maximum, et reciproce, quia hae duae aequationes sunt datae per duo ~~la~~tera perpendicularia trianguli TCO.

Parallaxis hac ratione correcta, sub aequatore, est secundum tabulas celeb. Bürg

$$\begin{aligned}
\alpha' = 57'.1'' &+ (187''.3 \cos A' + 10'' \cos 2A' + 0''.2 \cos 3A')(\text{XXXIX}) \\
&+ (37''.3 \cos(2E - A) + 0''.3 \cos 2(2E - A))(\text{Evect. XL.}) \\
&- (1'' \cos E - 26'' \cos 2E - 0''.2 \cos 3E)(\text{Variat. XLI}) \\
&- 0''.3 \cos a (\text{XLII})(\text{Aeq. I}) - (0''.2 \cos(E - A) + 2'' \cos 2(E - A))(\text{Aeq. V.}) \\
&- 0''.1 \cos(2E + A)(\text{Aeq. VII}) + 0''.2 \cos(A - a)(\text{IX}) + 0''.7 \cos(2E + a)(\text{X}) \\
&+ 0''.8 \cos(2E - a)(\text{XI}) + 1''. \cos(2E - A + a)(\text{XIII}) + 0''.6 \cos(2E - A - a)(\text{XIV}) \\
&+ 0''.4 \cos(\odot + N')(\text{XVIII}) - 0''.8 \cos(2☾' + 2N' - A')(\text{XXVII}).
\end{aligned}$$

Parallaxis aequatorialis α' dat parallaxin horizontalem H, pro quolibet loco, cujus distantia z a centro terrae est data, $H = \alpha' z$: parallaxis media alicujus loci dein est $= z.57'1''$, semper minor quam illa sub aequatore. Dein H dabit parallaxin pro quacunq altitudine. —

Distantia lunae a terra resultat immediate ex ejus parallaxi: haec est in partibus radii terrae, $r = \frac{1}{\sin \alpha'}$. Motus ellipticus et perturbationes productae per actionem Solis, hanc faciunt variare a 53' ad 62': ex quo resultat maxima distantia lunae $= \frac{1}{\sin 53'} = 64.8657$ radiis terrae, minima $= \frac{1}{\sin 62'} = 55.4505$ et media distantia = 60 radiis terrae. ——

Magnitudo Lunæ

Distantia seu parallaxis alicujus astri, ejus diameter apparens, et realis magnitudo ita inter se sunt connexæ, ut datis duabus harum quantitatum, tertia immediate innotescat.
Sint C, L, centra, CT = z, Ll = R semidiametri terræ et lunæ, LC = r earum distantia, et Cl, LT tangentes ad superficies lunæ et terræ: his positis LCl = ξ est semidiameter lunæ visa e centro terræ, vel semidiameter centralis, CLT = π ejus parallaxis horizontalis quæ convenit altitudini poli loci T, vel radio CT = z et distantiæ r; hæc igitur est parallaxis aequatorialis α, si T est locus in aequatore. Assumendo hinc pro unitate distantias semidiametri aequatoris, habebimus

$\alpha = \frac{1}{r}$, $\pi = \alpha z = \frac{z}{r}$ vel $r = \frac{z}{\pi} = \frac{1}{\alpha}$

Sin ξ vel $\xi = \frac{Ll}{CL} = \frac{R}{r}$, hinc $\xi = R\alpha$ et $R = \frac{\xi}{\alpha} = \frac{z\xi}{\pi}$

h. e. vera diameter lunæ est ad diametrum aequatoris terrestris, vel ad quamcunque aliam diametrum terræ, uti diameter apparens lunæ est ad parallaxin horizontalem sub aequatore vel sub alio loco dato. Ad inveniendam veram diametrum lunæ, nihil aliud faciendum est, quam sumere e tabulis ejus parallaxin horizontalem, et observare ejus diametrum apparentem pro eo momento, pro quo calculata est parallaxis. Ratio inter parallaxin aequatorialem et diametrum centralem lunæ hinc est constans, et inventum est per medium magni numeri observationum, hanc rationem fere esse $\frac{\xi}{\alpha} = R = \frac{3}{11}$, vel secundum Bürg 0.27293. Multiplicando hinc unam parallaxin horizontalem datam per $\frac{\xi}{\alpha} = 0.27293$, habebimus semidiametrum centralem pro eodem momento: invenitur in tab. XLIII Bürg, ubi numeri secundæ columnæ, divisi per illos primæ, dant quotam constantem 0.27293. — Vera diameter lunæ hinc est 0.27293 diam. aequat. terrestris; ejus superficies est $(0.27293)^2 = 0.0744908 = \frac{1}{13.4245}$ ejus terræ, et ejus volumen est $(0.27293)^3 = \frac{1}{49.1866}$ ejus terræ; igitur facile possemus exprimere magnitudinem lunæ in quacunque mensura. —

Ad calculandas eclipses et occultationes stellarum per lunam, necessaria est cognitio diametri lunæ ita ut apparebit in dato loco et tempore dato. Diameter centralis lunæ est $2\xi = \alpha . 0.54586$: faciendo hinc $\alpha = 53'$, $\alpha = 57'.1''$, $\alpha = 62'$, habebimus minimam diametrum centralem lunæ = 28' 55".84, mediam diametrum = 31' 7".4 et maximam = 33' 50".6. Hæc est diameter geocentrica, quæ non confundi debet cum diametro, visa e superficie terræ.

Supponendo etiam, durante una revolutione terrae, distantiam lunae a centro terrae non variari sensibiliter; tamen ejus distantia ab aliquo puncto superficiei non potest eadem manere, et ejus apparens diameter debet mutari in ratione inversa distantiae. Supponamus, T esse centrum, M aliquod punctum superficiei terrae, et centrum lunae assumere successive positiones L, l, λ, per rotationem terrae: dein habemus $LT = lT = \lambda T$, et nominando $2\varsigma'$ diametrum apparentem lunae in altitudine l, habemus $\varsigma : \varsigma' = Ml : Tl$, vel $\varsigma' = \frac{Tl}{Ml}\varsigma$. Clarum hinc est, diametrum apparentem esse maximam in zenith λ et minimam in horizonte L, quia $M\lambda < Ml$ et $Ml < ML$. Diameter lunae visa ex aliquo loco M, quando est in horizonte in L vel ejus diameter horizontalis est ad diametrum centralem, uti TL ad ML. —

Faciendo hinc $TM = 1$, TL est fere $= 60$ hinc
$ML = \sqrt{60^2-1} = 60 - \frac{1}{120}$ et $TL : ML = 1 : 1 - \frac{1}{7200}$ hinc quum sit ς fere aequalis $15'$, cujus 7200^{mas} pars est $0''.12$, sequitur, differentiam inter duas diametros, centralem et horizontalem, esse insensibilem. —

Quando luna se elevat supra Horizontem, appropinquatur observatori in M et hinc ejus diameter apparens crescit. Nimirum est $\varsigma' = \frac{Tl}{Ml}\cdot\varsigma = \varsigma\frac{\sin \lambda Ml}{\sin \lambda Tl}$, ubi $\lambda Ml = 90° - \theta'$ est distantia apparens a zenith, et $\lambda Tl = 90° - \theta$ distantia vera. Hinc habemus $\varsigma' = \varsigma\frac{\cos\theta'}{\cos\theta}$ et $\varsigma' - \varsigma = \sigma = \varsigma\frac{\cos\theta' - \cos\theta}{\cos\theta}$. Correctio semidiametri, seu quod addi debet ad semidiametrum horizontalem seu centralem ς, ut habeamus semidiametrum apparentem in altitudine θ vel θ', hinc est

$$(1)\quad \sigma = \frac{2\varsigma}{\cos\theta}\cdot\sin\frac{\theta+\theta'}{2}\sin\frac{\theta-\theta'}{2}$$

Nominando H parallaxin horizontalem, h parallaxin altitudinis et evolvendo usque ad quadratum quantitatis H, quod hic sufficit, habemus $h = H\cos\theta'$, et $\theta' = \theta - h$ hinc
$\sigma = \frac{2\varsigma}{\cos\theta}\sin\frac{h}{2}\sin(\theta - \frac{h}{2}) = \varsigma h(\operatorname{tg}\theta\cos\frac{h}{2} - \frac{h}{2}) = \varsigma h(\operatorname{tg}\theta - \frac{h}{2}) = \varsigma H\cos\theta'(\operatorname{tg}\theta - \frac{H}{2}\cos\theta')$
$= \varsigma H(\operatorname{tg}\theta\cos(\theta - h) - \frac{H}{2}\cos^2\theta') = \varsigma H(\sin\theta + H\sin^2\theta - \frac{H}{2}\cos^2\theta)$,
vel, substituendo $\frac{\varsigma}{0.27293} = 3.66394.\varsigma = n\varsigma$ pro H,

$$(2)\quad \sigma = n\varsigma\left(\varsigma\sin\theta + \frac{n}{4}\varsigma^2(1 - 3\cos 2\theta)\right).$$ —

Si vellemus exprimere (1) per altitudinem apparentem θ', habemus $\theta = \theta' + h = \theta' + n\rho \cos\theta'$, hinc

$$\sigma = \frac{h\rho}{\cos(\theta'+h)} \sin\left(\theta' + \frac{h}{2}\right) = \frac{n\rho^2}{1 - n\rho \sin\theta'}\left(\sin\theta' + \frac{n}{2}\rho \cos^2\theta'\right) = n\rho^2\left(\sin\theta + n\rho \sin^2\theta + \frac{n}{2}\rho\cos^2\theta'\right)$$

vel (3) $\sigma = n\rho\left(\rho \sin\theta' + \frac{n}{4}\rho^2(3 - \cos 2\theta')\right)$

Assumendo valorem $\rho = 17' = 0.0049451$, habebimus approximative $\sigma = 3737.''22 \cdot 0.005 \sin\theta' = 18.''7 \sin\theta$, ex quo videmus, diametrum apparentem lunae posse crescere ad 37'' ab Horizonte usque ad Zenith. —

Praecedens propositio, magnitudinem apparentem lunae crescere cum ejus altitudine, videtur contradicere experientiae generaliter cognitae, secundum quam nos credimus lunam maximam in Horizonte. Mensurando diametrum lunae cum micrometris, vel aspiciendo eam cum tubis, videmus nostrum errorem, et diametrum revera crescere cum altitudine, in ratione, quae modo data est: ex hoc sequitur, hanc illusionem opticam cessare, si lunam aspicimus isolatam, et hinc provenire ab objectis quae circumdant lunam et quibuscum eam comparamus. Nos scimus, quodlibet objectum apparere minus, si est isolatum vel suspensum in aëre: columna apud aliquam magnam domum apparet esse multo major ad Horizontem, quam si est in libero loco; ita etiam luna apparet ~~esse~~ multo major ad Horizontem ubi est circumdata variis objectis. Interea notare debemus, hoc non explicare phaenomenon, quare haec illusio etiam in mari locum habet, ubi tamen Horizon est liber. —

Secundum aliam explicationem, datam jam a Ptolemaeo, (Almag. l. IX c. 2 „Distantiae majores ad Horizontem visibus modo appareant, et minores in medii coeli locationibus.") haec illusio venit ab eo, quod nos credimus lunam in Horizonte magis elongatam quam in Zenith: nos facimus in eodem casu, quando nos muscam, quae praetervolat nostros oculos sumimus pro avi, quia illi attribuimus magnam distantiam. Quaestio igitur est, cur credamus lunam ad Horizontem magis elongatam: et ordinaria responsio est, quia luna nobis apparet post magnum numerum objectorum terrestrium et in Zenith inter oculum et lunam nihil se praesentat. Sed quum eadem illusio locum habet mari, ratio magis justa forsitan est debilitas lucis lunae ad Horizontem, quae secundum principia perspectivae aëreae, facit, ut objecta appareant magis elongata. Probabile quoque est, vapores Horizontis producere irradiationem

quæ facit ut luna, uti et stellæ appareant majores visu simplici quam cum telescopiis. Ratio majoris momenti est forsitan experientia nota toti mundo, cælum non apparere uti perfectum hemisphærium, sed ubi fornix compressa, cujus radius basis, secundum quasdam observationes, tribus aut quatuor vicibus major est quam altitudo: luna igitur nobis apparebit minus elongata in Zenith quam in Horizonte. —

Tandem explicata est hæc illusio per constructionem nostri oculi: et hæc explicatio esset sine dubio maxime satisfaciens, si observationes, in quibus est fundata, essent melius stabilitæ. Dixerunt, oculum esse similem lenti achromaticæ, hac cum differentia, ut ejus apertura sit variabilis, se contrahendo et dilatando, in ratione, qua lux magis vel minus est fortis. Noster oculus hinc videt lunam in Zenith per aperturam parvam, inverse ad Horizontem. Præterea experientia nos docet, imaginem objecti lucentis, formatam per lentem achromaticam in eadem distantia, esse eo majorem, quo major apertura: imago lunæ, projecta in retinam, erit igitur multo major ad Horizontem ubi eam aspicimus per aperturam majorem, quam in Zenith, ubi pupilla se conducet. —

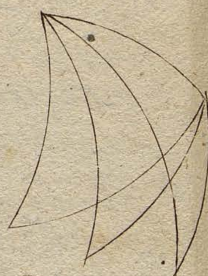
Rotatio Lunæ

Superficies lunæ constanter est tecta maculis diversæ magnitudinis, quas jam videmus oculis liberis. Brevi tempore post inventionem telescopiorum chartæ lunæ sunt delineatæ, et sic per comparationem cum posterioribus observationibus, potuerunt pervenire ad cognitionem exactam variabilitatis macularum. Facile quilibet se convincere potuit, facta abstractione ab aliquibus exceptionibus parum considerabilibus, has maculas esse invariabiles, et earum situationem relative ad oculum non mutari, hinc nos videre semper easdem maculas, et lunam nobis repræsentare semper eandem partem. Si hoc rigorose verum esset, ex hoc sequeretur, lunam, tempore unius revolutionis circa terram, revolvi una vice circa axin perpendicularem ad planum ejus orbitæ, et celeritates angulares horum duorum motuum esse exacte aequales: nam alias non est possibile ut nos videamus constanter eandem partem lunæ. Sed observationes

magis accurate ostenderunt, hoc esse subjectum aliquibus exceptionibus. Maculæ quæ videntur admodum propinquæ margini lunæ, egrediuntur e disco visibili, ita etiam intrant ex altera parte disci aliæ maculæ. Hoc phenomenon locum habet in orientali et occidentali, modo in boreali et australi parte; et hæc inaequalitas apparens lunæ nominata est ejus Libratio et facile explicari potest sequenti modo. Quum omnes rotationes corporum cœlestium, quas observare possumus, sint perfecte uniformes, supponere debemus, idem quoque esse quod lunam, et observationes hoc confirmarunt. Sed quum motus lunæ in sua orbita sit admodum inaequalis, ex hoc sequitur generatim lunam nobis præsentare semper eandem partem si periodus ejus rotationis est aequalis mensi siderali: sed maculæ modo in superiori modo in inferiori parte disparebunt, si motus lunæ in sua orbita celerior est vel non quam motus medius. — Præterea, si axis rotationis non est exacte perpendicularis ad planum orbitæ, maculæ in parte superiori vel inferiori disparebunt, in ratione, in qua luna elongatur a nodo ascendenti vel descendenti sui aequatoris. Accedunt quoque duæ aliæ causæ, quarum una pure est optica uti precedentes, altera autem physica. — Si etiam luna dirigeret constanter eandem partem versus centrum terræ, ita ut recta jungens centra lunæ et terræ, discum ~~solarem~~ lunarem semper i eodem puncto secaret, oculus in superficie terræ modo in hac modo in altera parte hujus lineæ esset propter motum diurnum terræ, ita ut luna ei appareret facere in uno die, oscillationes in sensu rotationis terræ; et facile quilibet videbit, hunc effectum nihil aliud esse quam parallaxin. Tandem, si luna non est sphæra homogenea, ejus partes magis elevatæ vel magis densæ, fortius attrahuntur a terra, ex quo resultabunt reales inaequalitates ejus rotationis. Hac ratione oscillationes lunæ sunt quatuor diversorum generum, quarum ultima est effectus physicus, ut inaequalitas realis; tres ceteræ, quæ tantummodo sunt apparentes, sunt compositæ e libratione diurna, libratione in longitudine et latitudine

periodus harum duarum ultimarum est mensis. —

Elementa rotationis lunae per positio sui Aequatoris, nodi, inclinatio inveniuntur ita, uti hae apud Solem locum habet.
Sit longitudo nodi ascendentis = ☊, longitudo nodi descendentis aequatoris lunae = ☊ + ω, inclinatio aequatoris ad eclipticam = ν, ν et ω sint ita parvi, ut eorum Cosinus possunt aequales poni unitati, et ☊ est cognitum pro quacunque epocha. Inventa per observationem longitudine et latitudine selenocentrica alicujus maculae, l et b, poni debet in aequatione 1.)* pf = x, ν loco y, 90 − b loco d et z loco x, erit cos x = cos ν sin b + sin ν cos b cos z



90° − x = 90° − PM = declinationi selenocentricae maculae et z = PEM. Quum E. P. sunt poli aequatoris lunaris et eclipticae, cujus longitudo semper 90° major est quam illa sui nodi descendentis, longitudo poli P erit = 90° + ☊ + ω, illa maculae M = l, ex quo sequitur

z = l − 90° − ☊ − ω, hinc

cos z = sin (l − ☊ − ω) = sin (l − ☊) − ω cos (l − ☊), quae praecedenti aequationi sequentem formam dat:

cos x = sin b + ν cos b sin (l − ☊) − νω cos b cos (l − ☊)

Quum ν = PE tantummodo sit 1° vel 2°, differentia inter PM, EM erit admodum parva: faciendo hinc PM = EM − y, vel x = 90° − b − y habebimus fere cos x = sin (b + y) = sin b + y cos b, quod substitutum in praecedenti aequatione, dabit

y = ν sin (l − ☊) − νω cos (l − ☊) = 90° − b − x,

hinc declinatio selenocentrica maculae

90° − x = b + ν sin (l − ☊) − νω cos (l − ☊)

Tres observationes unius maculae, dabunt tres aequationes hujus formae et hinc tres incognitas, quas includunt, x, ν, ω. —

Ex omnibus observationibus resultat, sine exceptione etiam earum, quas instituit Hevelius fere ante 200 annos, dant ω minus, quam 4°; hinc, quum exacta determinatio hujus quantitatis non est possibilis, assumi solet ω = 0 ita, ut generatim supponatur, nodum descendentem aequatoris lunaris coincidere cum nodo ascendenti orbitae lunae.

* Vide superius de maculis solis



